

Klausur zur Numerik, SS 2003

1. Gesucht ist ein stabiles Näherungsverfahren zur Berechnung von

$$f(x) = \exp(x^2) - 1$$

für betragsmäßig kleine $x \in \mathbf{R}$. Bei der (näherungsweisen) Berechnung von $f(0,01)$ (mit diesem Algorithmus) soll der Fehler kleiner sein als 10^{-10} .

Nur zur Kontrolle: $f(0,01) = 0,00010000500\dots$

2. Welchen Näherungswert für $\sqrt{10}$ erhält man, wenn man die entsprechende Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - 10$$

mit einem Schritt vom Newton-Verfahren und dem Startwert $x_0 = 3$ approximiert?

Eigentlich nicht nötig: $\sqrt{10} \approx 3,162278$.

3. Gegeben sei $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \in [100, 144]$. Sei $p \in P_3$ das Interpolationspolynom zu f an den Stützstellen $x_1 = 100$, $x_2 = 121$ und $x_3 = 144$.

a) Berechnen Sie $p(120)$. Nur zur Kontrolle: $19400/1771 \approx 10,95426$.

b) Schätzen Sie den Fehler $|\sqrt{120} - p(120)|$ mit Hilfe eines Satzes der Vorlesung ab und vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Fehler.

Nur zur Kontrolle: $\sqrt{120} \approx 10,95445$.

4. Gegeben sei das Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)x^2 dx.$$

a) Bestimmen Sie ein $q \in P_2$ mit $q \neq 0$ und

$$(q, p) = 0 \quad \text{für alle } p \in P_1.$$

b) Bestimmen Sie die Quadraturformel $S_1(f) = a_1 \cdot f(x_1)$, für die

$$S_1(f) = \int_0^1 f(x)x^2 dx$$

für alle $f \in P_2$ gilt.

5a. Finden Sie eine explizite Form des Polynoms $p \in P_{21}$ mit $p(0) = 1$ und

$$p(k) = 0 \quad \text{für } k \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 10\}.$$

5b. Schätzen Sie $p(11)$ ab. Hier genügt eine relativ grobe Abschätzung. Sie können z.B. die grob genäherten Werte

$$21! \approx 5 \cdot 10^{19} \quad \text{und} \quad (10!)^2 \approx 10^{13}$$

benützen.

Hinweis: Es gibt 8 Teilaufgaben, die jeweils 4 Punkte zählen.