Numerik 1
Prof. Dr. Erich Novak
WS 2008/09
Alle Übungsserien

Name: Manuel Maier
Martrikelnummer: 94766
Übungsgruppe: 1 (Di 16-18 Uhr)
Studiengang: Mathematik Diplom

12. Januar 2008

1.1. Sind die folgenden Abbildungen gut konditioniert, wenn man relative bzw. absolute Fehler betrachtet?

a) $S_a(x) = \arccos(x), \qquad x \in [-1, 1]$

b) $S_b(x) = x, \qquad x \geq 0$

c) $S_c(x) = 1 - x, \qquad x \in \mathbb{R}$

Berechnen Sie dazu zunächst die Konditionszahlen $K_{\text{abs}}(x)$ und $K_{\text{rel}}(x)$ einer beliebigen stetig differenzierbaren Abbildung $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Hinweis: Es ergibt sich $K_{\text{abs}}(x) = |S'(x)|$ und $K_{\text{rel}}(x) = \left|\frac{x \cdot S'(x)}{S(x)}\right|$ die zweite Formel gilt, falls $S(x) \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
K_{\text{abs}}(x) &\overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{\|x - x_1\| < \varepsilon \\ x \neq x_1}} \frac{\|S(x) - S(x_1)\|}{\|x - x_1\|} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{|x - x_1| < \varepsilon \\ x \neq x_1}} \frac{|S(x) - S(x_1)|}{|x - x_1|} \\
&\overset{\text{MWS}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{|x - x_1| < \varepsilon \\ x \neq x_1}} |S'(\xi)| \qquad\qquad \xi \in [x, x_1] \\
&= |S'(x)|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{\text{rel}}(x) &\overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{\|x-x_1\|<\varepsilon \\ x\neq x_1}} \frac{\|S(x)-S(x_1)\|}{\|x-x_1\|}\frac{\|x\|}{\|S(x)\|} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{|x-x_1|<\varepsilon \\ x\neq x_1}} \frac{|S(x)-S(x_1)|}{|x-x_1|}\frac{|x|}{|S(x)|} \\
&= K_{\text{abs}}(x)\frac{|x|}{|S(x)|} \\
&= \left|\frac{xS'(x)}{S(x)}\right|
\end{aligned}
$$

a) $K_{\text{abs}}(x) = |S_a'(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right| \overset{|x|\to 1}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow K_{\text{abs}}(x)$ ist schlecht konditioniert für $|x| \to 1$.
$K_{\text{rel}}(x) = \left|\frac{xS_a'(x)}{S_a(x)}\right| = \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right| \overset{|x|\to 1}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow K_{\text{rel}}(x)$ ist schlecht konditioniert für $|x| \to 1$.

b) $K_{\text{abs}}(x) = |S_b'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| \overset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow K_{\text{abs}}(x)$ ist schlecht konditioniert für $|x| \to 1$.
$K_{\text{rel}}(x) = \left|\frac{xS_b'(x)}{S_b(x)}\right| = \left|\frac{x}{2x}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow K_{\text{rel}}(x)$ ist gut konditioniert.

c) $K_{\text{abs}}(x) = |S_c'(x)| = |-1| = 1 \Rightarrow K_{\text{abs}}(x)$ ist gut konditioniert.
$K_{\text{rel}}(x) = \left|\frac{xS_c'(x)}{S_c(x)}\right| = \left|\frac{-x}{1-x}\right| = \left|1+\frac{1}{x-1}\right| \overset{x\to 1}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow K_{\text{rel}}(x)$ ist schlecht konditioniert für $x \to 1$ (Stellenauslöschung).

1.2. Diskutieren Sie die numerische Berechnung (d.h. die Kondition der Abbildung und den Entwurf eines stabilen Algorithmus) von $S(x) = \log(x-\sqrt{x^2-1})$, wobei $x > 1$.

$$
\begin{aligned}
K_{\text{abs}}(x) = |S'(x)| &= \left|\frac{1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right| = \left|\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)(x+\sqrt{x^2-1})\right| \\
&= \left|x+\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2+x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right| = \left|\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right| \\
&= \left|-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right| \overset{x\to 1}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow \text{ für } x\to 1 \text{ schlecht konditioniert.}
\end{aligned}
$$

Für große x tritt Stellenauslöschung ein. Ein besseres Verfahren zur Berechnung von $S(x)$ ist:
$S(x) = \log(x-\sqrt{x^2-1}) = \log\frac{x^2-x^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \log\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = -\log(x+\sqrt{x^2-1})$

1.3. Sei $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm versehen und sei $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

a) Berechnen Sie die absolute Konditionszahl $K_{\text{abs}}(x)$ und (für $S(x) \neq 0$) die relativen Konditionszahlen $K^i_{\text{rel}}(x)$ von S.

$$\begin{aligned}
K_{\text{abs}}(x) &\overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{\|x-x_1\|<\varepsilon \\ x\neq x_1}} \frac{\|S(x)-S(x_1)\|}{\|x-x_1\|} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{|x-x_1|<\varepsilon \\ x\neq x_1}} \frac{|S(x)-S(x_1)|}{|x-x_1|} \\
&\overset{\text{MWS}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{|x-x_1|<\varepsilon \\ x\neq x_1}} |\operatorname{grad} S(\xi)| \qquad\qquad \xi \in [x, x_1] \\
&= |\operatorname{grad} S(x)| \\
K^i_{\text{rel}}(x) &= |\mathrm{D}_i S(x)| \left|\frac{x_i}{S(x)}\right|
\end{aligned}$$

b) Wenden Sie die Ergebnisse auf die Abbildungen S_a und S_b an, die gegeben sind durch $S_a(x) = x_1 + x_2$ bzw. $S_b(x) = x_1 x_2$ an.

S_a:

$$K_{\text{abs}}(x) = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2} \text{ gut konditioniert}$$

$$K^i_{\text{rel}}(x) = \left|\frac{x_i}{x_1+x_2}\right| \overset{x_1+x_2\to 0}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow \text{ schlecht konditioniert für } x_1 + x_2 \to 0$$

S_b:

$$K_{\text{abs}}(x) = \left|\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ schlecht konditioniert für große } x_1 \text{ und } x_2$$

$$K^i_{\text{rel}}(x) = \left|\frac{x_1 x_2}{x_1 x_2}\right| = 1 \text{ gut konditioniert}$$

1.4. Gesucht sei die kleinere Nullstelle von $x^2 - ax + 1 = 0$ für ein $a \geq 3$. Es sei also $F = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 3\}$ und $S(a)$ sei die gesuchte Lösung von

a) Berechnen Sie für $a = 240$ näherungsweise $S(a)$, indem Sie nach der bekannten Formel $S(a) = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}$ mit fünf gültigen Stellen rechnen.

b) Formen Sie diese Formel um, damit $S(a)$ (wieder bei Rechnung mit $a = 240$ und fünf gültigen Stellen) viel genauer herauskommt.

c) Ist dieses Problem gutkonditioniert? Bestimmen Sie dazu die Konditionszahlen $K_{\text{abs}}(a)$ und $K_{\text{rel}}(a)$.

d) Zeigen Sie, daß die Berechnungsvorschrift $S(a) = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}$ nicht stabil ist bezüglich relativer Fehler: Mit welchem relativen Fehler δ für $S(a)$ muss man rechnen, wenn bei der Berechnung von $\frac{a}{2}$ und $\sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}$ je ein relativer Fehler gemacht wird, der (betragsmäßig) gleich δ_0 ist?

1.5. Es sei $(x) = \sum_{k=1}^{20}(x-k)$. Ist das Problem, die Nullstellen von f zu finden, gut konditioniert? Betrachten Sie dazu für (betragsmäßig) kleine ε das Polynom $f(x) + \varepsilon \cdot g(x)$, wobei $g(x) = x^2 0$. Es sei $S(\varepsilon)$ die Nullstelle von $f + \varepsilon \cdot g$ in der Nähe von 20. Wie groß ist $S(0)$? Kommentieren Sie das Ergebnis.

2.1 Schreiben Sie ein Computerprogramm zur Berechnung einer Nullstelle einer differenzierbaren Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit Vorzeichenwechsel mit Hilfe der besprochenen Verfahren: Bisektion, Newton, Sekanten, regula falsi und hybrides Verfahren. Abbruchkriterium: $n = 200$ oder $|f(x_n)| \leq 10^{-10}$. Im Fall $x_n \notin [0,1]$ soll eine Fehlermeldung ausgegeben werden.
Testen Sie Ihr Programm anhand der Funktionen

$$f_k(x) = e^{kx} - e^{\frac{2k}{7}} \qquad \text{und} \qquad g_k(x) = \frac{1-3x}{1+kx}$$

mit k gleich 2 oder 5 oder 10 und den Startwerten 0 und 1 (bzw. 0 oder 1 beim Newtonverfahren).

2.2 Mit dem Newtonverfahren und $f(x) = x^2 - a$ soll die Wurzel von $a > 0,006$ berechnet werden. Der Startwert x_0 sei positiv. Zeigen Sie: Ist x_n für ein $n \geq 1$ auf k Stellen hinter dem Komma genau (das heißt für den Fehler e_n gilt $|e_n| < \frac{1}{2}10^{-k}$), so ist x_{n+1} auf mindestens $(2k-1)$ Stellen nach dem Komma genau.

2.3. Sei $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$. Zeigen Sie: Es gibt ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass das Newtonverfahren (angewandt auf f) mit beliebigem Startwert $x_0 \in I$ nicht konvergiert.

2.4. Gegeben sei die Abbildung $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ durch

$$Tf(x) = \int_0^1 \frac{1}{2}(xy-1) \cdot (f(y)+1)\mathrm{d}y$$

a) Zeigen Sie, dass T genau einen Fixpunkt hat.
b) Sei $f_0 = 0$ und $f_{n+1} = Tf_n$. Bestimmen Sie f_1 und f_2.
c) Bestimmen Sie den Fixpunkt von T.

2.5. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$f_1(x,y) = \frac{1}{6}\sin y + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{6}y = x$$

$$f_2(x,y) = \frac{1}{5}\cos y - \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}x = y$$

a) Zeigen Sie, dass dieses Gleichungssystem genau eine Lösung $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ hat.

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sin y + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{6}y \\ \frac{1}{5}\cos y - \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\left|F\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) - F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)\right| &= \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{6}(\sin y_2 - \sin y_1) + \frac{1}{3}(\cos x_2 - \cos x_1) - \frac{1}{6}(y_2 - y_1) \\ \frac{1}{5}(\cos y_2 - \cos y_1) - \frac{1}{4}(\sin x_2 - \sin x_1) + \frac{1}{4}(x_2 - x_1) \end{pmatrix}\right| \\
&\leq \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{6}|y_2 - y_1| + \frac{1}{3}|x_2 - x_1| - \frac{1}{6}|y_2 - y_1| \\ \frac{1}{5}|y_2 - y_1| - \frac{1}{4}|x_2 - x_1| + \frac{1}{4}|x_2 - x_1| \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{3}|x_2 - x_1| \\ \frac{1}{5}|y_2 - y_1| \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{3}|x_2 - x_1|\right)^2 + \left(\frac{1}{5}|y_2 - y_1|\right)^2} \\
&\leq \sqrt{\left(\frac{1}{3}|x_2 - x_1|\right)^2 + \left(\frac{1}{3}|y_2 - y_1|\right)^2} \\
&= \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}\right|
\end{aligned}$$

Damit ist F eine Kontraktion und das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung.

b) Sei $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f_1(x_n, y_n), f_2(x_n, y_n))$. Berechnen Sie (x_n, y_n) für $n = 1, 2, 3$ und 4.

$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) &= (0, 0) \\
(x_1, y_1) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right) \\
(x_2, y_2) &= (0.314763870570756, 0.1975479747025436) \\
(x_3, y_3) &= (0.316742771933748, 0.1974031344040673) \\
(x_4, y_4) &= (0.3165384033089968, 0.1974332757332508) \\
(x_\infty, y_\infty) &= (0.3165575424807447, 0.1974299226762082)
\end{aligned}$$

2.6. Gegeben sei die Integralgleichung

$$f(x) = c + \int_0^1 k(x, y) f(y)^{-2} \mathrm{d}y \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

mit $c > 2^{\frac{1}{3}}$ und einer stetigen Funktion k mit $0 \leq k \leq 1$. Zeigen Sie, dass eine Lösung $f \in C([0, 1])$ dieser Gleichung existiert.
Hinweis: Wenden Sie den Fixpunktsatz von Banach auf eine geeignete Teilmenge von $C([0, 1])$ an.

3.7 Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = y$ durch

$$\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 23 \end{pmatrix}$$

die Lösung ist $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Aufgrund von Messfehlern sei nur die Näherung $\widetilde{y} = \begin{pmatrix} 22 \\ 23 \end{pmatrix}$ und $\|\widetilde{y} - y\|_2 \leq 2$ bekannt. Darüber hinaus sei aber für die Lösung x noch bekannt, dass $\|x\|_2 \leq 2$.

a) Lösen Sie das System $A\widetilde{x} = \widetilde{y}$.

$$\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x_1} \\ \widetilde{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 23 \end{pmatrix} \Rightarrow \widetilde{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

b) Welche Näherung ergibt sich, wenn man die Tikhonov-Regularisierung - wie in der Vorlesung besprochen – anwendet?

c) Berechnen Sie die Minimalstelle x_α des Funktionals

$$V_\alpha(x) = \|Ax - \widetilde{y}\|_2^2 + \alpha \cdot \|x\|_2^2$$

in Abhängigkeit von α, wobei $\alpha > 0$. Man kann z.B. ein Programm schreiben, um x_α für $\alpha = 2^k$ mit $k = -10, -9, \dots, 10$ zu berechnen.

4.1. Stellen Sie die Funktion $S(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$ für $x \geq 0$ in der Form einer unendlichen Reihe dar. Wie viele Terme dieser Reihe benötigt man, wenn man $S(1)$ bzw. $S(10)$ auf diese Weise berechnen will mit einem Fehler, der kleiner ist als 10^{-8}?

$$\begin{aligned} S(x) &= \int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} \right) \mathrm{d}t = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \right) \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \end{aligned}$$

$S(1)$: $\left| \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \right| = \frac{1}{n!(2n+1)} \leq 10^{-8} \Leftrightarrow n!(2n+1) \geq 10^8 \Rightarrow n \geq 11$

Also reicht es 11 Summanden zu betrachten.

$S(10)$: $\left| \frac{(-1)^n 10^{2n+1}}{n!(2n+1)} \right| = \frac{10^{2n+1}}{n!(2n+1)} \leq 10^{-8} \Leftrightarrow \frac{n!(2n+1)}{10^{2n+1}} \geq 10^8 \Rightarrow n \geq 283$

Also reicht es 283 Summanden zu betrachten.

4.2 Gesucht ist eine Quadraturformel $S_4(f) = \sum\limits_{i=1}^{4} a_i f(x_i)$ mit $x_i = \frac{i-1}{3}$ zur Approximation von $S(f) = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Berechnen Sie die Gewichte so, dass $S_4(f) = S(\widetilde{f})$, wobei

a) $\widetilde{f} \in P_4$ ist das Polynom mit $\widetilde{f}(x_i) = f(x_i)$

$$\widetilde{f}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$S(\widetilde{f}) = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)\mathrm{d}x = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d$$

$$\begin{aligned} S_4(f) &= a_1 f(0) + a_2 f\left(\frac{1}{3}\right) + a_3 f\left(\frac{2}{3}\right) + a_4 f(1) \\ &= \left(\frac{a_2 + 8a_3 + 27a_4}{27}\right) a + \left(\frac{a_2 + 4a_3 + 9a_4}{9}\right) b + \left(\frac{a_2 + 2a_3 + 3a_4}{3}\right) c \\ &+ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)d \end{aligned}$$

Koeffizientvergleich ergibt

$$\begin{aligned} a_2 + 8a_3 + 27a_4 &= \frac{27}{4} \\ a_2 + 4a_3 + 9a_4 &= 3 \\ a_2 + 2a_3 + 3a_4 &= \frac{3}{2} \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{8}, a_2 = \frac{3}{8}, a_3 = \frac{3}{8}, a_4 = \frac{1}{8}$$

Also ist $S_4(f) = \frac{1}{8} f(0) + \frac{3}{8} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8} f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{8} f(1)$.

b) $\widetilde{f}$ ist der natürliche kubische Spline mit (Knoten x_i und) $\widetilde{f}(x_i) = f(x_i)$.

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} s_1(x) & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ s_2(x) & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ s_3(x) & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \end{cases}$$

$$s_i(x) = b_{i4}x^3 + b_{i3}x^2 + b_{i2}x + b_{i1}$$

$$s_1(0) = f(0), \quad s_1\left(\frac{1}{3}\right) = f(\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$s_2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right), \quad s_2\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$s_3\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right), \quad s_3(1) = f(1)$$

$$s_1'\left(\frac{1}{3}\right) = s_2'\left(\frac{1}{3}\right), \quad s_2'\left(\frac{2}{3}\right) = s_3'\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$s_1''\left(\frac{1}{3}\right) = s_2''\left(\frac{1}{3}\right), \quad s_2''\left(\frac{2}{3}\right) = s_3''\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$s_1''(0) = 0, \quad s_3''(1) = 0$$

$$\Rightarrow b_{ik}$$

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= f\,(0)\,,\\
b_{12} &= -\frac{-f\,(1)+6\,f\left(\frac{2}{3}\right)-24\,f\left(\frac{1}{3}\right)+19\,f\,(0)}{5},\\
b_{13} &= 0,\\
b_{14} &= \frac{-9\,f\,(1)+54\,f\left(\frac{2}{3}\right)-81\,f\left(\frac{1}{3}\right)+36\,f\,(0)}{5},\\
b_{21} &= \frac{-2\,f\,(1)+7\,f\left(\frac{2}{3}\right)-8\,f\left(\frac{1}{3}\right)+8\,f\,(0)}{5},\\
b_{22} &= -\frac{-19\,f\,(1)+69\,f\left(\frac{2}{3}\right)-96\,f\left(\frac{1}{3}\right)+46\,f\,(0)}{5},\\
b_{23} &= \frac{-54\,f\,(1)+189\,f\left(\frac{2}{3}\right)-216\,f\left(\frac{1}{3}\right)+81\,f\,(0)}{5},\\
b_{24} &= 9\,f\,(1)-27\,f\left(\frac{2}{3}\right)+27\,f\left(\frac{1}{3}\right)-9\,f\,(0)\,,\\
b_{31} &= -\frac{-22\,f\,(1)+57\,f\left(\frac{2}{3}\right)-48\,f\left(\frac{1}{3}\right)+8\,f\,(0)}{5},\\
b_{32} &= \frac{-89\,f\,(1)+219\,f\left(\frac{2}{3}\right)-156\,f\left(\frac{1}{3}\right)+26\,f\,(0)}{5},\\
b_{33} &= -\frac{-108\,f\,(1)+243\,f\left(\frac{2}{3}\right)-162\,f\left(\frac{1}{3}\right)+27\,f\,(0)}{5},\\
b_{34} &= \frac{-36\,f\,(1)+81\,f\left(\frac{2}{3}\right)-54\,f\left(\frac{1}{3}\right)+9\,f\,(0)}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(\widetilde{f}) &= \int\limits_0^1 \widetilde{f}(x)\mathrm{d}x\\
&= \int\limits_0^{\frac{1}{3}} s_1(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} s_2(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} s_3(x)\mathrm{d}x\\
S_4(f) &= a_1 f(0) + a_2 f\left(\frac{1}{3}\right) + a_3 f\left(\frac{2}{3}\right) + a_4 f(1)\\
&\Rightarrow a_i\\
&\quad a_1 = \frac{2}{15}, \quad a_2 = \frac{11}{30}, \quad a_3 = \frac{11}{30}, \quad a_4 = \frac{2}{15}
\end{aligned}
$$

4.3. Das Integral $S(f) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ soll durch eine Quadraturformel $S_2(f) = \sum\limits_{i=1}^{2} a_i f x_i)$ approximiert werden, wobei $x_1 \neq x_2$.

a) Wie müssen die a_i definiert werden, damit (bei gegebenen x_i) Polynome $p \in P_2$

exakt integriert werden?

$$\begin{aligned}
p(x) &= ax + b \\
S_2(f) &= a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) \\
S_2(p) &= a_1(ax_1 + b) + a_2(ax_2 + b) \\
&= (a_1x_1 + a_2x_2)a + (a_1 + a_2)b \\
S(p) &= \int_{-1}^{1} (ax + b)\mathrm{d}x = 2b
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned}
S_2(p) = S(p) &\Rightarrow a_1 + a_2 = 2 \wedge a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \\
&\Rightarrow a_1 = \frac{2x_2}{x_2 - x_1}, a_2 = -\frac{2x_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}$$

b) Jetzt sei $x_2 = -x_1$. Schätzen Sie $\Delta_{\max}(S_2)$ für $F^2 = \{f \in C^2([-1,1]) \ : \ \|f''\|_\infty \leq 1\}$

$$\begin{aligned}
S(f) &= \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \\
S_2(f) &= a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) = a_1 f(x_1) + a_2 f(-x_1) \\
&= f(x_1) + f(-x_1) \\
\Delta_{\max}(S_2) &= \sup_{f \in F^2} \{S(f) - S_2(f)\} \leq \frac{1}{2} \left\|f''\right\|_\infty \int_{-1}^{1} \left|x^2 - x_1^2\right| \mathrm{d}x \qquad \text{O.B.d.A sei } x_1 \geq 0 \\
&= \int_{-1}^{-x_1} (x^2 - x_1^2)\mathrm{d}x + \int_{-x_1}^{x_1} (x_1^2 - x^2)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{1} (x^2 - x_1^2)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{x^3}{3} - x_1^2 x \right]_{-1}^{-x_1} + \left[x_1^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-x_1}^{x_1} + \left[\frac{x^3}{3} - x_1^2 x \right]_{x_1}^{1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x_1^3 + \frac{1}{3} - x_1^2 + \frac{4}{3}x_1^3 + \frac{1}{3} - x_1^2 + \frac{2}{3}x_1^3 \right) = \frac{4}{3}x_1^3 - x_1^2 + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

mit Hilfe von Satz 27 der Vorlesung ab. Hierbei sei S_2 die in (0a) gefundene Formel.

4.4. Fortsetzung von Aufgabe (): Berechnen Sie $\Delta_{\max}(S_2)$ mit Hilfe von Satz 29 der

Vorlesung.

$$\Delta_{\max}(S_2) = \sup_{f\in F^2}\{S(f)-S_2(f)\} = \int_{-1}^{1}|K_2(t)|\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}|L((x-t)_+)|\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-1}^{x}|L(x-t)|\mathrm{d}t + \int_{x}^{1}|L(0)|\mathrm{d}t = \int_{-1}^{x}\left|\int_{-1}^{1}(x-t)\mathrm{d}x - (x_1-t) - (-x_1-t)\right|\mathrm{d}t + 0$$
$$= \int_{-1}^{x}|-2t+2t|\,\mathrm{d}t = 0$$

4.5. Es sei S_{2m+1} eine interpolatorische Quadraturformel für $S(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, d.h. es gelte $S_{2m+1}(p) = S(p)$ für alle $p \in P_{2m+1}$. Weiter seien die paarweise verschiedenen Knoten x_i von S_{2m+1} symmetrisch angeordnet, d.h. es gelte $x_i - a = b - x_{2m+2-i}$ für alle i. Zeigen Sie:

a) Für die Gewichte gilt dann $a_i = a_{2m+2-i}$ für alle i.

$$S_{2m+1}(f) = \sum_{i=1}^{2m+1} a_i f(x_i)$$
$$a_i = \int_a^b \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2m+1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2m+1} \frac{x-(a+b-x_{2m+2-j})}{-x_{2m+2-i}+x_{2m+2-j}}\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2m+1} \frac{a+b-x-x_{2m+2-j}}{x_{2m+2-i}-x_{2m+2-j}}\mathrm{d}x$$
$$(y = a+b-x)$$
$$= \int_b^a \left(-\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2m+1} \frac{y-x_{2m+2-j}}{x_{2m+2-i}-x_{2m+2-j}}\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2m+1} \frac{y-x_{2m+2-j}}{x_{2m+2-i}-x_{2m+2-j}}\mathrm{d}y$$
$$= S_{2m+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2m+1} \frac{y-x_{2m+2-j}}{x_{2m+2-i}-x_{2m+2-j}}\right) = a_{2m+2-i}$$

b) Die Formel S_{2m+1} ist sogar exakt für alle $p \in P_{2m+2}$.

$$S_{2m+1}(x^{2m+1}) = \sum_{i=1}^{2m+1} a_i x_i^{2m+1}$$
$$= a_{m+1} x_{m+1}^{2m+1} + \sum_{i=1}^{m} a_i (x_i^{2m+1} + (a+b-x_i)^{2m+1})$$

Folgern Sie, daß die Simpson-Formel Polynome vom Grad kleiner gleich 3 exakt integriert.
Hinweis: Sie können den Fall $[a,b] = [-1,1]$ betrachten, dann wird es einfacher.

$$S_3(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \text{ ist exakt für } p \in P_3 :$$

$S_3(c_3x^2 + c_2x + c_1) = \ldots$

$$\Rightarrow S_3 \text{ ist exakt für } p \in P_4, \text{ da } a, \frac{a+b}{2}, b \text{ symmetrisch liegen.}$$

4.6. Berechnen Sie näherungsweise die Integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \sqrt{x} \mathrm{d}x$$

Benutzen Sie dazu die Trapezregel, die Simpsonregel und das Romberg-Verfahren, jeweils mit $n = 2, 3, 5, 9$ und 17 Knoten. Kommentieren Sie die Ergebnisse hinsichtlich ihrer Genauigkeit.

4.7. Die folgenden Integrale sollen näherungsweise bestimmt werden, der Fehler soll garantiert kleiner sein als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^3} \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \sqrt{e^x - 1} \mathrm{d}x$$

Beachten Sie beim zweiten Integral, daß der Integrand für $x = 0$ nicht differenzierbar ist. Gefragt ist hier nach einem Lösungsweg, keine Programmieraufgabe. Warum macht es Sinn, beim zweiten Integral die Umkehrfunktion des Integranden zu betrachten?

4.8. Das Integral $S(f) = \int_0^1 f(x) x \mathrm{d}x$ soll so durch ein S_2 der Form $S_2(f) = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$ approximiert werden, dass $S(f) = S_2(f)$ für alle Polynome vom Grad kleiner als 4. Wie müssen die Knoten und die Gewichte gewählt werden? Bestimmen

Sie dazu zunächst ein $q \in P_3$ mit $q \neq 0$ und $\int\limits_0^1 p(x)q(x)x\mathrm{d}x = 0$ für alle $p \in P_2$.

$$\int\limits_0^1 (b_2x + b_1)(c_3x^2 + c_2x + c_1)x\mathrm{d}x = 0$$
$$\frac{(12b_2 + 15b_1)c_3 + (15b_2 + 20b_1)c_2 + (20b_2 + 30b_1)c_1}{60} = 0$$
$$\Rightarrow c_1 = 1, c_2 = -4, c_3 = \frac{10}{3} \text{ ist eine Lösung.}$$
$$\Rightarrow q(x) = \frac{10}{3}x^2 - 4x + 1 \text{ oder } q(x) = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}$$

5.1. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, wobei $\alpha \neq 1$.

a) Konstruieren Sie eine LR-Zerlegung von A.

$$L^{-1}A = U$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$
$$A = LU$$
$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie $\mathrm{cond}_\infty(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{1-\alpha}\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \max\{2, 1+|\alpha|\} \cdot \frac{1}{|1-\alpha|}\max\{2, 1+|\alpha|\}$$
$$= \begin{cases} \frac{4}{|1-\alpha|} & |\alpha| < 1 \\ \frac{(1+|\alpha|)^2}{|1-\alpha|} & |\alpha| > 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \lim_{\alpha \to 1} \mathrm{cond}_\infty(A) = \infty$$
$$\Rightarrow \lim_{\alpha \to \infty} \mathrm{cond}_\infty(A) = \infty$$

5.2. Zeigen Sie, dass die Hilbertmatrix $H_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, gegeben durch $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ positiv-definit (insbesondere also regulär) ist. Berechnen Sie dazu das Integral $\int_0^1 \left(\sum x_i t^{i-1}\right)$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 \mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j t^{i+j-2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1} t^{i+j-1}\right]_0^1 \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1} = x^T H_n x > 0, \text{ falls } x \neq 0
\end{aligned}
$$

5.3. Beweisen Sie:

a) Ist U eine invertierbare obere Dreiecksmatrix, so auch U^{-1}.

$\forall\ i < j\ :\ U_{ij} = 0$ $\qquad$ A_{ij} ist Minor von A

$$
\begin{aligned}
U^{-1} &= \frac{1}{\det(U)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(U)} \left((-1)^{i+j} |U_{ji}|\right)_{i,j=1}^n \\
(v_{ij})_{i,j=1}^n &:= U^{-1} \Rightarrow \forall\ i > j\ :\ v_{ij} = 0
\end{aligned}
$$

b) Gilt zusätzlich $u_{kk} = 1$ für alle k, so gilt das entsprechende auch für U^{-1}.

$(u_{ij})_{i,j=1}^n := U, \qquad (v_{ij})_{i,j=1}^n := U^{-1} U U^{-1} = I_n$

$$
\begin{aligned}
\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}\ :\ \sum_{k=1}^n u_{ik} v_{ki} &\overset{\forall i>k: u_{ik}=0}{=} \sum_{k=i}^n u_{ik} v_{ki} \overset{\forall k>i: v_{ki}=0}{=} \sum_{k=i}^i u_{ik} v_{ki} \\
&= u_{ii} v_{ii} = 1 \overset{u_{ii}=1}{\Rightarrow} v_{ii} = 1
\end{aligned}
$$

c) Das Produkt von zwei oberen Dreiecksmatrizen ist wieder eine.

$$
\begin{aligned}
A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, B &= (b_{ij})_{i,j=1}^n, \text{ mit } \forall\ i > j\ :\ a_{ij} = b_{ij} = 0 \\
AB = C &= (c_{ij})_{i,j=1}^n \\
c_{ij} &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right)_{i,j=1}^n
\end{aligned}
$$

Es gilt: $\forall\ i > j\ :\ c_{ij} \overset{\forall i>k: a_{ik}=0}{=} \left(\sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj}\right)_{i,j=1}^n \overset{\forall k \geq i > j: b_{kj}=0}{=} 0$

5.4 Programmieren Sie ein einfaches Eliminationsverfahren für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$. Hierbei sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Testen Sie Ihr Programm (für verschiedene n) anhand der Hilbertmatrix $a_{ij} = \frac{1}{i+j+1}$ mit $b_i = \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \cdots + \frac{1}{i+n-1}$.
Bemerkung: Die Hilbertmatrix ist sehr schlecht konditioniert, daher ist schon bei relativ kleinen n mit großen Rundungsfehlern (evtl. auch Division durch Null) zu rechnen.
Zum Vergleich: für die exakte Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ gilt natürlich $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

5.5. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär.

a) Beweisen Sie die Gleichung $\mathrm{cond}_2(A^tA) = (\mathrm{cond}_2(A))^2$. Dabei sei cond_2 die Konditionszahl bezüglich der Spektralnorm.

$$
\begin{aligned}
A^tA &\text{ ist symmetrisch und positiv definit}\\
\mathrm{cond}_2(A^tA) &= \|(A^tA)^{-1}\|_2\|A^tA\|_2\\
&= \sqrt{\varrho(((A^tA)^{-1})^t(A^tA)^{-1})} \cdot \sqrt{\varrho((A^tA)^tA^tA)}\\
&= \sqrt{\varrho(((A^tA)^t)^{-1}(A^tA)^{-1})} \cdot \sqrt{\varrho(A^tAA^tA)}\\
&= \sqrt{\varrho((A^tA)^{-1}(A^tA)^{-1})} \cdot \sqrt{\varrho(A^tAA^tA)}\\
&= \sqrt{\varrho((A^tA)^{-1})^2} \cdot \sqrt{\varrho(A^tA)^2}\\
&= \varrho((A^tA)^{-1}) \cdot \varrho(A^tA)\\
&=?\\
&= \varrho((A^t)^{-1}A^{-1}) \cdot \varrho(A^tA)\\
&= \varrho((A^{-1})^tA^{-1}) \cdot \varrho(A^tA)\\
&= (\|A^{-1}\|_2\|A\|_2)^2\\
&= \mathrm{cond}_2(A)^2
\end{aligned}
$$

b) Sei A zusätzlich symmetrisch. Zeigen Sie, dass sich die Konditionszahl $\mathrm{cond}_2(A)$ durch die Eigenwerte von A ausdrücken lässt.

5.6. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq y$ und $\|x\|_2 = \|y\|_2$. Die Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei gegeben durch $M = I - vu^t$ mit $v = x - y$ und $u = \frac{2v}{\|v\|_2^2}$. Dabei sei I die Einheitsmatrix. Zeigen Sie:

a) M ist orthogonal mit $MM = I$.

b) Es gilt $Mx = y$.

5.7. Programmieren Sie das Householder-Verfahren zur QR-Zerlegung einer $(m \times n)$–Matrix, wobei $m \geq n$. Lösen Sie damit nocheinmal das Gleichungssystem (mit der Hilbert-Matrix) von Aufgabe 5.4. Dabei soll die Tikhonov-Regularisierung angewendet werden, gesucht ist also das $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|Ax - b\|_2^2 + \alpha\|x\|_2^2 = \min!$ Wählen Sie beispielsweise $n = 20$ und $\alpha = 10 - k$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ und vergleichen Sie die Ergebnisse, auch mit denen, die Sie bei Aufgabe 5.4 erhalten haben.

5.8. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ und $\alpha > 0$. Weiter sei $F(x) = \|Ax - b\|_2^2 + \alpha\|x\|_2^2$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) F hat genau eine Minimalstelle x_b^*.

b) x^* ist die (stets eindeutige) Lösung von $(A^t A + \alpha I)x = A^t b$.

5.9. Es sei $A \in \mathbb{R}m \times n$ eine beliebige Matrix mit $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Zeigen Sie, daß das Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 = \min!$ stets genau eine Lösung x_b^* mit minimaler (euklidischer) Norm hat.

b) Es sei $A = PDQ$ eine Singulärwertzerlegung (siehe Satz 42). Beschreiben Sie x_b^* mit Hilfe dieser Matrix-Zerlegung.

c) Zeigen Sie, daß es genau eine Matrix $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gibt mit $A^+ b = x_b^* b$ für alle b. Beschreiben Sie die Matrix A^+ bei gegebener Zerlegung $A = PDQ$. Zeigen Sie, daß im Fall $m \geq n$ mit $\mathrm{Rang}(A) = n$
$A^+ = (A^t A)^{-1} A^t$ gilt.

5.10. Gegeben sei ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass sowohl das Gesamtschrittverfahren wie auch das Einzelschrittverfahren konvergieren. Wie groß ist jeweils der Spektralradius der Iterationsmatrix?

5.11. Gegeben sei $Ax = b$ mit einer symmetrischen und positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass das Einzelschrittverfahren stets konvergiert.
Hinweis: Warum genügt es, den Fall $a_{ii} = 1$ (für alle i) zu betrachten?

5.12. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei orthogonal. Weiter seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A und es sei $\tilde{A} = T^t A T$. Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum\limits_{i,j}^{n} a_{ij}^2 = \sum\limits_{i,j}^{n} \tilde{a}_{ij}^2$ gilt.
Bemerkung: Diese Aussage ist der Ausgangspunkt für das Jacobi-Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte von A.

Klausur SS 2003 1. Gesucht ist ein stabiles Nährungsverfahren zur Berechnung von

$$f(x) = e^{x^2} - 1$$

für betragsmäß kleine $x \in \mathbb{R}$. Bei der (nährungsweisen) Berechnung von $f(0,01)$ (mit diesem Algorithmus) soll der Fehler kleiner sein als 10^{-10}.
Zur Kontrolle: $f(0,01) = 0,00010000500\ldots$
$f(x) = -1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \approx x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}$
Nun soll der Fehler von $f(0,01)$ kleiner als 10^{-10} sein, damit muss gelten:
$\frac{0{,}01^{2n}}{n!} < 10^{-10} \Rightarrow n \geq 3$.
Damit kann f wie folgt nährungsweise Berechnet werden: $f(x) \approx x^2 + \frac{x^4}{2}$

Klausur SS 2003 2. Welchem Nährungswert für $\sqrt{10}$ erhält man, wenn die entsprechende Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - 10$$

mit einem Schritt vom Newton-Verfahren und dem Startwert $x_0 = 3$ approximiert?
Eigentlich nicht nötig: $\sqrt{10} \approx 3,162278$.
Für das Newton-Verfahren gilt: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Sein nun $x_0 = 3$ so folgt:
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{3^2-10}{2\cdot 3} = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6} = 3,1\overline{6}$

Klausur SS 2003 3. Gegeben sei $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \in [100, 144]$. Sei $p \in P_3$ das Interpolationspolynom zu f an den Stützstellen $x_1 = 100, x_2 = 121, x_3 = 144$.

a) Berechnen Sie $p(120)$. Nur zur Kontrolle: $\frac{19400}{1771} \approx 10,95426$.
Die Interpolation nach Newton liefert, mit $c_k = f[x_1, \ldots, x_k], \qquad k = 1, 2, 3.$

$$c_1 = f[x_1] = f(x_1) = 10$$

$$c_2 = f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 10}{21} = \frac{1}{21}$$

$$c_3 = f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{1}{21}}{44} = \frac{\frac{12-11}{23} - \frac{1}{21}}{44} = -\frac{1}{21 \cdot 22 \cdot 23}$$

$$p(x) = c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)(c_3)) = 10 + (x - 100)\left(\frac{1}{21} - \frac{x - 121}{21 \cdot 22 \cdot 23}\right)$$

$$p(120) = 10 + 20\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{21 \cdot 22 \cdot 23}\right) = \frac{10 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 + 20 \cdot 22 \cdot 23 + 20}{21 \cdot 22 \cdot 23}$$

$$= \frac{10 \cdot 21 \cdot 11 \cdot 23 + 20 \cdot 11 \cdot 23 + 10}{21 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{19400}{1771} \approx 10,95426$$

b) Schätzen Sie den fehler $|\sqrt{120} - p(120)|$ mit Hilfe eines Satzes der Vorlesung ab und vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Fehler.
nur zur Kontrolle: $\sqrt{120} \approx 10,95445$.

$$\forall\ x \in [\min\{x_i\}, \max\{x_i\}]\ \exists\ \xi_x \in [\min\{x_i\}, \max\{x_i\}]\ :\ f(x) - p(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi_x) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

$$\exists\ \xi_x \in [100, 144]\ :\ |\sqrt{120} - p(120)| = \left| \frac{1}{3!} \frac{3}{8\sqrt{\xi_x^5}} \cdot 20 \cdot (-24) \right|$$

$$\Rightarrow |\sqrt{120} - p(120)| \leq \frac{20 \cdot 24}{3!} \frac{3}{8\sqrt{100^5}} = \frac{3}{10^4} = 3 \cdot 10^{-4}$$

Der tatsächliche Fehler beträgt $\approx 1,9 \cdot 10^{-4}$.

Klausur SS 2003 4. Gegeben sei das Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) x^2 \mathrm{d}x$$

a) Bestimmen Sie ein $q \in P_2$ mit $q \neq 0$ und $(q, p) = 0$ für alle $p \in P_1$.

$q = ax + b, p = c$

$$(q,p) = \int_0^1 (ax+b)cx^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (acx^3 + bcx^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{ac}{4}x^4 + \frac{bc}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= \frac{ac}{4} + \frac{bc}{3} = \frac{3ac + 4bc}{12}$$
$$(q,p) = 0 \Leftrightarrow 3ac + 4bc = 0 \Leftrightarrow 3a = -4b \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}b$$

Damit erfüllt $q = 4x - 3$ das Gewünschte. $\square$

b) Bestimmen Sie die Quadraturformel $S_1(f) = a_1 \cdot f(x_1)$, für die $S_1(f) = \int_0^1 f(x)x^2 \mathrm{d}x$ für alle $f \in P_2$ gilt.

$f = ax + b$

$$S_1(f) = \int_0^1 f(x)x^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (ax+b)x^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (ax^3 + bx^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3}\right]_0^1$$
$$= \frac{a}{4} + \frac{b}{3} = \frac{1}{3} f\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}, \qquad x_1 = \frac{3}{4}$$

Klausur SS 2003 5. a) Finden Sie eine explizite Form des Polynoms $p \in P_{21}$ mit $p(0) = 1$ und $p(k) = 0$ für $k \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 10\}$.

$$f(x) = \prod_{k=1}^{10} (x-k)(x+k) = \prod_{k=1}^{10} (x^2 - k^2), \qquad f \in P_{21}$$
$$p(x) := \frac{f(x)}{f(0)} = \frac{\prod_{k=1}^{10} (x^2 - k^2)}{\prod_{k=1}^{10} (-k^2)} = \prod_{k=1}^{10} \frac{x^2 - k^2}{k^2} = \prod_{k=1}^{10} \left(\frac{x^2}{k^2} - 1\right), \qquad p \in P_{21}$$

b) Schätzen Sie $p(11)$ ab. Hier genügt eine relativ grobe Abschätzung. Sie können z.B. die grob genährten Werte $21! \approx 5 \cdot 10^{19}$ und $(10!)^2 \approx 10^{13}$ benützen.

$$p(11) = \prod_{k=1}^{10} \frac{11^2 - k^2}{k^2} = \frac{1}{10!^2} \prod_{k=1}^{10} (11-k)(11+k) = \frac{1}{10!^2} \prod_{k=1}^{21} k = \frac{21!}{11 \cdot 10!^2}$$
$$\approx \frac{5 \cdot 10^{19}}{11 \cdot 10^{13}} \approx 4,5 \cdot 10^5 \qquad \text{(exakter Wert: 352716)}$$