Informatik 3 (Datenstrukturen und Algorithmen)
Wintersemester 2008/2009
Vorlesung: H. Hempel (hempel@informatik.uni-jena.de)

Aufgaben zum Advent

1. $2^{n+2008} + 2^{n+2008} =$

(a) 2^{n+2009} (b) $2^{2n+4016}$ (c) $2^{2n+2009}$ (d) 4^{n+2008}

2. Heute ist Dienstag. In 10000000000002 Tagen ist ein

(a) Montag (b) Mittwoch (c) Freitag (g) Sonntag

3.Wieviele dreistellige (im Dezimalsystem)natürliche Zahlen gibt es, deren 2008. und 2009. Potenz (in Dezimaldarstellung) mit derselben Ziffer enden?
(a) < 100 (b) > 300 (c) < 200 (d) > 250

4. Die Anzahl der Quadrupel (a, b, c, d) natürlicher Zahlen mit $a \leq b \leq c \leq d$, die der Gleichung $a \cdot b \cdot c \cdot d = 2008$ genügen ist
(a) 1 (b) 5 (c) 6 (d) 7

5. Sei n eine natürliche Zahl für die die Gleichung

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2+(n+5)^2 = (n+6)^2+(n+7)^2+(n+8)^2+(n+9)^2+(n+10)^2$$

erfüllt ist. Es gilt:
(a) n endet auf 5 (in Dezimaldarstelllung) (b) n beginnt mit 5 (in Dezimaldarstellung) (c) n existiert nicht (d) n ist nicht eindeutig bestimmt

6. Die 6666.letzte Ziffer der Dezimaldarstellung von 2008^{2008}! ist

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 6

7. Ein Algorithmus gibt nacheinander die Folge 0^7, 1^7, 2^7, 3^7,... der siebten Potenzen aller natürlichen Zahlen aus. Die Anzahl der Folgenglieder im offenen Intervall $(5^{21}, 2^{49})$ ist
(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1

8. Man versuche die natürliche Zahlen von 0 bis 64 durch mathematische Terme auszudrücken. Diese Terme dürfen aus natürlichen Zahlen und einfachen mathematischen Zeichen aufgebaut sein. Dabei darf als einzige Ziffer die Ziffer 8 verwendet werden, diese allerdings genau viermal–nicht mehr und nicht weniger. Unter „einfachen“ mathematischen Zeichen verstehen wir neben runden Klammern und den aus Informatik 3 bekannten Klammersymbolen für floor und ceiling die Rechenzeichen für Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Quadratwurzel. Sei m die kleinste natürliche Zahl mit $m \leq 32$ die sich nicht auf die genannte Weise darstellen lässt. Es gilt:
(a) m ist Primzahl (b) m ist gerade (c) $m \leq 24$ (d) $m \geq 24$

9. Wir betrachten die folgende Bildung von 9^9 natürlichen Zahlen. Am Anfang sind alle Zahlen gleich Null. Im ersten Schritt addiert man 1 zu jeder (ersten) Zahl. Im zweiten Schritt addiert man 1 zu jeder zweiten Zahl und im dritten Schritt eine 1 zu jeder dritten Zahl usw. Für den Wert p der (9!). Zahl nach 2008 Schritten gilt:

(a) p ist gerade (b) p ist ungerade (c) p ist eine Primzahl (d) p lässt bei Division durch 9 den Rest 8

10. Wie lautet die vorletzte Ziffer von $(10+1)^{2008^{2008^{2008}}}$?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8

11. Wieviele elfstellige Dezimalzahlen sind gleich der Summe der elften Potenzen ihrer Ziffern?

(a) 0-9 (b) 10 (c) 11 (d) größer als 11

12. Da heute der 12.12.2008 ist, interessieren wir uns besonders für die Zahl t= 12*12*2008-1. Die Anzahl derjenigen positiven ganzen Zahlen, die durch t teilbar sind und genau t verschiedene Teiler besitzen ist

(a) 0-12 (b) größer als 12 (c) keine natürliche Zahl (d) einer der in a genannten Werte

13. Auf wieviele verschiedene Weisen, nennen wir diese Anzahl w, lässt sich die Zahl 1313131313131313131313131313 als Summe einer arithmetischen Folge natürlicher Zahlen schreiben? Dabei soll die Länge der Folge jeweils mindestens 2 betragen und die Differenz der Folge stets genau 2 sein. Welche der folgenden Aussagen über w sind wahr?

(a) 13 (b) 31 (c) endet auf 3 (d) größer als 2008

14. Für die kleinste natürliche Zahl n, die durch 14*12 teilbar ist und deren Dezimaldarstellung 2008 Einsen enthält, gilt

(a) n hat weniger als 2010 Dezimalstellen (b) n hat mehr als 2009 Dezimalstellen
(c) $\frac{n}{2}$ ist eine Fermatzahl (d) $\frac{n}{14*12}$ ist eine Primzahl

15. Die Summe von $(sqrt(15*12/5))/2$ aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist niemals

(a) eine Primzahl (b) eine Potenz von 15 (c) eine Potenz von 12 (d) eine Potenz von 2008
(e) ein k! für eine natürliche Zahl k (f) gleich der Summe der nächsten beiden Quadratzahlen
(g) eine 15.Potenz (h) eine 12.Potenz (j) eine 2008.Potenz

16. Von einer natürlichen Zahl n wird nacheinander die Quersumme von n, die Quersumme der Quersumme von n usw. berechnet, bis man eine einziffrige Zahl $z(n)$ erhält. Wie groß ist $z(2008^{16^{12^{2008}}})$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3
(e) 4 (f) 5 (g) 6 (h) 7
(i) 8 (j) 9 (k) Keines der unter (a) bis (j) genannten.

17. Für ein Spiel liegen in einem Korb 4017 Beutel bereit, in denen jeweils 1, 2, 3,..., 4016 bzw. 4017 Murmeln sind.
Adolar nimmt sich irgendwelche 2 Beutel heraus und Brünhilde irgendwelche 2008 Beutel. Nachdem Brünhilde die Murmeln in ihren 2008 Beuteln gezählt hat, äußert sie gegenüber Adolar, dass sie wisse, dass Adolar eine gerade Anzahl von Murmeln hat. Für die Zahl m der Murmeln, die Brünhilde insgesamt in ihren Beuteln hat, gilt:

(a) m endet auf oder beginnt mit 17	(b) enthält Ziffern 1 und 7	(c) ist größer als 17*12*2008	(d) 17*m ist größer als größte Zahl deren 4.Wurzel gleich der Zahl der Teiler ist

18. Wir suchen die kleinste durch 18 teilbare natürliche Zahl $a > 0$ für die a, $17a$ und $19a$ Potenzen (mit jeweils natürlichen Basen und Exponenten größer 1) sind. Für a gilt:
(a) Die Zahl a existiert nicht.
(b) Die Zahl a ist durch 12^{18} teilbar.
(c) Die Zahl a ist durch 18^{12} teilbar.
(d) $a^{18} + 1$ ist eine Primzahl.
(e) Die Dezimaldarstellung von a enthält die Ziffernfolge 18.
(f) Die Zahl $18a$ ist auch eine Potenz.
(g) Die Quersumme von a ist durch 18 teilbar.
(h) Die Zahl der Teiler von $a/18$ ist keine Potenz.

19. Welche der folgenden Aussagen über die kleinste Zahl s, die versechsfacht wird, wenn man ihre Endziffer 6 (in Dezimaldarstellung) an den Anfang der Zahl setzt, sind wahr?
(a) Die Zahl s ist durch 19 teilbar.
(b) Die Zahl s ist durch 12 teilbar.
(c) Die Quersumme von s ist durch 19 teilbar.
(d) Die Dezimalstellenzahl von s ist durch 19 teilbar.
(e) Die Zahl s enhält die Ziffernfolge 1912 (zusammenhängend und in dieser Reihenfolge).
(f) Mindestens drei der Aussagen (a) bis (h) sind wahr.
(g) Genau zwei der Aussagen (a) bis (h) sind wahr.
(h) Höchstens eine der Aussagen (a) bis (h) ist wahr.

20. Manche Zahlen lassen sich als Summe von Quadratzahlen schreiben. Wir interessieren uns für Zahlen, die als Summe von Kubikzahlen geschrieben werden können, z.B. ist $35 = 2^3 + 3^3$ eine solche Zahl. Was kann man über die kleineste Zahl k aussagen, die sich auf vier verschiedene Weisen (mit paarweise verschiedenen Summanden) als Summe zweier Kubikzahlen schreiben lässt.
(a) Die Zahl k existiert nicht.
(b) Die Zahl k ist durch 12 teilbar.
(c) Die Zahl k ist durch 20 teilbar.
(d) $k^{20} + 1$ ist eine Primzahl.
(e) Die Dezimaldarstellung von k enthält die Ziffern 2 und 0.
(f) Die Quersumme von k ist durch 20 teilbar.

Aufgabe 21 Da 21 durch 3 teilbar ist, interessieren wir uns für Kubikzahlen. Wir betrachten streng monoton wachsende Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ positiver natürlichen Zahlen. Derartige Folgen werden im weiteren als wohlgeformte Folgen bezeichnet. Ausgehend von (a_i) bilden wir zwei neue Folgen $(ab_{[i,j]})_{i,j\in\mathbb{N}}$ und $(ac_{[i,j]})_{i,j\in\mathbb{N}}$ wobei

$$ab_{[i,j]} = a_i + a_j \qquad \text{und} \qquad ac_{[i,j]} = (a_i + a_j)^2 - 3 \cdot a_i \cdot a_j.$$

Hierbei bezeichnet $[i,j]$ die Cantornummer des Paares (i,j) für eine beliebig aber fest gewählte Cantornummerierung.
Als Beispiel betrachten wir eine Variante der Fibonacci Zahlen, *fibo* $= (f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $f_0 = 1$, $f_1 = 2$ und $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$\textit{fibo} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...).$$

Einige Folgeglieder von $(fb_{[i,j]})$ und $(fc_{[i,j]})$ lauten $fb_{[0,0]} = 2$, $fb_{[2,3]} = 8$, $fb_{[5,3]} = 18$, $fc_{[0,0]} = 1$, $fc_{[2,3]} = 19$ und $fc_{[5,3]} = 129$. Offenbar ist $fc_{[0,0]}$ eine Kubikzahl, $fb_{[0,0]}$ aber nicht. Ebenso ist zwar $fb_{[2,3]}$ eine Kubikzahl, $fc_{[2,3]}$ aber nicht.
Betrachten wir ein weiteres Beispiel, die Folge *sieben* $= (s_i)_{i\in\mathbb{N}} = (7(i+1))_{i\in\mathbb{N}}$:

$$\textit{sieben} = (7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, ...).$$

Einige Folgeglieder von $(sb_{[i,j]})$ und $(sc_{[i,j]})$ lauten: $sb_{[0,0]} = 14$, $sb_{[1,2]} = 35$, $sb_{[20,27]} = 343$, $sc_{[0,0]} = 49$, $sc_{[1,2]} = 343$ und $sc_{[20,27]} = 31213$. Wieder beobachtet man, dass zwar $sc_{[1,2]}$ und $sb_{[21,28]}$ Kubikzahlen, die zugehörigen $sb_{[1,2]}$ und $sc_{[21,28]}$ aber keine Kubikzahlen sind.
Für eine Folge $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sei $H(a)$ die folgende Aussage:

> Es existieren $m, n \in \mathbb{N}$ derart, dass sowohl $ab_{[m,n]}$ als auch $ac_{[m,n]}$ Kubikzahlen sind.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? ($\neg$ steht für die logische Negation.)

(a) $\neg H(\textit{fibo})$.

(b) $H(\textit{sieben})$.

(c) Es existiert eine wohlgeformte Folge a so dass $H(a)$ gilt.

(d) Es existiert eine wohlgeformte Folge a so dass $\neg H(a)$ gilt.

(e) Für alle wohlgeformten Folgen a gilt $H(a)$.

(f) Für alle wohlgeformten Folgen a gilt $\neg H(a)$.

(g) Wenn $H(\textit{einundzwanzig})$ für die Folge *einundzwanzig* $= (e_i)_{i\in\mathbb{N}} = (21^i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt, so gilt für jedes Indexpaar (i,j) so dass $eb_{[i,j]}$ und $ec_{[i,j]}$ beides Kubikzahlen sind, $i > 21^{12}$ und $j > 21^{12}$.