Organisatorisches

- Die Prüfungs-Klausur findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00, in Döbereiner Hörsaal statt.

Organisatorisches

- Die Prüfungs-Klausur findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00, in Döbereiner Hörsaal statt.
- Das Bonus-Blatt soll am Mo 03.12 abgegeben werden

Organisatorisches

- Die Prüfungs-Klausur findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00, in Döbereiner Hörsaal statt.
- Das Bonus-Blatt soll am Mo 03.12 abgegeben werden
- Kleines Hausaufgabenblatt 6 steht in Netz

Organisatorisches

- Die Prüfungs-Klausur findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00, in Döbereiner Hörsaal statt.
- Das Bonus-Blatt soll am Mo 03.12 abgegeben werden
- Kleines Hausaufgabenblatt 6 steht in Netz
- Bitte nicht durch zwei verschiedenen Numerierungsarten in meinen Vorlesungen und in der von Dr. Fricke sich verwirren lassen.

Wiederholung Def. 11

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel,

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt,

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f,

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal:

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl,

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \vdots q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \vdots q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14:

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \,\vdots\, q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$.

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \vdots q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \vdots q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8:

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \,\vdots\, q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8: *Seien $f, g \in \mathbb{Z}$, $(f, g) \neq (0, 0)$.*

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \vdots q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8: *Seien* $f, g \in \mathbb{Z}$, $(f, g) \neq (0, 0)$. *Dann gilt:*

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \,\vdots\, q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8: *Seien $f, g \in \mathbb{Z}$, $(f, g) \neq (0, 0)$. Dann gilt: $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ s.d. $af + bg = ggT(f, g)$.*

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \vdots q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8: *Seien $f, g \in \mathbb{Z}$, $(f, g) \neq (0, 0)$. Dann gilt: $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ s.d. $af + bg = ggT(f, g)$.*

Wiederholung: Def. 39

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \vdots q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8: *Seien $f, g \in \mathbb{Z}$, $(f, g) \neq (0, 0)$. Dann gilt: $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ s.d. $af + bg = ggT(f, g)$.*

Wiederholung: Def. 39 Sei $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel.

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \vdots q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8: *Seien $f, g \in \mathbb{Z}$, $(f, g) \neq (0, 0)$. Dann gilt: $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ s.d. $af + bg = ggT(f, g)$.*

Wiederholung: Def. 39 Sei $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel. Zwei Polynome $g, h \in \mathbb{K}[x]$ sind äquivalent mod f

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \,\vdots\, q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8: *Seien $f, g \in \mathbb{Z}$, $(f, g) \neq (0, 0)$. Dann gilt: $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ s.d. $af + bg = ggT(f, g)$.*

Wiederholung: Def. 39 Sei $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel. Zwei Polynome $g, h \in \mathbb{K}[x]$ sind äquivalent mod f (schreibweise: $g \equiv h \pmod{f}$),

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \,\vdots\, q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8: *Seien* $f, g \in \mathbb{Z}$, $(f, g) \neq (0, 0)$. *Dann gilt:* $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ *s.d.* $af + bg = ggT(f, g)$.

Wiederholung: Def. 39 Sei $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel. Zwei Polynome $g, h \in \mathbb{K}[x]$ sind äquivalent mod f (schreibweise: $g \equiv h \pmod{f}$), falls f das Polynom $g - h$ teilt.

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \,\vdots\, q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8: *Seien $f, g \in \mathbb{Z}$, $(f, g) \neq (0, 0)$. Dann gilt: $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ s.d. $af + bg = ggT(f, g)$.*

Wiederholung: Def. 39 Sei $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel. Zwei Polynome $g, h \in \mathbb{K}[x]$ sind äquivalent mod f (schreibweise: $g \equiv h \pmod f$), falls f das Polynom $g - h$ teilt.

Vergleichen Sie mit Wicht. Bsp: (Zyklische Gruppen) (Vorl 7)

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \vdots q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8: *Seien $f, g \in \mathbb{Z}$, $(f, g) \neq (0, 0)$. Dann gilt: $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ s.d. $af + bg = ggT(f, g)$.*

Wiederholung: Def. 39 Sei $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel. Zwei Polynome $g, h \in \mathbb{K}[x]$ sind äquivalent mod f (schreibweise: $g \equiv h \pmod{f}$), falls f das Polynom $g - h$ teilt.

Vergleichen Sie mit Wicht. Bsp: (Zyklische Gruppen) (Vorl 7) Sei $q \in \mathbb{N}$.

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \,\vdots\, q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8: *Seien $f, g \in \mathbb{Z}$, $(f, g) \neq (0, 0)$. Dann gilt: $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ s.d. $af + bg = ggT(f, g)$.*

Wiederholung: Def. 39 Sei $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel. Zwei Polynome $g, h \in \mathbb{K}[x]$ sind äquivalent mod f (schreibweise: $g \equiv h \pmod{f}$), falls f das Polynom $g - h$ teilt.

Vergleichen Sie mit Wicht. Bsp: (Zyklische Gruppen) (Vorl 7) Sei $q \in \mathbb{N}$. Dann $a \equiv b \pmod{q}$

Vorsetzung der Vorlesung von Dr. Fricke

Wiederholung Def. 11 Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ heißt irreduzibel, falls es kein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $0 < grad(g) < grad(f)$ gibt, s.d. g teilt f, d.h. s.d. $f = h \cdot g$, wobei $h \in \mathbb{K}[x]$.

Nicht Formal: Irreduzible Polynome spielen die Rolle vom Primzahlen

Schuldefinition Eine Zahl p heißt Primzahl, falls aus $p \, \vdots \, q$ für $q \in \mathbb{N}$ folgt $q = 1$ oder $q = p$.

Wiederholung Satz 14/Beweis von Satz 14: Zu je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$ gibt es $ggT(f, g)$. Ferner gilt: es gibt $a, b \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $ggT(f, g) = a \cdot f + b \cdot g$.

Vergleichen Sie mit Satz 18 aus Vorl. 8: *Seien $f, g \in \mathbb{Z}$, $(f, g) \neq (0, 0)$. Dann gilt: $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ s.d. $af + bg = ggT(f, g)$.*

Wiederholung: Def. 39 Sei $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel. Zwei Polynome $g, h \in \mathbb{K}[x]$ sind äquivalent mod f (schreibweise: $g \equiv h \pmod{f}$), falls f das Polynom $g - h$ teilt.

Vergleichen Sie mit Wicht. Bsp: (Zyklische Gruppen) (Vorl 7) Sei $q \in \mathbb{N}$. Dann $a \equiv b \pmod{q} \iff a - b \, \vdots \, q$.

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$,

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \,\vdots\, f$

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots\ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$,

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$,

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod f$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod f$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod f$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$,

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \;\vdots\; f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv:

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \;\vdots\; f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$,

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \,\vdots\, f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$,

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod f$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod f$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod f$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod f$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod f$.

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod f$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod f$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod f$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod f$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod f$.

Def. 39 – Vorsetzung

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \; \vdots \; f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod{f}$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen.

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod f$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod f$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \;\vdots\; f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod f$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod f$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod f$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod{f}$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.

Frage

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod f$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod f$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \,\vdots\, f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod f$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod f$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod f$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.
Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots\ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod{f}$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.
Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?
Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod{f}$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.
Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?
Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:
$[h] + [g] := [h + g]$

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \;\vdots\; f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod{f}$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.
Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?
Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:
$[h] + [g] := [h + g]$
$[h] \cdot [g] := [h \cdot g]$.

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod f$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod f$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \,\vdots\, f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod f$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod f$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod f$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.
Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?
Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:
$[h] + [g] := [h + g]$
$[h] \cdot [g] := [h \cdot g]$.
Bemerkung:

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod{f}$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.

Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?

Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:

$[h] + [g] := [h + g]$

$[h] \cdot [g] := [h \cdot g]$.

Bemerkung: $+$ und $\cdot$ sind wohldefiniert:

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod{f}$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_\equiv$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.

Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?

Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:

$[h] + [g] := [h + g]$

$[h] \cdot [g] := [h \cdot g]$.

Bemerkung: $+$ und $\cdot$ sind wohldefiniert: Beweis wie in Vorl. 8 für $\equiv \pmod{q}$.

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots\ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod{f}$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_\equiv$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.
Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?
Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:
$[h] + [g] := [h + g]$
$[h] \cdot [g] := [h \cdot g]$.
Bemerkung: $+$ und $\cdot$ sind wohldefiniert: Beweis wie in Vorl. 8 für $\equiv \pmod{q}$. Ferner gilt:

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \;\vdots\; f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod{f}$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.
Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?
Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:
$[h] + [g] := [h + g]$
$[h] \cdot [g] := [h \cdot g]$.
Bemerkung: $+$ und $\cdot$ sind wohldefiniert: Beweis wie in Vorl. 8 für $\equiv \pmod{q}$. Ferner gilt: $\mathbb{K}[f]$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement $[1]$

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod f$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod f$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots\ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod f$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod f$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod f$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.
Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?
Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:
$[h] + [g] := [h + g]$
$[h] \cdot [g] := [h \cdot g]$.
Bemerkung: $+$ und $\cdot$ sind wohldefiniert: Beweis wie in Vorl. 8 für $\equiv$ $(\mathrm{mod}\ q)$. Ferner gilt: $\mathbb{K}[f]$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement $[1]$ (Beweis ist wie für $\mathbb{Z}_q$).

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod f$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod f$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod f$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod f$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod f$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.
Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?
Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:
$[h] + [g] := [h + g]$
$[h] \cdot [g] := [h \cdot g]$.
Bemerkung: $+$ und $\cdot$ sind wohldefiniert: Beweis wie in Vorl. 8 für $\equiv \pmod q$. Ferner gilt: $\mathbb{K}[f]$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement $[1]$ (Beweis ist wie für $\mathbb{Z}_q$).
Satz 40

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod{f}$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.
Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?
Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:
$[h] + [g] := [h + g]$
$[h] \cdot [g] := [h \cdot g]$.
Bemerkung: $+$ und $\cdot$ sind wohldefiniert: Beweis wie in Vorl. 8 für $\equiv \pmod{q}$. Ferner gilt: $\mathbb{K}[f]$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement $[1]$ (Beweis ist wie für $\mathbb{Z}_q$).
Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel,

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod f$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod f$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \; \vdots \; f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod f$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod f$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod f$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.

Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?

Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:

$[h] + [g] := [h + g]$

$[h] \cdot [g] := [h \cdot g]$.

Bemerkung: $+$ und $\cdot$ sind wohldefiniert: Beweis wie in Vorl. 8 für $\equiv \pmod q$. Ferner gilt: $\mathbb{K}[f]$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement $[1]$ (Beweis ist wie für $\mathbb{Z}_q$).

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \ \vdots \ f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod{f}$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_{\equiv}$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.
Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?
Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:
$[h] + [g] := [h + g]$
$[h] \cdot [g] := [h \cdot g]$.
Bemerkung: $+$ und $\cdot$ sind wohldefiniert: Beweis wie in Vorl. 8 für $\equiv \pmod{q}$. Ferner gilt: $\mathbb{K}[f]$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement $[1]$ (Beweis ist wie für $\mathbb{Z}_q$).
Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.
Vergleichen Sie mit Satz 20 aus Vorl. 8:

Bemerkung: Die Relation $\equiv \pmod{f}$ auf $\mathbb{K}[x]$ ist eine Äquivalenzrelation:

- Reflexiv: $g \equiv g \pmod{f}$, da $g - g = 0 = 0 \cdot f \;\vdots\; f$
- Symmetrisch: ist $g \equiv h \pmod{f}$, so ist $g - h = q \cdot f$, so ist $h - g = -q \cdot f$, so ist $h \equiv g \pmod{f}$.
- Transitiv: Ist $g - h = q_1 \cdot f$ und $h - e = q_2 \cdot f$, so ist $g - e = (q_1 + q_2) \cdot f$, also $q \equiv e \pmod{f}$.

Def. 39 – Vorsetzung Die Menge von Äquivalenzklassen $\mathbb{K}[x]/_\equiv$ bzgl. $\equiv$ (mod. f) werden wir mit $\mathbb{K}[f]$ bezeichnen. Äquivalenzklass von $g \in \mathbb{K}[f]$ wird $[g]$ bezeichnet.
Frage Welche Struktur erbt $\mathbb{K}[f]$?
Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{K}[f]$:
$[h] + [g] := [h + g]$
$[h] \cdot [g] := [h \cdot g]$.
Bemerkung: $+$ und $\cdot$ sind wohldefiniert: Beweis wie in Vorl. 8 für $\equiv \pmod{q}$. Ferner gilt: $\mathbb{K}[f]$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement $[1]$ (Beweis ist wie für $\mathbb{Z}_q$).
Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.
Vergleichen Sie mit Satz 20 aus Vorl. 8: Ist q eine Primzahl, so ist $(\mathbb{Z}_q, \overset{\mathrm{mod}\ p}{\cdot}, \overset{\mathrm{mod}\ p}{+})$ ein Körper

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.
Beweis von Satz 40:

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$,

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$, $[g] \neq [0]$ invertierbar ist.

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x], \; [g] \neq [0]$ invertierbar ist.

Sei $g \in \mathbb{K}[x]$.

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$, $[g] \neq [0]$ invertierbar ist.

Sei $g \in \mathbb{K}[x]$. Da f irreduzibel ist,

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$, $[g] \neq [0]$ invertierbar ist.

Sei $g \in \mathbb{K}[x]$. Da f irreduzibel ist, ist

$$ggT(f,g) = \begin{cases} f & \text{falls } g \,\vdots\, f \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$, $[g] \neq [0]$ invertierbar ist.

Sei $g \in \mathbb{K}[x]$. Da f irreduzibel ist, ist

$$ggT(f,g) = \begin{cases} f & \text{falls } g \vdots f \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Ist $ggT(f,g) = f$,

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$, $[g] \neq [0]$ invertierbar ist.

Sei $g \in \mathbb{K}[x]$. Da f irreduzibel ist, ist

$$ggT(f,g) = \begin{cases} f & \text{falls } g \vdots f \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist $ggT(f,g) = f$, so $g \vdots f$, also $g - f = f \cdot h$, also $[g] = [0]$.

Ist $ggT(f,g) = 1$,

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.
Beweis von Satz 40:
Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$, $[g] \neq [0]$ invertierbar ist.
Sei $g \in \mathbb{K}[x]$. Da f irreduzibel ist, ist
$$ggT(f, g) = \begin{cases} f & \text{falls } g \vdots f \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$
Ist $ggT(f, g) = f$, so $g \vdots f$, also $g - f = f \cdot h$, also $[g] = [0]$.
Ist $ggT(f, g) = 1$, so können wir ein inverses Element $[a]$ zu $[g]$ konstruieren:

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$, $[g] \neq [0]$ invertierbar ist.

Sei $g \in \mathbb{K}[x]$. Da f irreduzibel ist, ist

$$ggT(f, g) = \begin{cases} f & \text{falls } g \,\vdots\, f \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist $ggT(f, g) = f$, so $g \,\vdots\, f$, also $g - f = f \cdot h$, also $[g] = [0]$.

Ist $ggT(f, g) = 1$, so können wir ein inverses Element $[a]$ zu $[g]$ konstruieren:

Nach Satz 14 (Vorl. 9) gibt es $a, b \in \mathbb{K}[x]$

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.
Beweis von Satz 40:
Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$, $[g] \neq [0]$ invertierbar ist.
Sei $g \in \mathbb{K}[x]$. Da f irreduzibel ist, ist

$$ggT(f, g) = \begin{cases} f & \text{falls } g \vdots f \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist $ggT(f, g) = f$, so $g \vdots f$, also $g - f = f \cdot h$, also $[g] = [0]$.
Ist $ggT(f, g) = 1$, so können wir ein inverses Element $[a]$ zu $[g]$ konstruieren:
Nach Satz 14 (Vorl. 9) gibt es $a, b \in \mathbb{K}[x]$ mit $ag + bf = 1$.

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$, $[g] \neq [0]$ invertierbar ist.

Sei $g \in \mathbb{K}[x]$. Da f irreduzibel ist, ist
$ggT(f,g) = \begin{cases} f & \text{falls } g \vdots f \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$.

Ist $ggT(f,g) = f$, so $g \vdots f$, also $g - f = f \cdot h$, also $[g] = [0]$.

Ist $ggT(f,g) = 1$, so können wir ein inverses Element $[a]$ zu $[g]$ konstruieren:

Nach Satz 14 (Vorl. 9) gibt es $a, b \in \mathbb{K}[x]$ mit $ag + bf = 1$.

Dann ist $[ag + bf] = [1]$.

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$, $[g] \neq [0]$ invertierbar ist.

Sei $g \in \mathbb{K}[x]$. Da f irreduzibel ist, ist
$$ggT(f,g) = \begin{cases} f & \text{falls } g \,\vdots\, f \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$
Ist $ggT(f,g) = f$, so $g \,\vdots\, f$, also $g - f = f \cdot h$, also $[g] = [0]$.
Ist $ggT(f,g) = 1$, so können wir ein inverses Element $[a]$ zu $[g]$ konstruieren:

Nach Satz 14 (Vorl. 9) gibt es $a, b \in \mathbb{K}[x]$ mit $ag + bf = 1$.
Dann ist $[ag + bf] = [1]$. Also $[a] \cdot [g] + [b] \cdot [0] = [1]$.

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x], \ [g] \neq [0]$ invertierbar ist.

Sei $g \in \mathbb{K}[x]$. Da f irreduzibel ist, ist

$$ggT(f, g) = \begin{cases} f & \text{falls } g \ \vdots \ f \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist $ggT(f, g) = f$, so $g \ \vdots \ f$, also $g - f = f \cdot h$, also $[g] = [0]$.

Ist $ggT(f, g) = 1$, so können wir ein inverses Element $[a]$ zu $[g]$ konstruieren:

Nach Satz 14 (Vorl. 9) gibt es $a, b \in \mathbb{K}[x]$ mit $ag + bf = 1$.

Dann ist $[ag + bf] = [1]$. Also $[a] \cdot [g] + [b] \cdot [0] = [1]$. Also ist $[a] \cdot [g] = [1]$,

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$, $[g] \neq [0]$ invertierbar ist.

Sei $g \in \mathbb{K}[x]$. Da f irreduzibel ist, ist

$$ggT(f,g) = \begin{cases} f & \text{falls } g \,\vdots\, f \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist $ggT(f,g) = f$, so $g \,\vdots\, f$, also $g - f = f \cdot h$, also $[g] = [0]$.

Ist $ggT(f,g) = 1$, so können wir ein inverses Element $[a]$ zu $[g]$ konstruieren:

Nach Satz 14 (Vorl. 9) gibt es $a, b \in \mathbb{K}[x]$ mit $ag + bf = 1$.

Dann ist $[ag + bf] = [1]$. Also $[a] \cdot [g] + [b] \cdot [0] = [1]$. Also ist $[a] \cdot [g] = [1]$, $\square$.

Satz 40 Ist $f \in \mathbb{K}[x]$ irreduzibel, so ist ist $(\mathbb{K}[f], +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis von Satz 40:

Wir müssen zeigen, dass jedes $[g] \in \mathbb{K}[x]$, $[g] \neq [0]$ invertierbar ist.

Sei $g \in \mathbb{K}[x]$. Da f irreduzibel ist, ist
$$ggT(f,g) = \begin{cases} f & \text{falls } g \vdots f \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$
Ist $ggT(f,g) = f$, so $g \vdots f$, also $g - f = f \cdot h$, also $[g] = [0]$.
Ist $ggT(f,g) = 1$, so können wir ein inverses Element $[a]$ zu $[g]$ konstruieren:

Nach Satz 14 (Vorl. 9) gibt es $a, b \in \mathbb{K}[x]$ mit $ag + bf = 1$.
Dann ist $[ag + bf] = [1]$. Also $[a] \cdot [g] + [b] \cdot [0] = [1]$. Also ist $[a] \cdot [g] = [1]$, $\square$.

Bemerkung: Beweis von Satz 40 ist analog zum Beweis von Satz 20.

Abschnitt 2: Vektorräume

Logic des Abschnitts: „synthetische Aufbau“

- Definition

Logic des Abschnitts: „synthetische Aufbau“

- Definition
- Einige Eigenschaften und eine grosse Familie von Bsple ($\mathbb{K}^n$)

Logic des Abschnitts: „synthetische Aufbau“

- Definition
- Einige Eigenschaften und eine grosse Familie von Bsple ($\mathbb{K}^n$)
- Eine Aussage, dass alle Vektorräumen die Vektorräumen aus der Familie von Bsple sind

Logic des Abschnitts: „synthetische Aufbau“

- Definition
- Einige Eigenschaften und eine grosse Familie von Bsple ($\mathbb{K}^n$)
- Eine Aussage, dass alle Vektorräumen die Vektorräumen aus der Familie von Bsple sind (bis zum Isomophismen) sind

Definition

Definition

Def 17:

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1).

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung
$\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
$(\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung
$\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v)$

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
$(\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w)$

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung
$\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

(V4) $1v = v$

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

(V4) $1v = v$ (, wobei 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet)

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

(V4) $1v = v$ (, wobei 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet)

Sprechweisen und Bezeichnungen:

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
$(\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

(V4) $1v = v$ (, wobei 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet)

Sprechweisen und Bezeichnungen:
"Punkt vor Strich" $\lambda v + \mu w :=$

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
$(\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

(V4) $1v = v$ (, wobei 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet)

Sprechweisen und Bezeichnungen:
"Punkt vor Strich" $\lambda v + \mu w := (\lambda v) + (\mu w)$,

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

(V4) $1v = v$ (, wobei 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet)

Sprechweisen und Bezeichnungen:
"Punkt vor Strich" $\lambda v + \mu w := (\lambda v) + (\mu w)$, außerdem $-v$ sei inverses Element zu v in $(V, +)$.

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

(V4) $1v = v$ (, wobei 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet)

Sprechweisen und Bezeichnungen:
"Punkt vor Strich" $\lambda v + \mu w := (\lambda v) + (\mu w)$, außerdem $-v$ sei inverses Element zu v in $(V, +)$.
Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

(V4) $1v = v$ (, wobei 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet)

Sprechweisen und Bezeichnungen:
"Punkt vor Strich" $\lambda v + \mu w := (\lambda v) + (\mu w)$, außerdem $-v$ sei inverses Element zu v in $(V, +)$.
Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ $=$ $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
$(\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

(V4) $1v = v$ (, wobei 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet)

Sprechweisen und Bezeichnungen:
"Punkt vor Strich" $\lambda v + \mu w := (\lambda v) + (\mu w)$, außerdem $-v$ sei inverses Element zu v in $(V, +)$.
Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ $=$ $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Das neutrale Element von $(V, +)$ wird (zunächst) mit $\vec{0}$ bezeichnet,

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

(V4) $1v = v$ (, wobei 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet)

Sprechweisen und Bezeichnungen:
"Punkt vor Strich" $\lambda v + \mu w := (\lambda v) + (\mu w)$, außerdem $-v$ sei inverses Element zu v in $(V, +)$.
Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ = $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Das neutrale Element von $(V, +)$ wird (zunächst) mit $\vec{0}$ bezeichnet, zur Unterscheidung vom neutralen Element 0 von $(\mathbb{K}, +)$.

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K},+,\cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V,+)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
($\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

(V4) $1v = v$ (, wobei 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet)

Sprechweisen und Bezeichnungen:
"Punkt vor Strich" $\lambda v + \mu w := (\lambda v) + (\mu w)$, außerdem $-v$ sei inverses Element zu v in $(V,+)$.
Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ = $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Das neutrale Element von $(V,+)$ wird (zunächst) mit $\vec{0}$ bezeichnet, zur Unterscheidung vom neutralen Element 0 von $(\mathbb{K},+)$.
Elemente von V werden "Vektoren" genannt,

Definition

Def 17: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper (mit Einselement 1). Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist eine abel'sche Gruppe $(V, +)$ zusammen mit einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
$(\bullet(\lambda, v)$ wird $\lambda \bullet v$ oder sogar λv geschrieben),
sodass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in V$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (=: \lambda\mu v)$

(V2) $(\lambda + \mu)v = (\lambda v) + (\mu v) \quad (=: \lambda v + \mu v)$

(V3) $\lambda(v + w) = (\lambda v) + (\lambda w) \quad (=: \lambda v + \lambda w)$

(V4) $1v = v$ (, wobei 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ bezeichnet)

Sprechweisen und Bezeichnungen:
"Punkt vor Strich" $\lambda v + \mu w := (\lambda v) + (\mu w)$, außerdem $-v$ sei inverses Element zu v in $(V, +)$.
Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ = $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Das neutrale Element von $(V, +)$ wird (zunächst) mit $\vec{0}$ bezeichnet, zur Unterscheidung vom neutralen Element 0 von $(\mathbb{K}, +)$.
Elemente von V werden "Vektoren" genannt, Elemente des Körpers werden "Skalare" genannt.

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,
- und dann beweisen dass die Eigenschaften (V1—V4) erfüllt sind.

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,
- und dann beweisen dass die Eigenschaften (V1—V4) erfüllt sind.

Bsp: Trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V,+)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,
- und dann beweisen dass die Eigenschaften (V1—V4) erfüllt sind.

Bsp: Trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- V sei die triviale Gruppe aus Vorl. 3.

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,
- und dann beweisen dass die Eigenschaften (V1—V4) erfüllt sind.

Bsp: Trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- V sei die triviale Gruppe aus Vorl. 3. (Besteht aus einem Element $\vec{0}$ (also $V = \{\vec{0}\}$)

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,
- und dann beweisen dass die Eigenschaften (V1—V4) erfüllt sind.

Bsp: Trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- V sei die triviale Gruppe aus Vorl. 3. (Besteht aus einem Element $\vec{0}$ (also $V = \{\vec{0}\}$) mit der Addition $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$)

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$

Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,
- und dann beweisen dass die Eigenschaften (V1—V4) erfüllt sind.

Bsp: Trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- V sei die triviale Gruppe aus Vorl. 3. (Besteht aus einem Element $\vec{0}$ (also $V = \{\vec{0}\}$) mit der Addition $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$)
- Die Multiplikation $\bullet$ ist wie folgt.

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V,+)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,
- und dann beweisen dass die Eigenschaften (V1—V4) erfüllt sind.

Bsp: Trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- V sei die triviale Gruppe aus Vorl. 3. (Besteht aus einem Element $\vec{0}$ (also $V = \{\vec{0}\}$) mit der Addition $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$)
- Die Multiplikation $\bullet$ ist wie folgt. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda \bullet \vec{0} := \vec{0}$.

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,
- und dann beweisen dass die Eigenschaften (V1—V4) erfüllt sind.

Bsp: Trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- V sei die triviale Gruppe aus Vorl. 3. (Besteht aus einem Element $\vec{0}$ (also $V = \{\vec{0}\}$) mit der Addition $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$)
- Die Multiplikation $\bullet$ ist wie folgt. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda \bullet \vec{0} := \vec{0}$.
- **Eigenschaften (V1–V4)**:

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,
- und dann beweisen dass die Eigenschaften (V1—V4) erfüllt sind.

Bsp: Trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- V sei die triviale Gruppe aus Vorl. 3. (Besteht aus einem Element $\vec{0}$ (also $V = \{\vec{0}\}$) mit der Addition $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$)
- Die Multiplikation $\bullet$ ist wie folgt. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda \bullet \vec{0} := \vec{0}$.
- **Eigenschaften (V1–V4)**:

(V1) $\lambda(\mu\vec{0}) = (\lambda\mu)\vec{0} = \vec{0}$

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$

Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,
- und dann beweisen dass die Eigenschaften (V1—V4) erfüllt sind.

Bsp: Trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- V sei die triviale Gruppe aus Vorl. 3. (Besteht aus einem Element $\vec{0}$ (also $V = \{\vec{0}\}$) mit der Addition $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$)
- Die Multiplikation $\bullet$ ist wie folgt. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda \bullet \vec{0} := \vec{0}$.
- **Eigenschaften (V1–V4)**:

(V1) $\lambda(\mu\vec{0}) = (\lambda\mu)\vec{0} = \vec{0}$
(V2) $\vec{0} = (\lambda + \mu)\vec{0} = (\lambda\vec{0}) + (\mu\vec{0}) = \vec{0}$

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,
- und dann beweisen dass die Eigenschaften (V1—V4) erfüllt sind.

Bsp: Trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- V sei die triviale Gruppe aus Vorl. 3. (Besteht aus einem Element $\vec{0}$ (also $V = \{\vec{0}\}$) mit der Addition $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$)
- Die Multiplikation $\bullet$ ist wie folgt. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda \bullet \vec{0} := \vec{0}$.
- **Eigenschaften (V1–V4)**:

(V1) $\lambda(\mu\vec{0}) = (\lambda\mu)\vec{0} = \vec{0}$
(V2) $\vec{0} = (\lambda + \mu)\vec{0} = (\lambda\vec{0}) + (\mu\vec{0}) = \vec{0}$
(V3) $\lambda(\vec{0} + \vec{0}) = (\lambda\vec{0}) + (\lambda\vec{0})$

Beispiele von Vektorräumen: trivialer Vektorraum

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einer abel'schen Gruppe $(V, +)$ und einer Abbildung $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$
Um einen Vektorraum anzugeben, muß man

- eine abel'sche Gruppe und die Abbildung $\bullet$ beschreiben,
- und dann beweisen dass die Eigenschaften (V1—V4) erfüllt sind.

Bsp: Trivialer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- V sei die triviale Gruppe aus Vorl. 3. (Besteht aus einem Element $\vec{0}$ (also $V = \{\vec{0}\}$) mit der Addition $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$)
- Die Multiplikation $\bullet$ ist wie folgt. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda \bullet \vec{0} := \vec{0}$.
- **Eigenschaften (V1–V4)**:

(V1) $\lambda(\mu\vec{0}) = (\lambda\mu)\vec{0} = \vec{0}$
(V2) $\vec{0} = (\lambda + \mu)\vec{0} = (\lambda\vec{0}) + (\mu\vec{0}) = \vec{0}$
(V3) $\lambda(\vec{0} + \vec{0}) = (\lambda\vec{0}) + (\lambda\vec{0})$
(V4) $1\vec{0} = \vec{0}$

Hauptbspl: Bsp: Vektorraum $\mathbb{K}^n$.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper

Hauptbspl: Bsp: Vektorraum $\mathbb{K}^n$.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit Einselement 1, und neutrales Element bzgl. „$+$“ 0)

Hauptbspl: Bsp: Vektorraum $\mathbb{K}^n$.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit Einselement 1, und neutrales Element bzgl. „$+$“ 0) und $n \in \mathbb{N}$.

Hauptbspl: Bsp: Vektorraum $\mathbb{K}^n$.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit Einselement 1, und neutrales Element bzgl. „$+$“ 0) und $n \in \mathbb{N}$.

Wiederholung Vorl. 2

Hauptbspl: Bsp: Vektorraum $\mathbb{K}^n$.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit Einselement 1, und neutrales Element bzgl. „$+$“ 0) und $n \in \mathbb{N}$.

Wiederholung Vorl. 2 $\mathbb{K}^n$ ist die Menge $\underbrace{\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}))\ldots))}_{n \text{ Stück}}$.

Hauptbspl: Bsp: Vektorraum $\mathbb{K}^n$.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit Einselement 1, und neutrales Element bzgl. „$+$“ 0) und $n \in \mathbb{N}$.

Wiederholung Vorl. 2 $\mathbb{K}^n$ ist die Menge $\underbrace{\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}))\ldots))}_{n \text{ Stück}}$.

Die Elemente von $\mathbb{K}^n$ sind $n-$Tupel von Elementen aus K

Hauptbspl: Bsp: Vektorraum $\mathbb{K}^n$.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit Einselement 1, und neutrales Element bzgl. „$+$“ 0) und $n \in \mathbb{N}$.

Wiederholung Vorl. 2 $\mathbb{K}^n$ ist die Menge $\underbrace{\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K}))...))}_{n \text{ Stück}}$.

Die Elemente von $\mathbb{K}^n$ sind $n-$Tupel von Elementen aus K (wir werden sie senkrecht schreiben.)

Hauptbspl: Bsp: Vektorraum $\mathbb{K}^n$.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit Einselement 1, und neutrales Element bzgl. „$+$“ 0) und $n \in \mathbb{N}$.
Wiederholung Vorl. 2 $\mathbb{K}^n$ ist die Menge $\underbrace{\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K}))...))}_{n \text{ Stück}}$.

Die Elemente von $\mathbb{K}^n$ sind $n-$Tupel von Elementen aus K (wir werden sie senkrecht schreiben.)

v

Hauptbspl: Bsp: Vektorraum $\mathbb{K}^n$.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit Einselement 1, und neutrales Element bzgl. „$+$“ 0) und $n \in \mathbb{N}$.

Wiederholung Vorl. 2 $\mathbb{K}^n$ ist die Menge $\underbrace{\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \times (\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}))\ldots))}_{n \text{ Stück}}$.

Die Elemente von $\mathbb{K}^n$ sind $n-$Tupel von Elementen aus K (wir werden sie senkrecht schreiben.)

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ wobei } x_i \in \mathbb{K}.$$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$,

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} :=$$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right)$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix}$$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

(G2) $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element in $\mathbb{K}^n$:

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

(G2) $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

(G2) $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(G3) $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ ist das Inverses zu $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

(G2) $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(G3) $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ ist das Inverses zu $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} :=$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

(G2) $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(G3) $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ ist das Inverses zu $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ \vdots \\ -x_n + x_n \end{pmatrix} =$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

(G2) $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(G3) $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ ist das Inverses zu $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ \vdots \\ -x_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

(G2) $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(G3) $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ ist das Inverses zu $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ \vdots \\ -x_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$

(G4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

(G2) $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(G3) $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ ist das Inverses zu $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ \vdots \\ -x_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(G4) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

(G2) $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(G3) $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ ist das Inverses zu $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ \vdots \\ -x_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$

(G4) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} =$$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als eine abel'sche Gruppe

Wir definieren zuerst eine Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{K}^n$, und dann zeigen, dass $(\mathbb{K}^n, +)$ eine abel'sche Gruppe ist.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

(G1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

(G2) $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(G3) $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ ist das Inverses zu $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 \\ \vdots \\ -x_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(G4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

$(\mathbb{K}^n, +)$ als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Wir definieren $\bullet$ auf $\mathbb{K}^n$:

$(\mathbb{K}^n, +)$ als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Wir definieren $\bullet$ auf $\mathbb{K}^n$: für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Wir definieren $\bullet$ auf $\mathbb{K}^n$: für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sei

$$\lambda \bullet v = \lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} :=$$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Wir definieren $\bullet$ auf $\mathbb{K}^n$: für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sei

$$\lambda \bullet v = \lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Wir definieren $\bullet$ auf $\mathbb{K}^n$: für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sei

$$\lambda \bullet v = \lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Wir müssen jetzt Eigenschaften (V1 – V4) beweisen;

$(\mathbb{K}^n, +)$ als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Wir definieren $\bullet$ auf $\mathbb{K}^n$: für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sei

$$\lambda \bullet v = \lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Wir müssen jetzt Eigenschaften (V1 – V4) beweisen; wir werden dies nur für $\mathbb{K}^2$ tun;

$(\mathbb{K}^n, +)$ als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Wir definieren $\bullet$ auf $\mathbb{K}^n$: für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sei

$$\lambda \bullet v = \lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Wir müssen jetzt Eigenschaften (V1 – V4) beweisen; wir werden dies nur für $\mathbb{K}^2$ tun; beweis für $\mathbb{K}^n$ ist analog.

$(\mathbb{K}^n, +)$ als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Wir definieren $\bullet$ auf $\mathbb{K}^n$: für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sei

$$\lambda \bullet v = \lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Wir müssen jetzt Eigenschaften (V1 – V4) beweisen; wir werden dies nur für $\mathbb{K}^2$ tun; beweis für $\mathbb{K}^n$ ist analog. Unten stets

$$v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix},$$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Wir definieren $\bullet$ auf $\mathbb{K}^n$: für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sei

$$\lambda \bullet v = \lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Wir müssen jetzt Eigenschaften (V1 – V4) beweisen; wir werden dies nur für $\mathbb{K}^2$ tun; beweis für $\mathbb{K}^n$ ist analog. Unten stets

$$v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix},$$

$(\mathbb{K}^n, +)$ als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Wir definieren $\bullet$ auf $\mathbb{K}^n$: für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sei

$$\lambda \bullet v = \lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Wir müssen jetzt Eigenschaften (V1 – V4) beweisen; wir werden dies nur für $\mathbb{K}^2$ tun; beweis für $\mathbb{K}^n$ ist analog. Unten stets $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ Vektoren ,

$(\mathbb{K}^n, +)$ als ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Wir definieren $\bullet$ auf $\mathbb{K}^n$: für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sei

$$\lambda \bullet v = \lambda v = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Wir müssen jetzt Eigenschaften (V1 – V4) beweisen; wir werden dies nur für $\mathbb{K}^2$ tun; beweis für $\mathbb{K}^n$ ist analog. Unten stets $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ Vektoren , $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ Skalaren.

(V1)

(V1)

Z.z.:

(V1)

Z.z.: $\lambda(\mu \, v)$

(V1)

Z.z.: $\lambda(\mu\, v) = (\lambda\mu)v$.
Tatsächlich, $\lambda(\mu v)$

Z.z.: $\lambda(\mu\, v) = (\lambda\mu)v$.
Tatsächlich, $\lambda(\mu v)$
$= \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \right)$

(V1)

Z.z.: $\lambda(\mu\, v) = (\lambda\mu)v$.
Tatsächlich, $\lambda(\mu v)$
$$= \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix}$$

(V1)

Z.z.: $\lambda(\mu\, v) = (\lambda\mu)v$.

Tatsächlich, $\lambda(\mu v)$

$$= \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\mu x_v) \\ \lambda(\mu y_v) \end{pmatrix}$$

(V1)

Z.z.: $\lambda(\mu\, v) = (\lambda\mu)v$.
Tatsächlich, $\lambda(\mu v)$

$$= \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\mu x_v) \\ \lambda(\mu y_v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda\mu) x_v \\ (\lambda\mu) y_v \end{pmatrix}$$

(V1)

Z.z.: $\lambda(\mu\, v) = (\lambda\mu)v$.
Tatsächlich, $\lambda(\mu v)$

$$= \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) = \lambda \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\mu x_v) \\ \lambda(\mu y_v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda\mu) x_v \\ (\lambda\mu) y_v \end{pmatrix} = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

(V1)

Z.z.: $\lambda(\mu\, v) = (\lambda\mu)v$.

Tatsächlich, $\lambda(\mu v)$

$$= \lambda\left(\mu\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\mu x_v) \\ \lambda(\mu y_v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda\mu)x_v \\ (\lambda\mu)y_v \end{pmatrix} = (\lambda\mu)\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = (\lambda\mu)v$$

(V2)

(V2)

Z.z.:

Z.z.: $(\lambda + \mu)\, v$

(V2)

Z.z.: $(\lambda + \mu)\, v = \lambda v + \mu v.$
Tatsächlich, $(\lambda + \mu)v =$

(V2)

Z.z.: $(\lambda + \mu)\, v = \lambda v + \mu v.$
Tatsächlich, $(\lambda + \mu)v=$

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

(V2)

Z.z.: $(\lambda+\mu)\,v = \lambda v + \mu v.$
Tatsächlich, $(\lambda+\mu)v =$

$$(\lambda+\mu)\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)x_v \\ (\lambda+\mu)y_v \end{pmatrix}$$

(V2)

Z.z.: $(\lambda + \mu)\, v = \lambda v + \mu v.$

Tatsächlich, $(\lambda + \mu)v =$

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_v \\ (\lambda + \mu)y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_v + \mu x_v \\ \lambda y_v + \mu y_v \end{pmatrix}$$

(V2)

Z.z.: $(\lambda + \mu)\, v = \lambda v + \mu v.$
Tatsächlich, $(\lambda + \mu) v =$

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) x_v \\ (\lambda + \mu) y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_v + \mu x_v \\ \lambda y_v + \mu y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} +$$

(V2)

Z.z.: $(\lambda + \mu)\, v = \lambda v + \mu v.$

Tatsächlich, $(\lambda + \mu) v =$

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) x_v \\ (\lambda + \mu) y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_v + \mu x_v \\ \lambda y_v + \mu y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix}$$

(V2)

Z.z.: $(\lambda + \mu)\, v = \lambda v + \mu v.$

Tatsächlich, $(\lambda + \mu)v=$

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_v \\ (\lambda + \mu)y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_v + \mu x_v \\ \lambda y_v + \mu y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_v \\ \mu y_v \end{pmatrix} = \lambda v + \mu v$$

(V3) und (V4)

(V3) und (V4)

(V3) **Z.z.:**

(V3) und (V4)

(V3) **Z.z.:** $\lambda(u+v)$

(V3) und (V4)

(V3) **Z.z.:** $\lambda\,(u+v) = \lambda u + \lambda v.$
Tatsächlich, $\lambda(u+v) =$

(V3) und (V4)

(V3) **Z.z.:** $\lambda\,(u+v) = \lambda u + \lambda v$.
Tatsächlich, $\lambda(u+v)=$
$$\lambda\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right)$$

(V3) und (V4)

(V3) **Z.z.:** $\lambda\,(u+v) = \lambda u + \lambda v.$
Tatsächlich, $\lambda(u+v)=$

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ x_u + y_v \end{pmatrix}$$

(V3) und (V4)

(V3) **Z.z.:** $\lambda\,(u+v)=\lambda u+\lambda v.$
Tatsächlich, $\lambda(u+v)=$

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right)=\lambda\begin{pmatrix} x_u+x_v \\ x_u+y_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x_u+\lambda x_v \\ \lambda y_u+\lambda y_v \end{pmatrix}$$

(V3) und (V4)

(V3) **Z.z.:** $\lambda\,(u+v) = \lambda u + \lambda v.$
Tatsächlich, $\lambda(u+v)=$

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ x_u + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_u + \lambda x_v \\ \lambda y_u + \lambda y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \end{pmatrix} +$$

(V3) **Z.z.:** $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v.$
Tatsächlich, $\lambda(u+v)=$
$$\lambda\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ x_u + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_u + \lambda x_v \\ \lambda y_u + \lambda y_v \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix}$$

(V3) und (V4)

(V3) **Z.z.:** $\lambda\,(u+v) = \lambda u + \lambda v.$
Tatsächlich, $\lambda(u+v)=$

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ x_u + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_u + \lambda x_v \\ \lambda y_u + \lambda y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} = \lambda u + \lambda v$$

(V3) und (V4)

(V3) **Z.z.:** $\lambda\,(u+v) = \lambda u + \lambda v.$

Tatsächlich, $\lambda(u+v)=$

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ x_u + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_u + \lambda x_v \\ \lambda y_u + \lambda y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} = \lambda u + \lambda v$$

(V4) **Z.z.:**

(V3) und (V4)

(V3) **Z.z.:** $\lambda\,(u+v) = \lambda u + \lambda v.$

Tatsächlich, $\lambda(u+v) =$

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ x_u + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_u + \lambda x_v \\ \lambda y_u + \lambda y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} = \lambda u + \lambda v$$

(V4) **Z.z.:** $1 \bullet v = v$

Tatsächlich, $1 \bullet v =$

(V3) und (V4)

(V3) **Z.z.:** $\lambda\,(u+v)=\lambda u+\lambda v.$

Tatsächlich, $\lambda(u+v)=$

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right)=\lambda\begin{pmatrix} x_u+x_v \\ x_u+y_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x_u+\lambda x_v \\ \lambda y_u+\lambda y_v \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix}=\lambda u+\lambda v$$

(V4) **Z.z.:** $1\bullet v=v$

Tatsächlich, $1\bullet v=1\bullet\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

(V3) und (V4)

(V3) **Z.z.:** $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v.$

Tatsächlich, $\lambda(u+v) =$

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}\right) = \lambda \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ x_u + y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_u + \lambda x_v \\ \lambda y_u + \lambda y_v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda x_v \\ \lambda y_v \end{pmatrix} = \lambda u + \lambda v$$

(V4) **Z.z.:** $1 \bullet v = v$

Tatsächlich, $1 \bullet v = 1 \bullet \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_v \\ 1 \cdot y_v \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = v$$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix}$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper
(1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein
$\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.
Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper
(1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+") und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$

Beweis. Da $0 = 0 + 0$,

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper
(1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein
$\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt
$(0 + 0)v = 0v + 0v$.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+") und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. $\square$

Lemma 11

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. $\square$

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. $\square$

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0}$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0})$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. $\square$

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$") und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. $\square$

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. $\square$

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+") und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$,

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+") und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. $\square$

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. $\square$

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. $\square$

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. $\square$

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. $\square$

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. $\square$

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = 0$.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = 0$. Betrachte den Skalar λ^{-1}

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = 0$. Betrachte den Skalar λ^{-1} (s.d. $\lambda^{-1}\lambda = 1$ ist.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „$+$“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = 0$. Betrachte den Skalar λ^{-1} (s.d. $\lambda^{-1}\lambda = 1$ ist. Existiert, da $\mathbb{K}^* \overset{Def.\ 16}{=}$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = 0$. Betrachte den Skalar λ^{-1} (s.d. $\lambda^{-1}\lambda = 1$ ist. Existiert, da $\mathbb{K}^* \overset{Def.\ 16}{=} \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist,

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = 0$. Betrachte den Skalar λ^{-1} (s.d. $\lambda^{-1}\lambda = 1$ ist. Existiert, da $\mathbb{K}^* \overset{Def.\ 16}{=} \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist, also alle Elemente in $\mathbb{K}$ außer 0 invertierbar sind.)

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = 0$. Betrachte den Skalar λ^{-1} (s.d. $\lambda^{-1}\lambda = 1$ ist. Existiert, da $\mathbb{K}^* \overset{Def. 16}{=} \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist, also alle Elemente in $\mathbb{K}$ außer 0 invertierbar sind.)

Dann gilt:

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$.

□

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = 0$. Betrachte den Skalar λ^{-1} (s.d. $\lambda^{-1}\lambda = 1$ ist. Existiert, da $\mathbb{K}^* \overset{Def. 16}{=} \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist, also alle Elemente in $\mathbb{K}$ außer 0 invertierbar sind.)

Dann gilt: $\vec{0} \overset{\text{Lem. 11}}{=}$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = 0$. Betrachte den Skalar λ^{-1} (s.d. $\lambda^{-1}\lambda = 1$ ist. Existiert, da $\mathbb{K}^* \overset{Def.\ 16}{=} \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist, also alle Elemente in $\mathbb{K}$ außer 0 invertierbar sind.)

Dann gilt: $\vec{0} \overset{\text{Lem. } 11}{=} \lambda^{-1}\vec{0}$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. $\square$

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. $\square$

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = 0$. Betrachte den Skalar λ^{-1} (s.d. $\lambda^{-1}\lambda = 1$ ist. Existiert, da $\mathbb{K}^* \overset{Def.\ 16}{=} \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist, also alle Elemente in $\mathbb{K}$ außer 0 invertierbar sind.)

Dann gilt: $\vec{0} \overset{\text{Lem. } 11}{=} \lambda^{-1}\vec{0} = \lambda^{-1}\lambda v \overset{(V1)}{=}$

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata 10, 11, 12 und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. □

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. □

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = 0$. Betrachte den Skalar λ^{-1} (s.d. $\lambda^{-1}\lambda = 1$ ist. Existiert, da $\mathbb{K}^* \overset{Def.\ 16}{=} \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist, also alle Elemente in $\mathbb{K}$ außer 0 invertierbar sind.)

Dann gilt: $\vec{0} \overset{\text{Lem. } 11}{=} \lambda^{-1}\vec{0} = \lambda^{-1}\lambda v \overset{(V1)}{=} 1 \bullet v \overset{(V4)}{=} v$.

Einfachste Eigenschaften von Vektorräumen

In Lemmata $10, 11, 12$ und weiter: $\mathbb{K}$ ist stets ein Körper (1 — Einselement, 0 — neutrales Element bzgl. „+“) und V ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit neutralem Element $\vec{0}$.

Lemma 10 $\forall v \in V$ gilt: $0v = \vec{0}$.

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial: $0 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Beweis. Da $0 = 0 + 0$, ist $0v = (0 + 0)v$. Nach (V2) gilt $(0 + 0)v = 0v + 0v$. Also gilt $0v = 0v + 0v$. Addieren $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$. $\square$

Lemma 11 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. **(In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial)**

Beweis. $\lambda\vec{0} \overset{(G2)}{=} \lambda(\vec{0} + \vec{0}) \overset{V3}{=} \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addieren $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$. $\square$

Umkehrung von Lemmata 10, 11.

Lemma 12 Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Beweis. Angenommen $\lambda \neq 0$. Z.z.: $v = 0$. Betrachte den Skalar λ^{-1} (s.d. $\lambda^{-1}\lambda = 1$ ist. Existiert, da $\mathbb{K}^* \overset{Def.\ 16}{=} \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist, also alle Elemente in $\mathbb{K}$ außer 0 invertierbar sind.)

Dann gilt: $\vec{0} \overset{\text{Lem. } 11}{=} \lambda^{-1}\vec{0} = \lambda^{-1}\lambda v \overset{(V1)}{=} 1 \bullet v \overset{(V4)}{=} v$. $\square$

Lemma 13

Lemma 13 Für jedes v gilt:

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$.

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)
In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} =$$

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} =$$

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$-1 \bullet v + v$

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V,+)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v$$

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1 + 1) \bullet v$$

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v$$

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. } 10}{=} \vec{0}.$$

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. } 10}{=} \vec{0}. \qquad \square$$

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}. \qquad \square$$

Lemma 14

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. }10}{=} \vec{0}. \qquad \square$$

Lemma 14 Für jedes $v \neq \vec{0}$ gilt:

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V,+)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}. \qquad \square$$

Lemma 14 Für jedes $v \neq \vec{0}$ gilt: ist $\lambda v = \mu v$,

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. } 10}{=} \vec{0}. \qquad \square$$

Lemma 14 Für jedes $v \neq \vec{0}$ gilt: ist $\lambda v = \mu v$, so ist $\lambda = \mu$.

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. } 10}{=} \vec{0}. \qquad \square$$

Lemma 14 Für jedes $v \neq \vec{0}$ gilt: ist $\lambda v = \mu v$, so ist $\lambda = \mu$.

Beweis.

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. } 10}{=} \vec{0}. \quad \square$$

Lemma 14 Für jedes $v \neq \vec{0}$ gilt: ist $\lambda v = \mu v$, so ist $\lambda = \mu$.

Beweis. Addiere $(-\mu) \bullet v$ zu der beiden Seiten der Gleichung $\lambda v = \mu v$.

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. } 10}{=} \vec{0}. \qquad \square$$

Lemma 14 Für jedes $v \neq \vec{0}$ gilt: ist $\lambda v = \mu v$, so ist $\lambda = \mu$.

Beweis. Addiere $(-\mu) \bullet v$ zu der beiden Seiten der Gleichung $\lambda v = \mu v$. Links bekommen wir $\lambda \bullet v + (-\mu) \bullet v = (\lambda - \mu) v$.

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V,+)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}. \quad \square$$

Lemma 14 Für jedes $v \neq \vec{0}$ gilt: ist $\lambda v = \mu v$, so ist $\lambda = \mu$.

Beweis. Addiere $(-\mu) \bullet v$ zu der beiden Seiten der Gleichung $\lambda v = \mu v$. Links bekommen wir $\lambda \bullet v + (-\mu) \bullet v = (\lambda - \mu)v$. Rechts bekkomen wir $(-\mu + \mu)v = 0 \bullet v$

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. } 10}{=} \vec{0}. \quad \square$$

Lemma 14 Für jedes $v \neq \vec{0}$ gilt: ist $\lambda v = \mu v$, so ist $\lambda = \mu$.

Beweis. Addiere $(-\mu) \bullet v$ zu der beiden Seiten der Gleichung $\lambda v = \mu v$. Links bekommen wir $\lambda \bullet v + (-\mu) \bullet v = (\lambda - \mu)v$. Rechts bekkomen wir $(-\mu + \mu)v = 0 \bullet v \overset{Lem.\ 10}{=} \vec{0}$.

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. }10}{=} \vec{0}. \qquad \square$$

Lemma 14 Für jedes $v \neq \vec{0}$ gilt: ist $\lambda v = \mu v$, so ist $\lambda = \mu$.

Beweis. Addiere $(-\mu) \bullet v$ zu der beiden Seiten der Gleichung $\lambda v = \mu v$. Links bekommen wir $\lambda \bullet v + (-\mu) \bullet v = (\lambda - \mu) v$. Rechts bekkomen wir $(-\mu + \mu) v = 0 \bullet v \overset{Lem.\ 10}{=} \vec{0}$. Also, $(\lambda - \mu) v = \vec{0}$.

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. } 10}{=} \vec{0}. \qquad \square$$

Lemma 14 Für jedes $v \neq \vec{0}$ gilt: ist $\lambda v = \mu v$, so ist $\lambda = \mu$.

Beweis. Addiere $(-\mu) \bullet v$ zu der beiden Seiten der Gleichung $\lambda v = \mu v$. Links bekommen wir $\lambda \bullet v + (-\mu) \bullet v = (\lambda - \mu) v$. Rechts bekkomen wir $(-\mu + \mu) v = 0 \bullet v \overset{Lem.\ 10}{=} \vec{0}$. Also, $(\lambda - \mu) v = \vec{0}$. Nach Lemma 12 ist $\lambda - \mu = 0$,

Lemma 13 Für jedes v gilt: $-1 \bullet v = -v$. (wobei $-v$ das inverse Element zu v in $(V, +)$ ist)

In $\mathbb{K}^n$ ist das Lemma trivial:

$$-1 \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ -1 \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

$$-1 \bullet v + v \overset{(V4)}{=} -1 \bullet v + 1 \bullet v \overset{(V2)}{=} (-1+1) \bullet v = 0 \bullet v \overset{\text{Lem. } 10}{=} \vec{0}. \qquad \square$$

Lemma 14 Für jedes $v \neq \vec{0}$ gilt: ist $\lambda v = \mu v$, so ist $\lambda = \mu$.

Beweis. Addiere $(-\mu) \bullet v$ zu der beiden Seiten der Gleichung $\lambda v = \mu v$. Links bekommen wir $\lambda \bullet v + (-\mu) \bullet v = (\lambda - \mu)v$. Rechts bekkomen wir $(-\mu + \mu)v = 0 \bullet v \overset{Lem.\ 10}{=} \vec{0}$. Also, $(\lambda - \mu)v = \vec{0}$. Nach Lemma 12 ist $\lambda - \mu = 0$, $\square$.

Def. 18

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum.

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum,

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich:

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.

Triviale Bsple:

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.
Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.
Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.
Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.
Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.
Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.
Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.
Satz 21

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.
Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.
Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.
Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$,

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.
Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.
Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.
Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$,

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$" und „$\bullet$".

Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.

Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.

Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

Beweis:

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.

Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

Beweis: Z.z.: Die Lösungsmenge ist abgeschlossen bzgl. (i) Addition und (ii) Multiplikation.

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.

Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

Beweis: Z.z.: Die Lösungsmenge ist abgeschlossen bzgl. (i) Addition und (ii) Multiplikation.

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.

Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

Beweis: Z.z.: Die Lösungsmenge ist abgeschlossen bzgl. (i) Addition und (ii) Multiplikation.

(i) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$,

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „+“ und „•“.

Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

Beweis: Z.z.: Die Lösungsmenge ist abgeschlossen bzgl. (i) Addition und (ii) Multiplikation.

(i) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$, d.h. $\begin{array}{llll} a_1x_1+ & \cdots & +a_nx_n & = 0 \\ a_1y_1+ & \cdots & +a_ny_n & = 0 \end{array}$.

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „+“ und „•“.

Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

Beweis: Z.z.: Die Lösungsmenge ist abgeschlossen bzgl. (i) Addition und (ii) Multiplikation.

(i) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$, d.h. $\begin{array}{llll} a_1x_1+ & \cdots & +a_nx_n & = 0 \\ a_1y_1+ & \cdots & +a_ny_n & = 0 \end{array}$. Dann ist

$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0 + 0 = 0,$

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.
Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „+“ und „•“.
Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.
Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.
Beweis: Z.z.: Die Lösungsmenge ist abgeschlossen bzgl. (i) Addition und (ii) Multiplikation.

(i) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$, d.h. $\begin{matrix} a_1x_1 + & \cdots & +a_nx_n & = 0 \\ a_1y_1 + & \cdots & +a_ny_n & = 0 \end{matrix}$. Dann ist

$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0 + 0 = 0$, also

$a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = 0,$

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$" und „$\bullet$".

Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

Beweis: Z.z.: Die Lösungsmenge ist abgeschlossen bzgl. (i) Addition und (ii) Multiplikation.

(i) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$, d.h. $\begin{array}{llll} a_1x_1+ & \cdots & +a_nx_n & = 0 \\ a_1y_1+ & \cdots & +a_ny_n & = 0 \end{array}$. Dann ist

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0 + 0 = 0, \text{ also}$$

$$a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = 0, \text{ also } \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in L.$$

(ii) Analog.

Def. 18 Sei V ein $\mathbb{K}-$ Vektorraum. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein Untervektorraum, falls $\forall u, v \in U$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ die Elemente $v + u$ und λv auch in U liegen.

Umgangsprachlich: Die Teilmenge U ist abgeschlossen bezüglich „$+$“ und „$\bullet$“.

Triviale Bsple: $\{\vec{0}\}$ und V sind Untervektorräume.

Satz 21 Für die Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, wobei $a_i \in \mathbb{K}$, ist die Lösungsmenge $L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

Beweis: Z.z.: Die Lösungsmenge ist abgeschlossen bzgl. (i) Addition und (ii) Multiplikation.

(i) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in L$, d.h. $\begin{matrix} a_1x_1 + & \cdots & +a_nx_n & = 0 \\ a_1y_1 + & \cdots & +a_ny_n & = 0 \end{matrix}$. Dann ist

$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0 + 0 = 0$, also

$a_1(x_1 + y_1) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = 0$, also $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in L$.

(ii) Analog.

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist,

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Beweis:

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $(U, +)$ eine Untegruppe ist.

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $(U, +)$ eine Untegruppe ist. Nach Satz 5 ist genügend zu zeigen, dass U abgeschlossen bzgl. addition und invertieren ist.

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $(U, +)$ eine Untegruppe ist. Nach Satz 5 ist genügend zu zeigen, dass U abgeschlossen bzgl. addition und invertieren ist. Aus Def. 18 folgt, dass U abgeschlossen bzgl. $+$ ist.

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $(U, +)$ eine Untegruppe ist. Nach Satz 5 ist genügend zu zeigen, dass U abgeschlossen bzgl. addition und invertieren ist. Aus Def. 18 folgt, dass U abgeschlossen bzgl. $+$ ist. Z.z.: ist $u \in U$, so ist $-u \in U$.

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $(U, +)$ eine Untegruppe ist. Nach Satz 5 ist genügend zu zeigen, dass U abgeschlossen bzgl. addition und invertieren ist. Aus Def. 18 folgt, dass U abgeschlossen bzgl. $+$ ist. Z.z.: ist $u \in U$, so ist $-u \in U$. Aber nach Lemma 13 ist $-u = -1 \bullet u \in U$.

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $(U, +)$ eine Untegruppe ist. Nach Satz 5 ist genügend zu zeigen, dass U abgeschlossen bzgl. addition und invertieren ist. Aus Def. 18 folgt, dass U abgeschlossen bzgl. $+$ ist. Z.z.: ist $u \in U$, so ist $-u \in U$. Aber nach Lemma 13 ist $-u = -1 \bullet u \in U$. Also, $(U, +)$ ist eine Untegruppe.

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $(U, +)$ eine Untegruppe ist. Nach Satz 5 ist genügend zu zeigen, dass U abgeschlossen bzgl. addition und invertieren ist. Aus Def. 18 folgt, dass U abgeschlossen bzgl. $+$ ist. Z.z.: ist $u \in U$, so ist $-u \in U$. Aber nach Lemma 13 ist $-u = -1 \bullet u \in U$.
Also, $(U, +)$ ist eine Untegruppe.
Da (V1–V4)

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $(U, +)$ eine Untegruppe ist. Nach Satz 5 ist genügend zu zeigen, dass U abgeschlossen bzgl. addition und invertieren ist. Aus Def. 18 folgt, dass U abgeschlossen bzgl. $+$ ist. Z.z.: ist $u \in U$, so ist $-u \in U$. Aber nach Lemma 13 ist $-u = -1 \bullet u \in U$. Also, $(U, +)$ ist eine Untegruppe.
Da (V1–V4) sind die Eigenschaften der Operationen $+, \cdot, \bullet$,

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $(U, +)$ eine Untegruppe ist. Nach Satz 5 ist genügend zu zeigen, dass U abgeschlossen bzgl. addition und invertieren ist. Aus Def. 18 folgt, dass U abgeschlossen bzgl. $+$ ist. Z.z.: ist $u \in U$, so ist $-u \in U$. Aber nach Lemma 13 ist $-u = -1 \bullet u \in U$. Also, $(U, +)$ ist eine Untegruppe.
Da (V1–V4) sind die Eigenschaften der Operationen $+, \cdot, \bullet$, da sie in V erfüllt sind,

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $(U, +)$ eine Untegruppe ist. Nach Satz 5 ist genügend zu zeigen, dass U abgeschlossen bzgl. addition und invertieren ist. Aus Def. 18 folgt, dass U abgeschlossen bzgl. $+$ ist. Z.z.: ist $u \in U$, so ist $-u \in U$. Aber nach Lemma 13 ist $-u = -1 \bullet u \in U$. Also, $(U, +)$ ist eine Untegruppe.
Da (V1–V4) sind die Eigenschaften der Operationen $+, \cdot, \bullet$, da sie in V erfüllt sind, sind sie auch in U erfüllt.

Die Multiplikation $\bullet : \mathbb{K} \times V \to V$ induziert eine Multiplikation $\bullet_{|U} : \mathbb{K} \times U \to U$: $\lambda \bullet_{|U} u = \lambda \bullet U$.
Da U abgeschlossen bzgl. $\bullet$ ist, ist $\bullet_{|U}$ wohldefiniert. p Sie hießt induzierte Multiplikation.

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $(U, +)$ eine Untegruppe ist. Nach Satz 5 ist genügend zu zeigen, dass U abgeschlossen bzgl. addition und invertieren ist. Aus Def. 18 folgt, dass U abgeschlossen bzgl. $+$ ist. Z.z.: ist $u \in U$, so ist $-u \in U$. Aber nach Lemma 13 ist $-u = -1 \bullet u \in U$. Also, $(U, +)$ ist eine Untegruppe.
Da (V1–V4) sind die Eigenschaften der Operationen $+, \cdot, \bullet$, da sie in V erfüllt sind, sind sie auch in U erfüllt. $\square$

Satz 23

Satz 23 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untervektorräume des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums* V*.*

Satz 23 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untervektoräume des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums* V*. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Satz 23 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untervektoräume des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums* V*. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.:

Satz 23 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untervektoräume des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums* V*.* *Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

Satz 23 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untervektoräume des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums* V*.*
Dann ist die Schnittmenge

$$\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.
Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow$

Satz 23 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untervektoräume des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums* V*.*
Dann ist die Schnittmenge

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.
Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow$

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a)

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer,

Satz 23 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untervektoräume des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums* V*. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt.

Satz 23 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untervektoräume des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums* V*. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w),

Satz 23 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untervektoräume des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums* V*. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}$.

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. } 10}{=} \vec{0}$.

(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U}$

Satz 23 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untervektoräume des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums* V*. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. } 10}{=} \vec{0}$.

(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \ u + v \in U$

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}$.

(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \ u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$+$“).

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}$.
(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \ u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$+$“). Also $u + v$ liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$,

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}$.

(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \; u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$+$“). Also $u + v$ liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}$.
(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \ u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$+$“). Also $u + v$ liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.
(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}$,

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}$.

(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \; u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$+$“). Also $u + v$ liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}$.

(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \ u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$+$“). Also $u + v$ liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}$, $\lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\bullet$“).

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}$.
(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \; u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$+$“). Also $u + v$ liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also
$u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.
(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}$, $\lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\bullet$“). Also λu liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$,

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}$.
(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \ u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$+$“). Also $u + v$ liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.
(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}$, $\lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\bullet$“). Also λu liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $\lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. } 10}{=} \vec{0}$.
(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \; u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$+$“). Also $u + v$ liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.
(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}$, $\lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\bullet$“). Also λu liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $\lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$. Also $\lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

Satz 23 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untervektoräume des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch ein Untervektoraum.

Beweis. Z.z.: (für alle Vektoren u, v und Skalare λ gilt)

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$ ist nicht leer, weil $\vec{0}$ in jedem Untervektorraum U liegt. Tatsächlich, U enhält mind. ein Element (z.B. w), und deswegen auch das Element $0w \overset{\text{Lem. 10}}{=} \vec{0}$.
(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \; u + v \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$+$“). Also $u + v$ liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $u + v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.
(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}$, $\lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\bullet$“). Also λu liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $\lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$. Also $\lambda u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$. $\square$