Satz von Cayley

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis.

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$*.*

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf,

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n$,

Satz von Cayley *Jede* $(G,\cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n, \ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1:

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n, \ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert:

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n$, $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.
Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren
$\phi : G \to \mathcal{S}_n, \ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$
Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.
Behauptung 2:

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n,\ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.
Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren
$\phi : G \to \mathcal{S}_n, \ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$
Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.
Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n$, $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

$$\phi(a) \circ \phi(b)(x)$$

Beweis:

Satz von Cayley *Jede* $(G,\cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n, \ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

$$\phi(a) \circ \phi(b)(x) \quad \stackrel{\text{Z.z.:}}{=}$$

Beweis:

Satz von Cayley *Jede* $(G,\cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n,\ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

$$\phi(a) \circ \phi(b)(x) \quad \overset{\text{Z.z.:}}{=} \quad \phi(ab)(x)$$

Beweis:

Satz von Cayley *Jede* $(G,\cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n,\ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} \phi(a)\circ\phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \end{array}$$

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n, \ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a) \circ \phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \\ abx & = & abx \end{array},$$

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n$, $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a) \circ \phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \\ abx & = & abx \end{array}$$
, weil

$\phi(a) \circ \phi(b)(x)$

Satz von Cayley *Jede $(G,\cdot)$ mit $\#G = n < \infty$ ist isomorph zur einen Untegruppe $H \subseteq \mathcal{S}_n$.*

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n$, $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a)\circ\phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \\ abx & = & abx \end{array}$$
, weil

$\phi(a)\circ\phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x))$

Satz von Cayley *Jede* $(G,\cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n,\ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a)\circ\phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \\ abx & = & abx \end{array}, \quad \text{weil}$$

$\phi(a)\circ\phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a)(bx) = abx.$

Satz von Cayley *Jede $(G, \cdot)$ mit $\#G = n < \infty$ ist isomorph zur einen Untegruppe $H \subseteq \mathcal{S}_n$.*

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$$\phi : G \to \mathcal{S}_n, \quad \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} \phi(a) \circ \phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \\ abx & = & abx \end{array}, \quad \text{weil}$$

$$\phi(a) \circ \phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a)(bx) = abx.$$

Behauptung 3:

Satz von Cayley *Jede* $(G,\cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n, \ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a)\circ\phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \\ abx & = & abx \end{array}, \text{ weil}$$

$\phi(a)\circ\phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a)(bx) = abx.$

Behauptung 3: $Kern_\phi = \{e\}$.

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$$\phi : G \to \mathcal{S}_n, \quad \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a) \circ \phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \\ abx & = & abx \end{array}$$
, weil

$$\phi(a) \circ \phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a)(bx) = abx.$$

Behauptung 3: $Kern_\phi = \{e\}$.

Beweis:

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n, \; \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a) \circ \phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \\ abx & = & abx \end{array}$$
, weil

$\phi(a) \circ \phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a)(bx) = abx.$

Behauptung 3: $Kern_\phi = \{e\}$.

Beweis: Z.z.: $\phi(a)(x) = Id_G$

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n,\ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a)\circ\phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \\ abx & = & abx \end{array},\quad \text{weil}$$

$\phi(a)\circ\phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a)(bx) = abx.$

Behauptung 3: $Kern_\phi = \{e\}$.

Beweis: Z.z.: $\phi(a)(x) = Id_G \iff$

Satz von Cayley *Jede $(G, \cdot)$ mit $\#G = n < \infty$ ist isomorph zur einen Untegruppe $H \subseteq \mathcal{S}_n$.*

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$$\phi : G \to \mathcal{S}_n, \quad \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} \phi(a) \circ \phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & (\text{Def}) & \| \\ abx & = & abx \end{array}, \quad \text{weil}$$

$\phi(a) \circ \phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a)(bx) = abx.$

Behauptung 3: $Kern_\phi = \{e\}$.

Beweis: Z.z.: $\phi(a)(x) = Id_G \iff a = e$.

$\Longleftarrow$:

Satz von Cayley *Jede* $(G, \cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n, \ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a)\circ\phi(b)(x) & \stackrel{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \\ abx & = & abx \end{array}, \quad \text{weil}$$

$\phi(a)\circ\phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a)(bx) = abx.$

Behauptung 3: $Kern_\phi = \{e\}$.

Beweis: Z.z.: $\phi(a)(x) = Id_G \iff a = e$.

$\Longleftarrow$: $\phi(e)(x) = e \cdot x = x = Id_G(x)$.

Satz von Cayley *Jede* $(G,\cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n,\ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a)\circ\phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \\ abx & = & abx \end{array}$$
, weil

$\phi(a)\circ\phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a)(bx) = abx.$

Behauptung 3: $Kern_\phi = \{e\}$.

Beweis: Z.z.: $\phi(a)(x) = Id_G \iff a = e$.

$\Longleftarrow$: $\phi(e)(x) = e\cdot x = x = Id_G(x)$.

$\Longrightarrow$:

Satz von Cayley *Jede $(G,\cdot)$ mit $\#G = n < \infty$ ist isomorph zur einen Untegruppe $H \subseteq \mathcal{S}_n$.*

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n,\ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a)\circ\phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & (\text{Def}) & \| \\ abx & = & abx \end{array}, \quad \text{weil}$$

$\phi(a)\circ\phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a)(bx) = abx.$

Behauptung 3: $Kern_\phi = \{e\}$.

Beweis: Z.z.: $\phi(a)(x) = Id_G \iff a = e$.

$\Longleftarrow$: $\phi(e)(x) = e \cdot x = x = Id_G(x)$.

$\Longrightarrow$: Ist $\phi(a)x = Id_G(x) = x$,

Satz von Cayley *Jede* $(G,\cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n,\ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a)\circ\phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & (\text{Def}) & \| \\ abx & = & abx \end{array}, \quad \text{weil}$$

$\phi(a)\circ\phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a)(bx) = abx.$

Behauptung 3: $Kern_\phi = \{e\}$.

Beweis: Z.z.: $\phi(a)(x) = Id_G \iff a = e$.

$\Longleftarrow$: $\phi(e)(x) = e\cdot x = x = Id_G(x)$.

$\Longrightarrow$: Ist $\phi(a)x = Id_G(x) = x$, so ist $ax = x$.

Satz von Cayley *Jede* $(G,\cdot)$ *mit* $\#G = n < \infty$ *ist isomorph zur einen Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n,\ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis: $\begin{array}{ccc} \phi(a)\circ\phi(b)(x) & \stackrel{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & \text{(Def)} & \| \\ abx & = & abx \end{array}$, weil

$\phi(a)\circ\phi(b)(x) = \phi(a)(\phi(b)(x)) = \phi(a)(bx) = abx.$

Behauptung 3: $Kern_\phi = \{e\}$.

Beweis: Z.z.: $\phi(a)(x) = Id_G \iff a = e$.

$\Longleftarrow$: $\phi(e)(x) = e\cdot x = x = Id_G(x)$.

$\Longrightarrow$: Ist $\phi(a)x = Id_G(x) = x$, so ist $ax = x$. Multiplizieren mit x^{-1} ergibt $a = e$.

Satz von Cayley *Jede $(G,\cdot)$ mit $\#G = n < \infty$ ist isomorph zur einen Untegruppe $H \subseteq \mathcal{S}_n$.*

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren

$\phi : G \to \mathcal{S}_n,\ \underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab.$

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Behauptung 2: ϕ ist ein Homomorphismus.

Beweis:
$$\begin{array}{ccc} \phi(a)\circ\phi(b)(x) & \overset{\text{Z.z.:}}{=} & \phi(ab)(x) \\ \| & (\mathrm{Def}) & \| \\ abx & = & abx \end{array}, \quad \text{weil}$$

$\phi(a)\circ\phi(b)(x) \ = \phi(a)(\phi(b)(x)) \ = \phi(a)(bx) = abx.$

Behauptung 3: $Kern_\phi = \{e\}$.

Beweis: Z.z.: $\phi(a)(x) = Id_G \iff a = e$.

$\Longleftarrow$: $\phi(e)(x) = e \cdot x = x = Id_G(x)$.

$\Longrightarrow$: Ist $\phi(a)x = Id_G(x) = x$, so ist $ax = x$. Multiplizieren mit x^{-1} ergibt $a = e$.

$$\left.\begin{cases} \text{Behauptung 2} \\ \text{Behauptung 3} \\ \text{Satz 8} \\ \text{Satz 9} \end{cases}\right. \Longrightarrow \text{Satz 10.}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \implies$$ Satz 10. Tatsächlich,

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \Longrightarrow \textsf{Satz 10.}$$ Tatsächlich,

$$\text{Behauptung 2} \qquad \Longrightarrow \qquad \phi \text{ ist ein Homomorphismus}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \Longrightarrow$$ Satz 10. Tatsächlich,

$$\begin{array}{ccc}\text{Behauptung 2} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\\ \text{Satz 8} & \Longrightarrow & \mathit{Bild}_\phi \text{ ist eine Untegruppe von } \mathcal{S}_n\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Behauptung 2} \\ \text{Behauptung 3} \\ \text{Satz 8} \\ \text{Satz 9} \end{array}\right. \Longrightarrow$$ Satz 10. Tatsächlich,

$$\begin{array}{ccc} \text{Behauptung 2} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist ein Homomorphismus} \\ \text{Satz 8} & \Longrightarrow & \mathit{Bild}_\phi \text{ ist eine Untegruppe von } \mathcal{S}_n \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \Longrightarrow \textsf{Satz 10.}$$ Tatsächlich,

$$\begin{array}{ccc}
\text{Behauptung 2} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\\
\text{Satz 8} & \Longrightarrow & \mathit{Bild}_\phi \text{ ist eine Untegruppe von } \mathcal{S}_n\\
\text{Behauptung 3} + \text{Satz 9} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist injektiv}
\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \Longrightarrow$$ Satz 10. Tatsächlich,

$$\begin{array}{ccc}\text{Behauptung 2} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\\ \text{Satz 8} & \Longrightarrow & \mathit{Bild}_\phi \text{ ist eine Untegruppe von } \mathcal{S}_n\\ \text{Behauptung 3} + \text{Satz 9} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist injektiv}\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \Longrightarrow$$ Satz 10. Tatsächlich,

$$\begin{array}{ccc}\text{Behauptung 2} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\\ \text{Satz 8} & \Longrightarrow & \mathit{Bild}_\phi \text{ ist eine Untegruppe von } \mathcal{S}_n\\ \text{Behauptung 3} + \text{Satz 9} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist injektiv}\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \Longrightarrow$$ Satz 10. Tatsächlich,

$$\begin{array}{ccc}\text{Behauptung 2} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\\ \text{Satz 8} & \Longrightarrow & \mathit{Bild}_\phi \text{ ist eine Untegruppe von } \mathcal{S}_n\\ \text{Behauptung 3 + Satz 9} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist injektiv}\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \Longrightarrow$$ Satz 10. Tatsächlich,

$$\begin{array}{ccc}\text{Behauptung 2} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\\ \text{Satz 8} & \Longrightarrow & \mathit{Bild}_\phi \text{ ist eine Untegruppe von } \mathcal{S}_n\\ \text{Behauptung 3 + Satz 9} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist injektiv}\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \Longrightarrow$$ Satz 10. Tatsächlich,

$$\begin{array}{ccc}\text{Behauptung 2} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\\ \text{Satz 8} & \Longrightarrow & \mathit{Bild}_\phi \text{ ist eine Untegruppe von } \mathcal{S}_n\\ \text{Behauptung 3 + Satz 9} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist injektiv}\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \Longrightarrow$$ Satz 10. Tatsächlich,

$$\begin{array}{ccc}\text{Behauptung 2} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\\ \text{Satz 8} & \Longrightarrow & \mathit{Bild}_\phi \text{ ist eine Untegruppe von } \mathcal{S}_n\\ \text{Behauptung 3} + \text{Satz 9} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist injektiv}\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \Longrightarrow$$ Satz 10. Tatsächlich,

$$\begin{array}{ccc}\text{Behauptung 2} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\\ \text{Satz 8} & \Longrightarrow & \mathit{Bild}_\phi \text{ ist eine Untegruppe von } \mathcal{S}_n\\ \text{Behauptung 3 + Satz 9} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist injektiv}\end{array}$$

Da ϕ als Abbildung auf Bild_ϕ auch surjektiv ist,

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \Longrightarrow$$ Satz 10. Tatsächlich,

$$\begin{array}{ccc}\text{Behauptung 2} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\\ \text{Satz 8} & \Longrightarrow & \mathit{Bild}_\phi \text{ ist eine Untegruppe von } \mathcal{S}_n\\ \text{Behauptung 3 + Satz 9} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist injektiv}\end{array}$$

Da ϕ als Abbildung auf Bild_ϕ auch surjektiv ist, ist G zum Bild_ϕ isomorph.

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Behauptung 2}\\ \text{Behauptung 3}\\ \text{Satz 8}\\ \text{Satz 9}\end{array}\right. \Longrightarrow$$ Satz 10. Tatsächlich,

$$\begin{array}{ccc}\text{Behauptung 2} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist ein Homomorphismus}\\ \text{Satz 8} & \Longrightarrow & \mathit{Bild}_\phi \text{ ist eine Untegruppe von } \mathcal{S}_n\\ \text{Behauptung 3 + Satz 9} & \Longrightarrow & \phi \text{ ist injektiv}\end{array}$$

Da ϕ als Abbildung auf Bild_ϕ auch surjektiv ist, ist G zum Bild_ϕ isomorph. □

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.

Vorzeichen einer Permutation

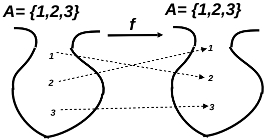
Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i, j) :=$

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

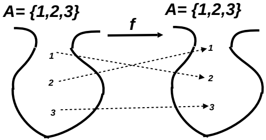
ist eine Transposition



Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$



ist eine Transposition

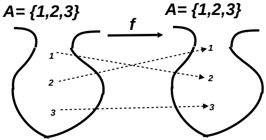
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1}$

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



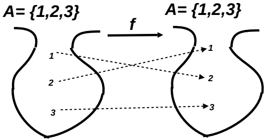
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$,

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



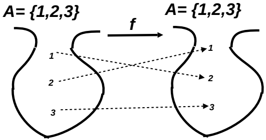
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp:

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition

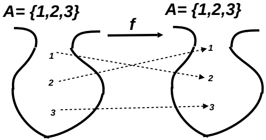


Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$



ist eine Transposition

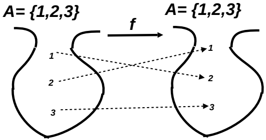
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



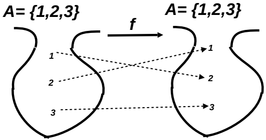
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



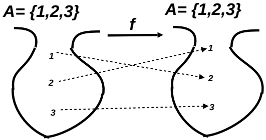
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



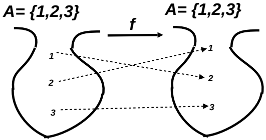
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



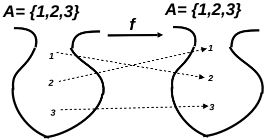
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.
Satz 11

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



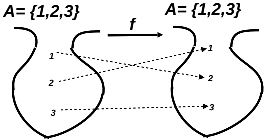
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.
Satz 11 *Jede Permutation lass sich als Produkt von Transpositionen darstellen:*

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



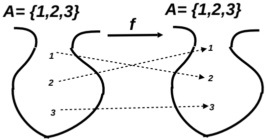
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.
Satz 11 *Jede Permutation lass sich als Produkt von Transpositionen darstellen: Für jede $P \in \mathcal{S}_n$ es gibt Transpositionen $T_1, ..., T_m \in \mathcal{S}_n$*

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition

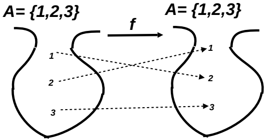


Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.
Satz 11 *Jede Permutation lass sich als Produkt von Transpositionen darstellen: Für jede $P \in \mathcal{S}_n$ es gibt Transpositionen $T_1, \ldots, T_m \in \mathcal{S}_n$ s.d. $P = T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_m$.*

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



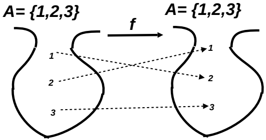
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.
Satz 11 *Jede Permutation lass sich als Produkt von Transpositionen darstellen: Für jede $P \in \mathcal{S}_n$ es gibt Transpositionen $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{S}_n$ s.d. $P = T_1 \circ T_2 \circ \dots \circ T_m$.*
Beweis:

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



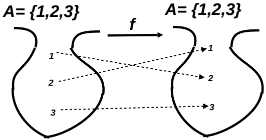
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.
Satz 11 *Jede Permutation lass sich als Produkt von Transpositionen darstellen: Für jede $P \in \mathcal{S}_n$ es gibt Transpositionen $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{S}_n$ s.d. $P = T_1 \circ T_2 \circ \dots \circ T_m$.*
Beweis: Hausaufgabe 1a Blatt 3.

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



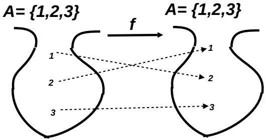
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.
Satz 11 *Jede Permutation lass sich als Produkt von Transpositionen darstellen: Für jede $P \in \mathcal{S}_n$ es gibt Transpositionen $T_1, ..., T_m \in \mathcal{S}_n$ s.d. $P = T_1 \circ T_2 \circ ... \circ T_m$.*
Beweis: Hausaufgabe 1a Blatt 3.

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



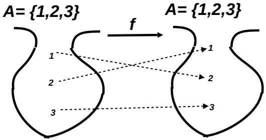
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.
Satz 11 *Jede Permutation lass sich als Produkt von Transpositionen darstellen: Für jede $P \in \mathcal{S}_n$ es gibt Transpositionen $T_1, \ldots, T_m \in \mathcal{S}_n$ s.d. $P = T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_m$.*
Beweis: Hausaufgabe 1a Blatt 3.
Bemerkung:

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



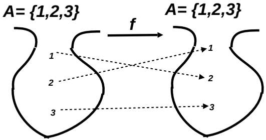
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.
Satz 11 *Jede Permutation lass sich als Produkt von Transpositionen darstellen: Für jede $P \in \mathcal{S}_n$ es gibt Transpositionen $T_1, ..., T_m \in \mathcal{S}_n$ s.d. $P = T_1 \circ T_2 \circ ... \circ T_m$.*
Beweis: Hausaufgabe 1a Blatt 3.
Bemerkung: Solche Darstellung von P ist nicht eindeutig.

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



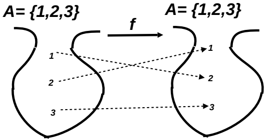
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.
Satz 11 *Jede Permutation lass sich als Produkt von Transpositionen darstellen: Für jede $P \in \mathcal{S}_n$ es gibt Transpositionen $T_1, ..., T_m \in \mathcal{S}_n$ s.d. $P = T_1 \circ T_2 \circ ... \circ T_m$.*
Beweis: Hausaufgabe 1a Blatt 3.
Bemerkung: Solche Darstellung von P ist nicht eindeutig.

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



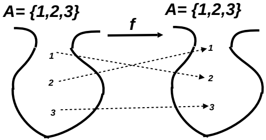
Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.
Satz 11 *Jede Permutation lass sich als Produkt von Transpositionen darstellen: Für jede $P \in \mathcal{S}_n$ es gibt Transpositionen $T_1, ..., T_m \in \mathcal{S}_n$ s.d. $P = T_1 \circ T_2 \circ ... \circ T_m$.*
Beweis: Hausaufgabe 1a Blatt 3.
Bemerkung: Solche Darstellung von P ist nicht eindeutig.
Bemerkung

Vorzeichen einer Permutation

Def. 8 Eine Permutation heißt Transposition, falls sie genau zwei Elemente vertauscht und die übrigen nicht verändert.
Bezeichnung: Die Transposition, die i und j vertauscht, werden wir $(i,j) := \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$ bezeichnen.

Bsp: $(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ist eine Transposition



Offenbar gilt: $(i,j) \circ (i,j) = Id$, also $(i,j)^{-1} = (i,j)$, und $(i,j) = (j,i)$.
Bsp: $Id := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$.
Satz 11 *Jede Permutation lass sich als Produkt von Transpositionen darstellen: Für jede $P \in \mathcal{S}_n$ es gibt Transpositionen $T_1, ..., T_m \in \mathcal{S}_n$ s.d. $P = T_1 \circ T_2 \circ ... \circ T_m$.*
Beweis: Hausaufgabe 1a Blatt 3.
Bemerkung: Solche Darstellung von P ist nicht eindeutig.
Bemerkung Wir erlauben auch Produkten von Transpositionen, die aus 0 Transpositionen bestehen (sonst ist Satz 11 falsch für $n = 1$).

Betrachte die Gruppe $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Betrachte die Gruppe $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Betrachte die Gruppe $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)
Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ wie folgt:

Betrachte die Gruppe $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)
Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen:

Betrachte die Gruppe $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)
Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$

Betrachte die Gruppe $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)
Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)
Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$
Lemma 4

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .

(D.h. für eine andere Darstellung

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)
Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$
Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .
(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .

(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$ gilt

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .

(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$ gilt m gerade $\iff$ $\tilde{m}$ gerade.)

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)
Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$
Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .
(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$ gilt
m gerade $\Longleftrightarrow$ $\tilde{m}$ gerade.)
Schema des Beweises: Wir definieren $\mathrm{SIGN}(P)$, die nicht von der Darstellung von P als Produkt T_i abhängt, und dann zeigen (Folgerung B), dass $\mathrm{SIGN} \equiv \mathrm{sign}$.

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .

(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$ gilt m gerade $\Longleftrightarrow$ $\tilde{m}$ gerade.)

Schema des Beweises: Wir definieren $\mathrm{SIGN}(P)$, die nicht von der Darstellung von P als Produkt T_i abhängt, und dann zeigen (Folgerung B), dass $\mathrm{SIGN} \equiv \mathrm{sign}$.

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\operatorname{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\operatorname{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .
(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$ gilt m gerade $\iff$ $\tilde{m}$ gerade.)

Schema des Beweises: Wir definieren $\mathrm{SIGN}(P)$, die nicht von der Darstellung von P als Produkt T_i abhängt, und dann zeigen (Folgerung B), dass $\mathrm{SIGN} \equiv \operatorname{sign}$.

Bezeichnung: Für die Zahlen $a_1, ..., a_N$ werden wir das Produkt

$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N$ wie folgt schreiben:

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .
(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$ gilt
m gerade $\Longleftrightarrow$ $\tilde{m}$ gerade.)

Schema des Beweises: Wir definieren $\mathrm{SIGN}(P)$, die nicht von der Darstellung von P als Produkt T_i abhängt, und dann zeigen (Folgerung B), dass $\mathrm{SIGN} \equiv \mathrm{sign}$.

Bezeichnung: Für die Zahlen $a_1, ..., a_N$ werden wir das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N$ wie folgt schreiben: $\prod_{i=1}^{N} a_i$,

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .
(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$ gilt
m gerade $\Longleftrightarrow$ $\tilde{m}$ gerade.)

Schema des Beweises: Wir definieren $\mathrm{SIGN}(P)$, die nicht von der Darstellung von P als Produkt T_i abhängt, und dann zeigen (Folgerung B), dass $\mathrm{SIGN} \equiv \mathrm{sign}$.

Bezeichnung: Für die Zahlen $a_1, ..., a_N$ werden wir das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N$ wie folgt schreiben: $\prod_{i=1}^{N} a_i$, oder $\prod_{i \in \{1,...,N\}} a_i$

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .

(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$ gilt m gerade $\iff$ $\tilde{m}$ gerade.)

Schema des Beweises: Wir definieren $\mathrm{SIGN}(P)$, die nicht von der Darstellung von P als Produkt T_i abhängt, und dann zeigen (Folgerung B), dass $\mathrm{SIGN} \equiv \mathrm{sign}$.

Bezeichnung: Für die Zahlen $a_1, ..., a_N$ werden wir das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N$ wie folgt schreiben: $\prod_{i=1}^{N} a_i$, oder $\prod_{i \in \{1,...,N\}} a_i$

Bsp: $n! =$

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .
(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$ gilt m gerade $\Longleftrightarrow$ $\tilde{m}$ gerade.)

Schema des Beweises: Wir definieren $\mathrm{SIGN}(P)$, die nicht von der Darstellung von P als Produkt T_i abhängt, und dann zeigen (Folgerung B), dass $\mathrm{SIGN} \equiv \mathrm{sign}$.

Bezeichnung: Für die Zahlen $a_1, ..., a_N$ werden wir das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N$ wie folgt schreiben: $\prod_{i=1}^{N} a_i$, oder $\prod_{i \in \{1,...,N\}} a_i$

Bsp: $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .
(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$ gilt m gerade $\iff$ $\tilde{m}$ gerade.)

Schema des Beweises: Wir definieren $\mathrm{SIGN}(P)$, die nicht von der Darstellung von P als Produkt T_i abhängt, und dann zeigen (Folgerung B), dass $\mathrm{SIGN} \equiv \mathrm{sign}$.

Bezeichnung: Für die Zahlen $a_1, ..., a_N$ werden wir das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N$ wie folgt schreiben: $\prod_{i=1}^{N} a_i$, oder $\prod_{i \in \{1,...,N\}} a_i$

Bsp: $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Bemerkung:

Betrachte die Gruppe $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .

(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$ gilt m gerade $\iff$ $\tilde{m}$ gerade.)

Schema des Beweises: Wir definieren $\mathrm{SIGN}(P)$, die nicht von der Darstellung von P als Produkt T_i abhängt, und dann zeigen (Folgerung B), dass $\mathrm{SIGN} \equiv \mathrm{sign}$.

Bezeichnung: Für die Zahlen $a_1, ..., a_N$ werden wir das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N$ wie folgt schreiben: $\prod_{i=1}^{N} a_i$, oder $\prod_{i \in \{1,...,N\}} a_i$

Bsp: $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Bemerkung: Statt der Menge $\{1, ..., N\}$ unten

Betrachte die Gruppe $\{-1,1\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Die Multiplikation: übliche Multipikation in $\mathbb{R}$.)

Ziel: Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

Lemma 4 Die Abbildung sign ist wohldefiniert .
(D.h. für eine andere Darstellung $P = \tilde{T}_1 \circ ... \circ \tilde{T}_{\tilde{m}}$ gilt
m gerade $\Longleftrightarrow$ $\tilde{m}$ gerade.)

Schema des Beweises: Wir definieren $\mathrm{SIGN}(P)$, die nicht von der Darstellung von P als Produkt T_i abhängt, und dann zeigen (Folgerung B), dass $\mathrm{SIGN} \equiv \mathrm{sign}$.

Bezeichnung: Für die Zahlen $a_1, ..., a_N$ werden wir das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N$ wie folgt schreiben: $\prod_{i=1}^{N} a_i$, oder $\prod_{i \in \{1,...,N\}} a_i$

Bsp: $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Bemerkung: Statt der Menge $\{1, ..., N\}$ unten kann eine beliebige Menge stehen.

Beweis des Lemmas:

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$). Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$). Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.
Bsp:

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.
Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man
$s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.
Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.
Für jede $P \in \mathcal{S}_n$,

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.

Für jede $P \in \mathcal{S}_n$, sei

$$\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} s_{ij}$$

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.
Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.
Für jede $P \in \mathcal{S}_n$, sei
$\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} s_{ij}$:= das Produkt von $s_{ij}(P)$ über aller (i,j) mit $i < j$.

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man
$s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.
Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.
Für jede $P \in \mathcal{S}_n$, sei
$\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} s_{ij}$:= das Produkt von $s_{ij}(P)$ über aller (i, j) mit $i < j$.

Bsp:

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.

Für jede $P \in \mathcal{S}_n$, sei
$\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} s_{ij}$:= das Produkt von $s_{ij}(P)$ über aller (i, j) mit $i < j$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.

Für jede $P \in \mathcal{S}_n$, sei
$\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} s_{ij}$:= das Produkt von $s_{ij}(P)$ über aller (i, j) mit $i < j$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist

$\mathrm{SIGN}(P)$

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.
Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.
Für jede $P \in \mathcal{S}_n$, sei
$\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} s_{ij}$:= das Produkt von $s_{ij}(P)$ über aller (i, j) mit $i < j$.
Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist
$\mathrm{SIGN}(P) := s_{12} \cdot s_{13} \cdot s_{23} =$

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man
$s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.
Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.
Für jede $P \in \mathcal{S}_n$, sei
$\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} s_{ij}$:= das Produkt von $s_{ij}(P)$ über aller (i, j) mit $i < j$.
Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist
$\mathrm{SIGN}(P) := s_{12} \cdot s_{13} \cdot s_{23} = \frac{1-2}{2-1} \cdot \frac{1-3}{2-3} \cdot \frac{2-3}{1-3} =$

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.

Für jede $P \in \mathcal{S}_n$, sei

$\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} s_{ij}$:= das Produkt von $s_{ij}(P)$ über aller (i, j) mit $i < j$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist

$\mathrm{SIGN}(P) := s_{12} \cdot s_{13} \cdot s_{23} = \frac{1-2}{2-1} \cdot \frac{1-3}{2-3} \cdot \frac{2-3}{1-3} = -1.$

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.

Für jede $P \in \mathcal{S}_n$, sei
$\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} s_{ij}$:= das Produkt von $s_{ij}(P)$ über aller (i, j) mit $i < j$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist
$\mathrm{SIGN}(P) := s_{12} \cdot s_{13} \cdot s_{23} = \frac{1-2}{2-1} \cdot \frac{1-3}{2-3} \cdot \frac{2-3}{1-3} = -1.$

Bsp: Für Transposition $(i, i+1)$ ist $\mathrm{SIGN}(i, i+1) = -1$.

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$). Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.

Für jede $P \in \mathcal{S}_n$, sei

$\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} s_{ij}$:= das Produkt von $s_{ij}(P)$ über aller (i, j) mit $i < j$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist

$\mathrm{SIGN}(P) := s_{12} \cdot s_{13} \cdot s_{23} = \frac{1-2}{2-1} \cdot \frac{1-3}{2-3} \cdot \frac{2-3}{1-3} = -1.$

Bsp: Für Transposition $(i, i+1)$ ist $\mathrm{SIGN}(i, i+1) = -1$.

Bemerkung

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man
$s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.
Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.
Für jede $P \in \mathcal{S}_n$, sei
$\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} s_{ij}$:= das Produkt von $s_{ij}(P)$ über aller (i, j) mit $i < j$.
Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist
$\mathrm{SIGN}(P) := s_{12} \cdot s_{13} \cdot s_{23} = \frac{1-2}{2-1} \cdot \frac{1-3}{2-3} \cdot \frac{2-3}{1-3} = -1.$
Bsp: Für Transposition $(i, i+1)$ ist $\mathrm{SIGN}(i, i+1) = -1$.
Bemerkung $\mathrm{SIGN}(P)$ ist ± 1.

Beweis des Lemmas: Sei P eine Permutation (der Menge $\{1, ..., n\}$).
Für alle Paaren $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ s.d. $i < j$ betrachte man $s_{ij}(P) := \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist $s_{12}(P) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.

Für jede $P \in \mathcal{S}_n$, sei
$\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} s_{ij}$:= das Produkt von $s_{ij}(P)$ über aller (i, j) mit $i < j$.

Bsp: Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist
$\mathrm{SIGN}(P) := s_{12} \cdot s_{13} \cdot s_{23} = \frac{1-2}{2-1} \cdot \frac{1-3}{2-3} \cdot \frac{2-3}{1-3} = -1.$

Bsp: Für Transposition $(i, i+1)$ ist $\mathrm{SIGN}(i, i+1) = -1$.

Bemerkung $\mathrm{SIGN}(P)$ ist ± 1. (Da für jedes paar (i, j) steht oben einmal $i - j$ und unten einmal entweder $i - j$ oder $j - i$.)

Lemma 5

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Lemma 5 *Für jede* $P, Q \in \mathcal{S}_n$ *gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.
Beweis:

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$SIGN(P \circ Q) = SIGN(P) \cdot SIGN(Q)$.
Beweis: Da P bijektiv ist,

Lemma 5 *Für jede* $P, Q \in \mathcal{S}_n$ *gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.
Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$
und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge;

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod\limits_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q)$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.
Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$

und $\prod\limits_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge;

also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) \ = \prod\limits_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))}$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge;

also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} = \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))}$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$
$\prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} = \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A

Lemma 5 *Für jede* $P, Q \in \mathcal{S}_n$ *gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$
$\prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i, j) ist $\mathrm{SIGN}(i, j) = -1$.

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} = \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i, j) ist $\mathrm{SIGN}(i, j) = -1$.
Tatsächlich, die Transposition
$(i, j) =$,

, □

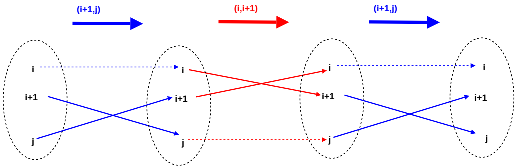
□

Lemma 5 *Für jede* $P, Q \in \mathcal{S}_n$ *gilt:*
$SIGN(P \circ Q) = SIGN(P) \cdot SIGN(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} = \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i, j) ist $\mathrm{SIGN}(i, j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i, j) = (i+1, j) \circ (i, i+1) \circ (i+1, j)$,



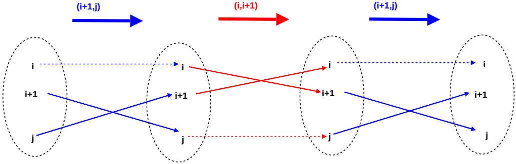
, $\square$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod\limits_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod\limits_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$
$\prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i,j) ist $\mathrm{SIGN}(i,j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i,j) = (i+1,j) \circ (i,i+1) \circ (i+1,j)$, und deswegen



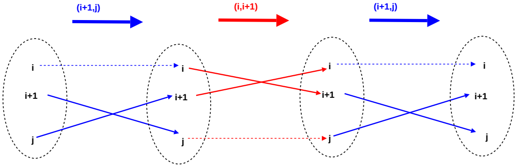
$\mathrm{SIGN}(i,j) =$,

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$SIGN(P \circ Q) = SIGN(P) \cdot SIGN(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$
$\prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i, j) ist $\mathrm{SIGN}(i, j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i, j) = (i+1, j) \circ (i, i+1) \circ (i+1, j)$, und deswegen



$$\mathrm{SIGN}(i, j) = \mathrm{SIGN}(i+1, j) \cdot \mathrm{SIGN}(i, i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1, j) \quad ,$$

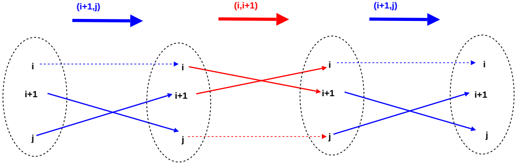
$\square$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$
$\prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i, j) ist $\mathrm{SIGN}(i, j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i, j) = (i+1, j) \circ (i, i+1) \circ (i+1, j)$, und deswegen



$\mathrm{SIGN}(i, j) = \mathrm{SIGN}(i+1, j) \cdot \mathrm{SIGN}(i, i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1, j) = -1 \cdot (\pm 1)^2$, $\square$

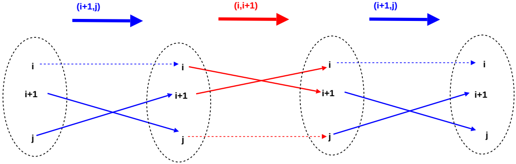
$\square$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:* $SIGN(P \circ Q) = SIGN(P) \cdot SIGN(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} = \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i,j) ist $\mathrm{SIGN}(i,j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i,j) = (i+1,j) \circ (i,i+1) \circ (i+1,j)$, und deswegen



$$\mathrm{SIGN}(i,j) = \mathrm{SIGN}(i+1,j) \cdot \mathrm{SIGN}(i,i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1,j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1, \qquad \square$$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$SIGN(P \circ Q) = SIGN(P) \cdot SIGN(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$

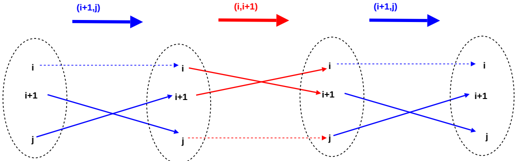
und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge;

also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$

$\prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i,j) ist $\mathrm{SIGN}(i,j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i,j) = (i+1,j) \circ (i,i+1) \circ (i+1,j)$, und deswegen



$\mathrm{SIGN}(i,j) = \mathrm{SIGN}(i+1,j) \cdot \mathrm{SIGN}(i,i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1,j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1,$ $\square$

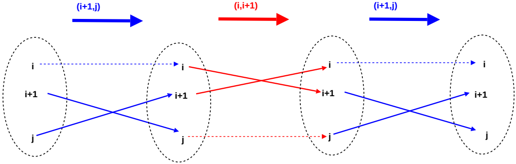
Folgerung B

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$
$\prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i,j) ist $\mathrm{SIGN}(i,j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i,j) = (i+1,j) \circ (i,i+1) \circ (i+1,j)$, und deswegen



$\mathrm{SIGN}(i,j) = \mathrm{SIGN}(i+1,j) \cdot \mathrm{SIGN}(i,i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1,j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1,$ $\square$

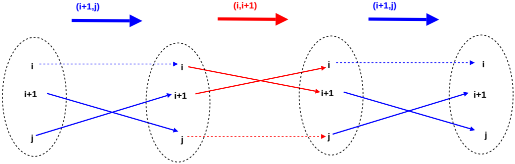
Folgerung B $\forall P \in \mathcal{S}_n$ gilt $\mathrm{SIGN}(P) = \mathrm{sign}(P)$.

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$SIGN(P \circ Q) = SIGN(P) \cdot SIGN(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$
$\prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i, j) ist $\mathrm{SIGN}(i, j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i, j) = (i+1, j) \circ (i, i+1) \circ (i+1, j)$, und deswegen



$\mathrm{SIGN}(i, j) = \mathrm{SIGN}(i+1, j) \cdot \mathrm{SIGN}(i, i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1, j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1$, $\square$

Folgerung B $\forall P \in \mathcal{S}_n$ gilt $\mathrm{SIGN}(P) = \mathrm{sign}(P)$. **Beweis:**

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

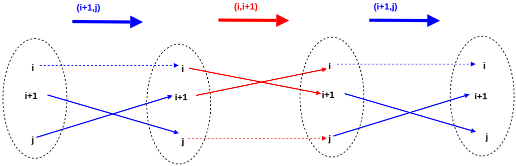
Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge;

also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$

$\prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i, j) ist $\mathrm{SIGN}(i, j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i, j) = (i+1, j) \circ (i, i+1) \circ (i+1, j)$, und deswegen



$\mathrm{SIGN}(i, j) = \mathrm{SIGN}(i+1, j) \cdot \mathrm{SIGN}(i, i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1, j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1,$ $\square$

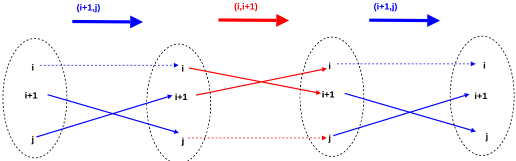
Folgerung B $\forall P \in \mathcal{S}_n$ gilt $\mathrm{SIGN}(P) = \mathrm{sign}(P)$. **Beweis:**
$\mathrm{SIGN}(P) \overset{\text{Satz 11}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1 \circ \ldots \circ T_m)$

Lemma 5 *Für jede* $P, Q \in \mathcal{S}_n$ *gilt:*
$SIGN(P \circ Q) = SIGN(P) \cdot SIGN(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} = \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i,j) ist $\mathrm{SIGN}(i,j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i,j) = (i+1, j) \circ (i, i+1) \circ (i+1, j)$, und deswegen



$\mathrm{SIGN}(i,j) = \mathrm{SIGN}(i+1,j) \cdot \mathrm{SIGN}(i,i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1,j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1,$

Folgerung B $\forall P \in \mathcal{S}_n$ gilt $\mathrm{SIGN}(P) = \mathrm{sign}(P)$. **Beweis:**
$\mathrm{SIGN}(P) \overset{\text{Satz } 11}{=} \mathrm{SIGN}(T_1 \circ \ldots \circ T_m) \overset{\text{Lem } 5}{=} \mathrm{SIGN}(T_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{SIGN}(T_m) = (-1)^m$

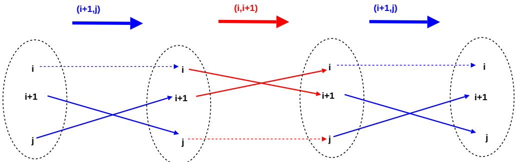
Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$

$$\prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q).$$

Folgerung A Für jede Transposition (i, j) ist $\mathrm{SIGN}(i, j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i, j) = (i+1, j) \circ (i, i+1) \circ (i+1, j)$, und deswegen



$$\mathrm{SIGN}(i, j) = \mathrm{SIGN}(i+1, j) \cdot \mathrm{SIGN}(i, i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1, j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1, \quad \square$$

Folgerung B $\forall P \in \mathcal{S}_n$ gilt $\mathrm{SIGN}(P) = \mathrm{sign}(P)$. **Beweis:**

$$\mathrm{SIGN}(P) \overset{\text{Satz 11}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1 \circ \ldots \circ T_m) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{SIGN}(T_m) = (-1)^m = \mathrm{sign}(P),$$

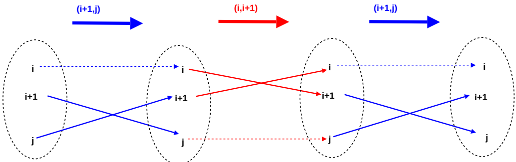
$\square$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathcal{SIGN}(P \circ Q) = \mathcal{SIGN}(P) \cdot \mathcal{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod\limits_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod\limits_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} = \prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i,j) ist $\mathrm{SIGN}(i,j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i,j) = (i+1,j) \circ (i,i+1) \circ (i+1,j)$, und deswegen



$$\mathrm{SIGN}(i,j) = \mathrm{SIGN}(i+1,j) \cdot \mathrm{SIGN}(i,i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1,j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1, \qquad \square$$

Folgerung B $\forall P \in \mathcal{S}_n$ gilt $\mathrm{SIGN}(P) = \mathrm{sign}(P)$. **Beweis:**

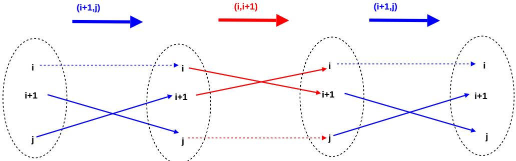
$$\mathrm{SIGN}(P) \overset{\text{Satz 11}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1 \circ \ldots \circ T_m) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{SIGN}(T_m) = (-1)^m = \mathrm{sign}(P), \qquad \square$$

$\square$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod\limits_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod\limits_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$
$\prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i, j) ist $\mathrm{SIGN}(i, j) = -1$.



Tatsächlich, die Transposition $(i, j) = (i+1, j) \circ (i, i+1) \circ (i+1, j)$, und deswegen

$$\mathrm{SIGN}(i, j) = \mathrm{SIGN}(i+1, j) \cdot \mathrm{SIGN}(i, i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1, j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1, \qquad \square$$

Folgerung B $\forall P \in \mathcal{S}_n$ gilt $\mathrm{SIGN}(P) = \mathrm{sign}(P)$. **Beweis:**

$$\mathrm{SIGN}(P) \overset{\text{Satz 11}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1 \circ \ldots \circ T_m) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{SIGN}(T_m) = (-1)^m = \mathrm{sign}(P), \qquad \square$$

Folgerung C

$\square$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$

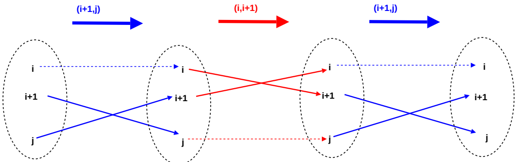
und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge;

also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$

$\prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i, j) ist $\mathrm{SIGN}(i, j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i, j) = (i+1, j) \circ (i, i+1) \circ (i+1, j)$, und deswegen



$\mathrm{SIGN}(i, j) = \mathrm{SIGN}(i+1, j) \cdot \mathrm{SIGN}(i, i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1, j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1,$ $\square$

Folgerung B $\forall P \in \mathcal{S}_n$ gilt $\mathrm{SIGN}(P) = \mathrm{sign}(P)$. **Beweis:**

$\mathrm{SIGN}(P) \overset{\text{Satz 11}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1 \circ \ldots \circ T_m) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{SIGN}(T_m) = (-1)^m = \mathrm{sign}(P),$ $\square$

Folgerung C sign ist wolhdefiniert und ist Homomorphismus von $\mathcal{S}_n$ nach $(\{-1, 1\}, \cdot)$.

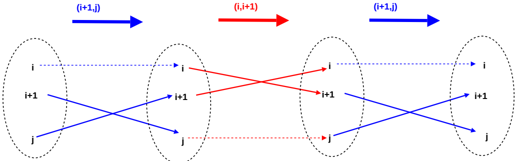
$\square$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathcal{SIGN}(P \circ Q) = \mathcal{SIGN}(P) \cdot \mathcal{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$
$\prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i,j) ist $\mathrm{SIGN}(i,j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i,j) = (i+1, j) \circ (i, i+1) \circ (i+1, j)$, und deswegen



$\mathrm{SIGN}(i,j) = \mathrm{SIGN}(i+1, j) \cdot \mathrm{SIGN}(i, i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1, j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1$, $\square$

Folgerung B $\forall P \in \mathcal{S}_n$ gilt $\mathrm{SIGN}(P) = \mathrm{sign}(P)$. **Beweis:**
$\mathrm{SIGN}(P) \overset{\text{Satz 11}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1 \circ \ldots \circ T_m) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{SIGN}(T_m) = (-1)^m = \mathrm{sign}(P)$, $\square$

Folgerung C sign ist wolhdefiniert und ist Homomorphismus von $\mathcal{S}_n$ nach $(\{-1, 1\}, \cdot)$. **Beweis:**

$\square$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathit{SIGN}(P \circ Q) = \mathit{SIGN}(P) \cdot \mathit{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$

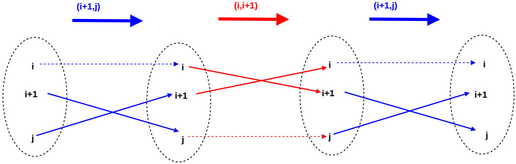
und $\prod_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge;

also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$

$\prod_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i,j) ist $\mathrm{SIGN}(i,j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i,j) = (i+1,j) \circ (i,i+1) \circ (i+1,j)$, und deswegen



$\mathrm{SIGN}(i,j) = \mathrm{SIGN}(i+1,j) \cdot \mathrm{SIGN}(i,i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1,j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1,$ $\square$

Folgerung B $\forall P \in \mathcal{S}_n$ gilt $\mathrm{SIGN}(P) = \mathrm{sign}(P)$. **Beweis:**
$\mathrm{SIGN}(P) \overset{\text{Satz 11}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1 \circ \ldots \circ T_m) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{SIGN}(T_m) = (-1)^m = \mathrm{sign}(P),$ $\square$

Folgerung C sign ist wolhdefiniert und ist Homomorphismus von $\mathcal{S}_n$ nach $(\{-1,1\}, \cdot)$. **Beweis:** SIGN ist wolhdefiniert

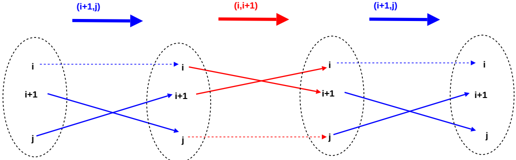
$\square$

Lemma 5 *Für jede $P, Q \in \mathcal{S}_n$ gilt:*
$\mathcal{SIGN}(P \circ Q) = \mathcal{SIGN}(P) \cdot \mathcal{SIGN}(Q)$.

Beweis: Da P bijektiv ist, haben die Produkte $\mathrm{SIGN}(P) := \prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{P(i)-P(j)}$ und $\prod\limits_{i<j} \frac{(Q(i)-Q(j))}{(P(Q(i))-P(Q(j)))}$ die gleichen Faktoren, nur in anderer Reihenfolge; also ist $\mathrm{SIGN}(P) \cdot \mathrm{SIGN}(Q) = \prod\limits_{i<j} \frac{Q(i)-Q(j)}{P(Q(i))-P(Q(j))} \cdot \prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{Q(i)-Q(j)} =$
$\prod\limits_{i<j} \frac{i-j}{P(Q(i))-P(Q(j))} := \mathrm{SIGN}(P \circ Q)$.

Folgerung A Für jede Transposition (i,j) ist $\mathrm{SIGN}(i,j) = -1$.

Tatsächlich, die Transposition $(i,j) = (i+1,j) \circ (i,i+1) \circ (i+1,j)$, und deswegen



$\mathrm{SIGN}(i,j) = \mathrm{SIGN}(i+1,j) \cdot \mathrm{SIGN}(i,i+1) \cdot \mathrm{SIGN}(i+1,j) = -1 \cdot (\pm 1)^2 = -1,$ $\square$

Folgerung B $\forall P \in \mathcal{S}_n$ gilt $\mathrm{SIGN}(P) = \mathrm{sign}(P)$. **Beweis:**
$\mathrm{SIGN}(P) \overset{\text{Satz 11}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1 \circ \ldots \circ T_m) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{SIGN}(T_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{SIGN}(T_m) = (-1)^m = \mathrm{sign}(P),$ $\square$

Folgerung C sign ist wolhdefiniert und ist Homomorphismus von $\mathcal{S}_n$ nach $(\{-1,1\},\cdot)$. **Beweis:** SIGN ist wolhdefiniert und ist nach Lemma 5 ein Homomorphismus von $\mathcal{S}_n$ nach $(\{-1,1\},\cdot)$. $\square$

Bezeichung: $\mathit{Kern}_{\mathrm{sign}} = \{P \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(P) = 1\}$ wird $\mathcal{A}_n$ bezeichnen und die Gruppe von geraden Permutationen genannt.

$\mathcal{A}_n$ ist eine Untegruppe von $\mathcal{S}_n$

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Äquivalenzrelation

Sei A eine Menge. Eine Relation (auf der Menge) ist eine Teilmenge R der Menge $A \times A$.

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Äquivalenzrelation

Sei A eine Menge. Eine Relation (auf der Menge) ist eine Teilmenge R der Menge $A \times A$.
Wiederhol: Das Produkt von Mengen A, B (Bez: $A \times B$) ist die Mengen aller Paaren (a, b), wobei $a \in A$, $b \in B$ ist.

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Äquivalenzrelation

Sei A eine Menge. Eine Relation (auf der Menge) ist eine Teilmenge R der Menge $A \times A$.
(Wir schreiben $a \sim b$ und sagen dass die Elemente a, b in Relation zueinander stehen falls $(a, b) \in R$.)

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Äquivalenzrelation

Sei A eine Menge. Eine Relation (auf der Menge) ist eine Teilmenge R der Menge $A \times A$.
(Wir schreiben $a \sim b$ und sagen dass die Elemente a, b in Relation zueinander stehen falls $(a, b) \in R$.)
Eine Relation heißt eine Äquivalenzrelation, falls sie die folgende Eigenschaften hat:

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Äquivalenzrelation

Sei A eine Menge. Eine Relation (auf der Menge) ist eine Teilmenge R der Menge $A \times A$.
(Wir schreiben $a \sim b$ und sagen dass die Elemente a, b in Relation zueinander stehen falls $(a, b) \in R$.)
Eine Relation heißt eine Äquivalenzrelation, falls sie die folgende Eigenschaften hat:

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Äquivalenzrelation

Sei A eine Menge. Eine Relation (auf der Menge) ist eine Teilmenge R der Menge $A \times A$.
(Wir schreiben $a \sim b$ und sagen dass die Elemente a, b in Relation zueinander stehen falls $(a, b) \in R$.)
Eine Relation heißt eine Äquivalenzrelation, falls sie die folgende Eigenschaften hat:

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Äquivalenzrelation

Sei A eine Menge. Eine Relation (auf der Menge) ist eine Teilmenge R der Menge $A \times A$.
(Wir schreiben $a \sim b$ und sagen dass die Elemente a, b in Relation zueinander stehen falls $(a, b) \in R$.)
Eine Relation heißt eine Äquivalenzrelation, falls sie die folgende Eigenschaften hat:

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 1: A sei die Menge aller Nutztiere in einem landwirtschaftlichen Betrieb.
Wir definieren nun eine Relation: zwei Tiere stehen in Relation zueinander, wenn sie von derselben Art sind.
Die Kuh Erna zum Beispiel steht mit dem Ochsen Bruno in Relation, aber nicht mit dem Huhn Betti.
Dies ist eine Äquivalenzrelation: Jedes Tier ist von derselben Art wie es selbst (= "reflexiv"). Ist ein Tier von derselben Art wie das andere, dann ist das andere auch von derselben Art wie das eine (= "symmetrisch"). Wenn Erna und Lisa von derselben Art sind und Lisa und Bruno von derselben Art, dann sind Erna und Bruno von derselben Art (z.B. Rinder; = "transitiv").

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$
Bsp 4: Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ (d.h., $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$) ist keine Äquivalenzrelation.

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$
Bsp 4: Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ (d.h., $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$) ist keine Äquivalenzrelation.
Wicht. Bsp: Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere "$\sim$" wie folgt: $g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$.

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$
Bsp 4: Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ (d.h., $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$) ist keine Äquivalenzrelation.
Wicht. Bsp: Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere "$\sim$" wie folgt: $g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$.

- **Reflexivität:**

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$
Bsp 4: Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ (d.h., $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$) ist keine Äquivalenzrelation.
Wicht. Bsp: Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere "$\sim$" wie folgt: $g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$.

- **Reflexivität:** $g = \underbrace{e}_{\in H} g$.

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$
Bsp 4: Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ (d.h., $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$) ist keine Äquivalenzrelation.
Wicht. Bsp: Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere "$\sim$" wie folgt: $g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$.

- **Reflexivität:** $g = \underbrace{e}_{\in H} g$.
- **Symmetrie:**

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$
Bsp 4: Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ (d.h., $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$) ist keine Äquivalenzrelation.
Wicht. Bsp: Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere "$\sim$" wie folgt: $g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$.

- **Reflexivität:** $g = \underbrace{e}_{\in H} g$.
- **Symmetrie:** Ist $hg_1 = g_2$,

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$
Bsp 4: Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ (d.h., $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$) ist keine Äquivalenzrelation.
Wicht. Bsp: Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere "$\sim$" wie folgt: $g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$.

- **Reflexivität:** $g = \underbrace{e}_{\in H} g$.
- **Symmetrie:** Ist $hg_1 = g_2$, so ist $g_1 = \underbrace{h^{-1}} g_2$.

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$
Bsp 4: Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ (d.h., $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$) ist keine Äquivalenzrelation.
Wicht. Bsp: Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere "$\sim$" wie folgt: $g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$.

- **Reflexivität:** $g = \underbrace{e}_{\in H} g$.
- **Symmetrie:** Ist $hg_1 = g_2$, so ist $g_1 = \underbrace{h^{-1}}_{\in H} g_2$.

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$
Bsp 4: Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ (d.h., $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$) ist keine Äquivalenzrelation.
Wicht. Bsp: Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere "$\sim$" wie folgt: $g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$.

- **Reflexivität:** $g = \underbrace{e}_{\in H} g$.
- **Symmetrie:** Ist $hg_1 = g_2$, so ist $g_1 = \underbrace{h^{-1}}_{\in H} g_2$.
- **Transitivität:**

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$

Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$

Bsp 4: Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ (d.h., $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$) ist keine Äquivalenzrelation.

Wicht. Bsp: Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere "$\sim$" wie folgt: $g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$.

- **Reflexivität:** $g = \underbrace{e}_{\in H} g$.
- **Symmetrie:** Ist $hg_1 = g_2$, so ist $g_1 = \underbrace{h^{-1}}_{\in H} g_2$.
- **Transitivität:** Ist $h_1 g_1 = g_2$ und $h_2 g_2 = g_3$,

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$
Bsp 4: Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ (d.h., $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$) ist keine Äquivalenzrelation.
Wicht. Bsp: Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere "$\sim$" wie folgt: $g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$.

- **Reflexivität:** $g = \underbrace{e}_{\in H} g$.
- **Symmetrie:** Ist $hg_1 = g_2$, so ist $g_1 = \underbrace{h^{-1}}_{\in H} g_2$.
- **Transitivität:** Ist $h_1 g_1 = g_2$ und $h_2 g_2 = g_3$, so ist $\underbrace{h_2 h_1}_{} g_1 = g_3$.

- **(Reflexivität)** $\forall a \in A$ ist $a \sim a$.
- **(Symmetrie)** $\forall a, b \in A$ gilt: ist $a \sim b$, so ist $b \sim a$.
- **(Transitivität)** $\forall a, b, c \in A$ gilt: ist $a \sim b$ und ist $b \sim c$ so ist $a \sim c$.

Bsp 2. Triviale Relation. Jedes Element steht nur mit sich selbst in Relation. $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Bsp 3. Jede zwei Elemente stehen in Relation. $R = A \times A$
Bsp 4: Die Relation $\geq$ auf $\mathbb{R}$ (d.h., $R = \{(x, y) \mid x \geq y\}$) ist keine Äquivalenzrelation.
Wicht. Bsp: Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Definiere "$\sim$" wie folgt: $g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$.

- **Reflexivität:** $g = \underbrace{e}_{\in H} g$.
- **Symmetrie:** Ist $hg_1 = g_2$, so ist $g_1 = \underbrace{h^{-1}}_{\in H} g_2$.
- **Transitivität:** Ist $h_1 g_1 = g_2$ und $h_2 g_2 = g_3$, so ist $\underbrace{h_2 h_1}_{h \in H} g_1 = g_3$.

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup\limits_{M_i \in \mathbb{M}} M_i :=$

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup\limits_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup ...$

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup ... = M$

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, \ldots\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

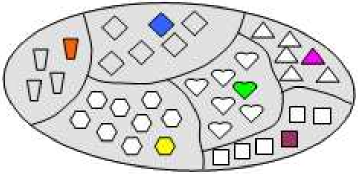
(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, \ldots\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

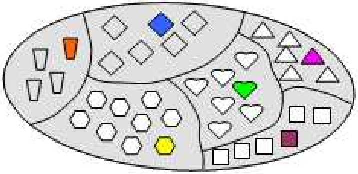
(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:



(I) $\bigcup\limits_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup ... = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.

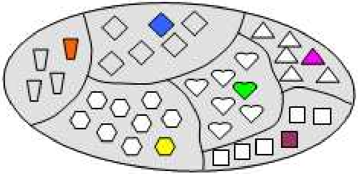
(**In Worten:**

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup ... = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



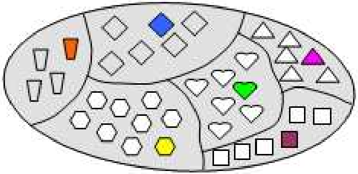
(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup\limits_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

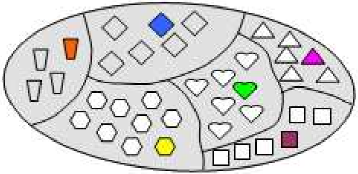
Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, \dots\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \dots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

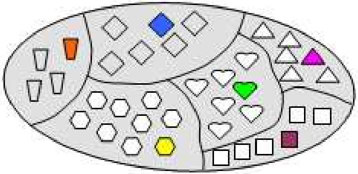
Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M.

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup ... = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

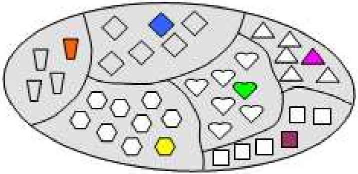
Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt:

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

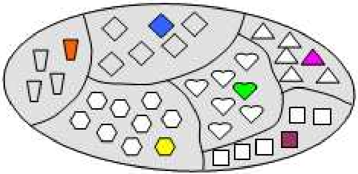
Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, \ldots\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup\limits_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

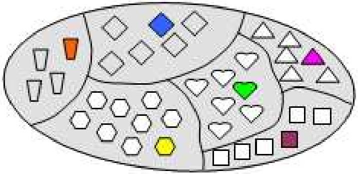
- **Reflexivität:** $x \sim x$

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, \dots\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \dots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

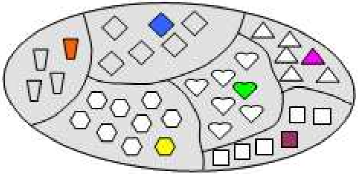
- **Reflexivität:** $x \sim x$ offensichtlich.

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

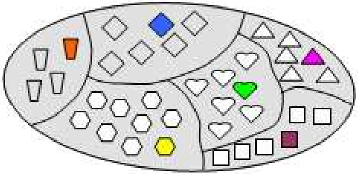
- **Reflexivität:** $x \sim x$ offensichtlich.
- **Symmetrie:**

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, \ldots\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

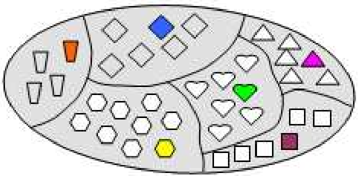
- **Reflexivität:** $x \sim x$ offensichtlich.
- **Symmetrie:** Falls x, y in der gleichen M_i liegen,

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, \ldots\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

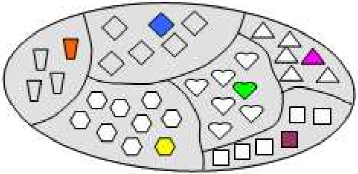
- **Reflexivität:** $x \sim x$ offensichtlich.
- **Symmetrie:** Falls x, y in der gleichen M_i liegen, so liegen y, x auch in der gleichen Menge M_i

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, \ldots\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

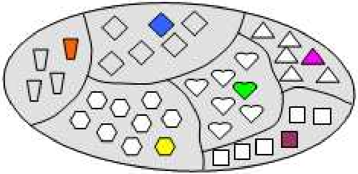
- **Reflexivität:** $x \sim x$ offensichtlich.
- **Symmetrie:** Falls x, y in der gleichen M_i liegen, so liegen y, x auch in der gleichen Menge M_i
- **Transitivität:**

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup ... = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

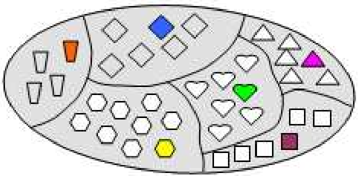
- **Reflexivität:** $x \sim x$ offensichtlich.
- **Symmetrie:** Falls x, y in der gleichen M_i liegen, so liegen y, x auch in der gleichen Menge M_i
- **Transitivität:** Liegen x, y in der gleichen M_i,

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, \ldots\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

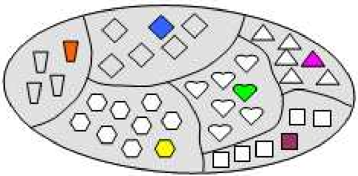
- **Reflexivität:** $x \sim x$ offensichtlich.
- **Symmetrie:** Falls x, y in der gleichen M_i liegen, so liegen y, x auch in der gleichen Menge M_i
- **Transitivität:** Liegen x, y in der gleichen M_i, und liegen y, z in der gleichen M_j,

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, \ldots\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

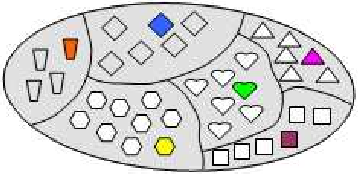
- **Reflexivität:** $x \sim x$ offensichtlich.
- **Symmetrie:** Falls x, y in der gleichen M_i liegen, so liegen y, x auch in der gleichen Menge M_i
- **Transitivität:** Liegen x, y in der gleichen M_i, und liegen y, z in der gleichen M_j, so gilt $M_i = M_j$,

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, ...\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup ... = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

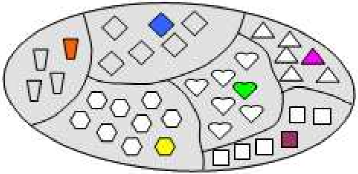
- **Reflexivität:** $x \sim x$ offensichtlich.
- **Symmetrie:** Falls x, y in der gleichen M_i liegen, so liegen y, x auch in der gleichen Menge M_i
- **Transitivität:** Liegen x, y in der gleichen M_i, und liegen y, z in der gleichen M_j, so gilt $M_i = M_j$, weil y nur in einer M_i liegt.

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, \ldots\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

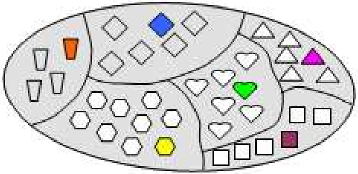
- **Reflexivität:** $x \sim x$ offensichtlich.
- **Symmetrie:** Falls x, y in der gleichen M_i liegen, so liegen y, x auch in der gleichen Menge M_i
- **Transitivität:** Liegen x, y in der gleichen M_i, und liegen y, z in der gleichen M_j, so gilt $M_i = M_j$, weil y nur in einer M_i liegt. Dann ist $x \sim z$.

Zerlegung einer Menge: http://henked.de/begriffe/aequivalenzrelation.htm

Zerlegung einer nichtleeren Menge M ist eine Menge $\mathbb{M} = \{M_1, M_2, \ldots\}$ von Teilmengen von M mit den Eigenschaften:

(I) $\bigcup_{M_i \in \mathbb{M}} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots = M$

(II) $M_i \cap M_k = \varnothing$, falls $M_i \neq M_k$.



(**In Worten:** jedes Element von M ist in genau einer dieser Teilmengen von M enthalten.)

Bemerkung: Jede Zerlegung induziert eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei $\mathbb{M}$ eine Zerlegung von M. Wir definieren die Relation $R \subseteq M \times M$ wie folgt: $x \sim y \iff x, y \in M_i$ für ein $M_i \in \mathbb{M}$.

- **Reflexivität:** $x \sim x$ offensichtlich.
- **Symmetrie:** Falls x, y in der gleichen M_i liegen, so liegen y, x auch in der gleichen Menge M_i
- **Transitivität:** Liegen x, y in der gleichen M_i, und liegen y, z in der gleichen M_j, so gilt $M_i = M_j$, weil y nur in einer M_i liegt. Dann ist $x \sim z$.

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$.

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und
$\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis:

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist,

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup\limits_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$,

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und
$\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup\limits_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup\limits_{x \in M} [x]$.

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und
$\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup\limits_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup\limits_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$:

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und
$\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist,

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und
$\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$.

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup\limits_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup\limits_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angenommen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$.

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.:

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und
$\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$,

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und
$\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$;

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$; und (b) $[y] \subseteq [x]$,

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$; und (b) $[y] \subseteq [x]$, d.h., $w \sim y \Longrightarrow w \sim x$.

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$; und (b) $[y] \subseteq [x]$, d.h., $w \sim y \Longrightarrow w \sim x$.

(a)

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$; und (b) $[y] \subseteq [x]$, d.h., $w \sim y \Longrightarrow w \sim x$.

(a) Aus $w \sim x$ und $\underbrace{x \sim z}_{\text{Symmetrie}}$

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angenommen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$; und (b) $[y] \subseteq [x]$, d.h., $w \sim y \Longrightarrow w \sim x$.

(a) Aus $w \sim x$ und $\underbrace{x \sim z}_{\text{Symmetrie}} \stackrel{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} w \sim z$.

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und
$\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup\limits_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup\limits_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$; und (b) $[y] \subseteq [x]$, d.h., $w \sim y \Longrightarrow w \sim x$.

(a) Aus $w \sim x$ und $\underbrace{x \sim z}_{\text{Symmetrie}} \overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} w \sim z$. Also, $w \sim z$

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup\limits_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup\limits_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$; und (b) $[y] \subseteq [x]$, d.h., $w \sim y \Longrightarrow w \sim x$.

(a) Aus $w \sim x$ und $\underbrace{x \sim z}_{\text{Symmetrie}} \overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} w \sim z$. Also, $w \sim z$ und

$z \sim y$

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$; und (b) $[y] \subseteq [x]$, d.h., $w \sim y \Longrightarrow w \sim x$.

(a) Aus $w \sim x$ und $\underbrace{x \sim z}_{\text{Symmetrie}} \overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} w \sim z$. Also, $w \sim z$ und

$z \sim y \overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow}$

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$; und (b) $[y] \subseteq [x]$, d.h., $w \sim y \Longrightarrow w \sim x$.

(a) Aus $w \sim x$ und $\underbrace{x \sim z}_{\text{Symmetrie}} \overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} w \sim z$. Also, $w \sim z$ und

$z \sim y \overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} w \sim y$,

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$; und (b) $[y] \subseteq [x]$, d.h., $w \sim y \Longrightarrow w \sim x$.

(a) Aus $w \sim x$ und $\underbrace{x \sim z}_{\text{Symmetrie}} \xRightarrow{\text{Transitivität}} w \sim z$. Also, $w \sim z$ und

$z \sim y \xRightarrow{\text{Transitivität}} w \sim y$, also $w \in [y]$.

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und
$\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angenommen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$; und (b) $[y] \subseteq [x]$, d.h., $w \sim y \Longrightarrow w \sim x$.

(a) Aus $w \sim x$ und $\underbrace{x \sim z}_{\text{Symmetrie}} \overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} w \sim z$. Also, $w \sim z$ und

$z \sim y \overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} w \sim y$, also $w \in [y]$.

(b) ist analog. $\square$

Jede Äquivalenzrelation induziert eine Zerlegung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf $M \neq \varnothing$. Dann für jedes $x \in M$ definiere $[x] := \{y \in M \mid x \sim y\} \subseteq M$ und $\mathbb{M} := \{[x] | x \in M\}$.

Satz 12 $\mathbb{M}$ ist eine Zerlegung von M

Beweis: Z.z.: (I) $\bigcup_{x \in M} [x] = M$ und (II) $[x] \cap [y] \neq \varnothing \iff [x] = [y]$.

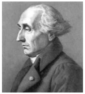
(I) Da $y \sim y$ ist, ist $y \in [y]$, und deswegen $y \in \bigcup_{x \in M} [x]$.

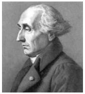
(II) $\Longleftarrow$: offensichtlich, da $[x] \neq \varnothing$ ist.
$\Longrightarrow$: Angennomen, $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ ist, also $\exists z \in [x] \cap [y]$. Dann ist $z \sim x$ und $z \sim y$. Z.z.: (a) $[x] \subseteq [y]$, d.h., $w \sim x \Longrightarrow w \sim y$; und (b) $[y] \subseteq [x]$, d.h., $w \sim y \Longrightarrow w \sim x$.

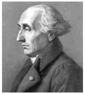
(a) Aus $w \sim x$ und $\underbrace{x \sim z}_{\text{Symmetrie}} \overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} w \sim z$. Also, $w \sim z$ und $z \sim y \overset{\text{Transitivität}}{\Longrightarrow} w \sim y$, also $w \in [y]$.

(b) ist analog. $\square$

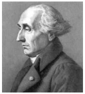
Satz 13

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G.*

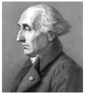
Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt:*

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt:* $\#G \,\vdots\, \#H$.

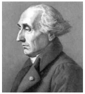
In Worten:

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt:* $\#G \;\vdots\; \#H$.

In Worten: *Ordnung der Untergruppe*

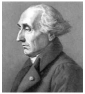
Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt:* $\#G \,\vdots\, \#H.$

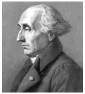
In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit:

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \vdots \#H$.*
In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*
Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe.
Dann ist "$\sim$":
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

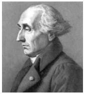
Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt:* $\#G \;\vdots\; \#H$.

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen.

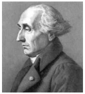
Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \vdots \#H$.*

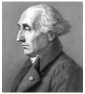
In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

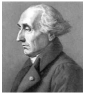
Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \Longleftrightarrow \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*
In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*
Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.
Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$.

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt:* $\#G \,\vdots\, \#H$.
In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*
Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.
Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,
$[g_1] :=$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

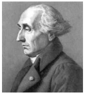
In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} =$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

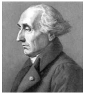
Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$.

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

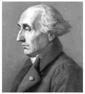
Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

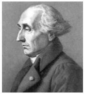
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$,

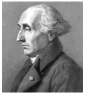
Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*
In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*
Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.
Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,
$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,
$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

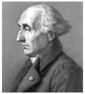
Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt:* $\#G \,\vdots\, \#H$.

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.
Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,
$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,
$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung:

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \vdots \#H$.*
In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*
Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.
Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,
$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,
$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.
Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert.

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt:* $\#G \,\vdots\, \#H$.

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

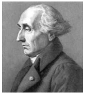
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

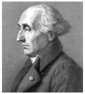
Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a):

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt:* $\#G \,\vdots\, \#H$.

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

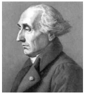
Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$,

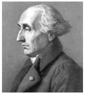
Satz 13 **(Lagrange**  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt:* $\#G \,\vdots\, \#H$.

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.
Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,
$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,
$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist
$\phi(g) =$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

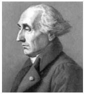
$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

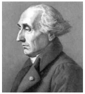
$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

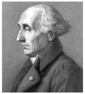
$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h}$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \vdots \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

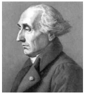
$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

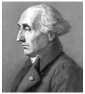
$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2$$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

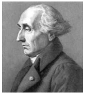
$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2 \in [g_2]$$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \;\vdots\; \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

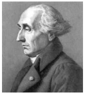
Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.
Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,
$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,
$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2 \in [g_2] .$$

Beweis (b):

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \vdots \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

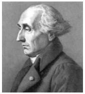
$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2 \in [g_2] .$$

Beweis (b): Die Abbildung $\psi : [g_2] \to [g_1]$,

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

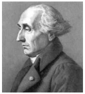
$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2 \in [g_2]\ .$$

Beweis (b): Die Abbildung $\psi : [g_2] \to [g_1]$, $\psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \vdots \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

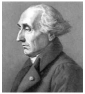
$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2 \in [g_2] .$$

Beweis (b): Die Abbildung $\psi : [g_2] \to [g_1]$, $\psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1$ ist die Inverse Abbildung zu ϕ.

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

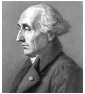
Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":
$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.
Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,
$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,
$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist
$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2 \in [g_2]\,.$$

Beweis (b): Die Abbildung $\psi : [g_2] \to [g_1]$, $\psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1$ ist die Inverse Abbildung zu ϕ. Tatsächlich,

$\psi \circ \phi(g) =$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

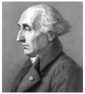
Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2 \in [g_2]\,.$$

Beweis (b): Die Abbildung $\psi : [g_2] \to [g_1]$, $\psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1$ ist die Inverse Abbildung zu ϕ. Tatsächlich,

$\psi \circ \phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \vdots \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

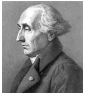
Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2 \in [g_2] .$$

Beweis (b): Die Abbildung $\psi : [g_2] \to [g_1]$, $\psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1$ ist die Inverse Abbildung zu ϕ. Tatsächlich,

$\psi \circ \phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot g_2^{-1} \cdot g_1$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \vdots \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

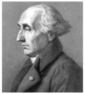
Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2 \in [g_2] .$$

Beweis (b): Die Abbildung $\psi : [g_2] \to [g_1]$, $\psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1$ ist die Inverse Abbildung zu ϕ. Tatsächlich,

$\psi \circ \phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot g_2^{-1} \cdot g_1 = g$ und $\phi \circ \psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1 \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = g$

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \,\vdots\, \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

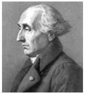
Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2 \in [g_2] .$$

Beweis (b): Die Abbildung $\psi : [g_2] \to [g_1]$, $\psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1$ ist die Inverse Abbildung zu ϕ. Tatsächlich,

$\psi \circ \phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot g_2^{-1} \cdot g_1 = g$ und $\phi \circ \psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1 \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = g$.

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \vdots \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":

$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

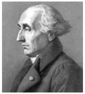
Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2 \in [g_2] .$$

Beweis (b): Die Abbildung $\psi : [g_2] \to [g_1]$, $\psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1$ ist die Inverse Abbildung zu ϕ. Tatsächlich,

$\psi \circ \phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot g_2^{-1} \cdot g_1 = g$ und $\phi \circ \psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1 \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = g$. Dann ist ϕ nach Lemma 3 bijektiv,

Satz 13 (Lagrange  **1736–1813):** *Es sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Dann gilt: $\#G \;\vdots\; \#H$.*

In Worten: *Ordnung der Untergruppe teilt die Ordnung der Gruppe*

Vorarbeit: Wiederholung: **Wicht. Bsp:** Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist "$\sim$":
$g_1 \sim g_2 \Longleftrightarrow \exists h \in H$ s.d. $hg_1 = g_2$, eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzrelation $\sim$ aus Wicht. Bsp. definiert nach Satz 12 eine Zerlegung von G in Äquivalenzklassen. Wir zeigen: $\forall g_1, g_2 \in G$ ist $\#[g_1] = \#[g_2]$. Tatsächlich,

$[g_1] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_1 = g\} = \{hg_1 \mid h \in H\}$,

$[g_2] := \{g \in G \mid \exists h \in H \text{ s.d. } hg_2 = g\} = \{hg_2 \mid h \in H\}$. Man betrachte die Abbildung $\phi : [g_1] \to [g_2]$, $\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2$.

Behauptung: (a) ϕ ist wohldefiniert. (b) ϕ ist bijektion.

Beweis (a): ist $g \in [g_1]$, also $g = hg_1$, so ist

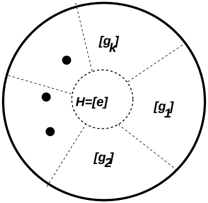
$$\phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = \underbrace{hg_1 \cdot g_1^{-1}}_{h} \cdot g_2 = hg_2 \in [g_2] .$$

Beweis (b): Die Abbildung $\psi : [g_2] \to [g_1]$, $\psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1$ ist die Inverse Abbildung zu ϕ. Tatsächlich,

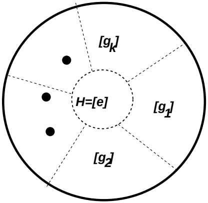
$\psi \circ \phi(g) = g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot g_2^{-1} \cdot g_1 = g$ und $\phi \circ \psi(g) = g \cdot g_2^{-1} \cdot g_1 \cdot g_1^{-1} \cdot g_2 = g$. Dann ist ϕ nach Lemma 3 bijektiv, und deswegen $\#[g_1] = \#[g_2]$.

Beweis von Satz 13:

Beweis von Satz 13:

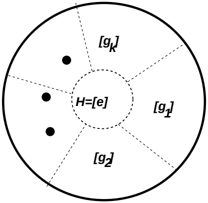


Beweis von Satz 13:



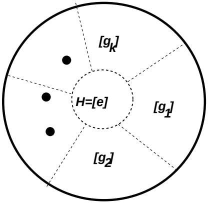
Die Äquivalenzklassen gleiche Anzahl von Elementen,

Beweis von Satz 13:



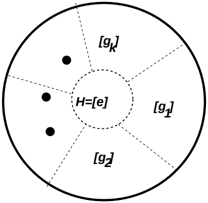
Die Äquivalenzklassen gleiche Anzahl von Elementen, z.B. m

Beweis von Satz 13:



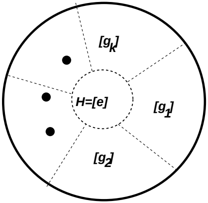
Die Äquivalenzklassen gleiche Anzahl von Elementen, z.B. m Dann teilt m die Anzahl $\#G$.

Beweis von Satz 13:



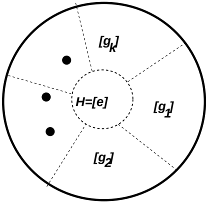
Die Äquivalenzklassen gleiche Anzahl von Elementen, z.B. m Dann teilt m die Anzahl $\#G$. Da $H = [e]$, und deswgen $\#H = m$,

Beweis von Satz 13:



Die Äquivalenzklassen gleiche Anzahl von Elementen, z.B. m Dann teilt m die Anzahl $\#G$. Da $H = [e]$, und deswgen $\#H = m$, teilt $\#H$ $\#G$,

Beweis von Satz 13:



Die Äquivalenzklassen gleiche Anzahl von Elementen, z.B. m Dann teilt m die Anzahl $\#G$. Da $H = [e]$, und deswgen $\#H = m$, teilt $\#H$ $\#G$, □

Def 9

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler),

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G \ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp:

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp:

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G \; \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.
Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \stackrel{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$.

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G \; \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem } 5}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$,

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.
Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.
Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil
$(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=}$

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil

$(T_1 \circ \ldots \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ \ldots \circ T_1$,

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h \underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\operatorname{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem } 5}{=} \operatorname{sign}(Q^{-1}) \cdot \operatorname{sign}(P) \cdot \operatorname{sign}(Q)$. Aber $\operatorname{sign}(Q) = \operatorname{sign}(Q^{-1})$, weil

$(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind),

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G \ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\operatorname{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \operatorname{sign}(Q^{-1}) \cdot \operatorname{sign}(P) \cdot \operatorname{sign}(Q)$. Aber $\operatorname{sign}(Q) = \operatorname{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ \ldots \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ \ldots \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.

Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q)$

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem } 5}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.

Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$.

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.
Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.
Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.
Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil
$(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.
Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$,

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G \ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.
Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.
Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.
Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.
Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.
Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.
Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem } 5}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.
Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.
Satz 14

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.
Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.
Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \stackrel{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.
Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \stackrel{\text{Lem } 5}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil
$(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \stackrel{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.
Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.
Satz 14 *Es sei $\phi : G \to G'$ ein Homomorphismus.*

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.
Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \stackrel{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.
Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \stackrel{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \stackrel{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.
Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.

Satz 14 *Es sei $\phi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann ist $\mathrm{Kern}_\phi \subseteq G$ normal.*

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.
Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.
Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.
Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.

Satz 14 *Es sei $\phi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann ist $\mathrm{Kern}_\phi \subseteq G$ normal.*

Beweis:

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.
Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h \underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.
Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ \ldots \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ \ldots \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.
Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.

Satz 14 *Es sei $\phi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann ist $Kern_\phi \subseteq G$ normal.*

Beweis: Z.z.: $\forall h$ s.d. $\underbrace{\phi(h) = e}_{\iff h \in Kern_\phi}$,

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.

Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.

Satz 14 *Es sei $\phi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann ist $Kern_\phi \subseteq G$ normal.*

Beweis: Z.z.: $\forall h$ s.d. $\underbrace{\phi(h) = e}_{\iff h \in Kern_\phi}$, $\forall g \in G$ gilt: $\phi(g^{-1}hg) = e$.

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ \ldots \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ \ldots \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.

Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.

Satz 14 *Es sei $\phi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann ist $Kern_\phi \subseteq G$ normal.*

Beweis: Z.z.: $\forall h$ s.d. $\underbrace{\phi(h) = e}_{\iff h \in Kern_\phi}$, $\forall g \in G$ gilt: $\phi(g^{-1}hg) = e$.

$\phi(g^{-1}hg)$

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.

Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.

Satz 14 *Es sei $\phi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann ist $Kern_\phi \subseteq G$ normal.*

Beweis: Z.z.: $\forall h$ s.d. $\underbrace{\phi(h) = e}_{\iff h \in Kern_\phi}$, $\forall g \in G$ gilt: $\phi(g^{-1}hg) = e$.

$\phi(g^{-1}hg) \overset{\text{Def 5}}{=}$

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\operatorname{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \operatorname{sign}(Q^{-1}) \cdot \operatorname{sign}(P) \cdot \operatorname{sign}(Q)$. Aber $\operatorname{sign}(Q) = \operatorname{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ \ldots \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ \ldots \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.

Dann ist $\operatorname{sign}(Q^{-1})\operatorname{sign}(P)\operatorname{sign}(Q) = \operatorname{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.

Satz 14 *Es sei $\phi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann ist $\mathrm{Kern}_\phi \subseteq G$ normal.*

Beweis: Z.z.: $\forall h$ s.d. $\underbrace{\phi(h) = e}_{\iff h \in Kern_\phi}$, $\forall g \in G$ gilt: $\phi(g^{-1}hg) = e$.

$$\phi(g^{-1}hg) \overset{\text{Def 5}}{=} \phi(g^{-1}) \circ \underbrace{\phi(h)}_{e} \circ \phi(g)$$

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G \ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem } 5}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil

$(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz } 2}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.

Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.

Satz 14 *Es sei $\phi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann ist $Kern_\phi \subseteq G$ normal.*

Beweis: Z.z.: $\forall h$ s.d. $\underbrace{\phi(h) = e}_{\iff h \in Kern_\phi}$, $\forall g \in G$ gilt: $\phi(g^{-1}hg) = e$.

$$\phi(g^{-1}hg) \overset{\text{Def } 5}{=} \phi(g^{-1}) \circ \underbrace{\phi(h)}_{e} \circ \phi(g) \overset{\text{Satz } 7}{=}$$

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\operatorname{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \operatorname{sign}(Q^{-1}) \cdot \operatorname{sign}(P) \cdot \operatorname{sign}(Q)$. Aber $\operatorname{sign}(Q) = \operatorname{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.

Dann ist $\operatorname{sign}(Q^{-1})\operatorname{sign}(P)\operatorname{sign}(Q) = \operatorname{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.

Satz 14 *Es sei $\phi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann ist $\mathrm{Kern}_\phi \subseteq G$ normal.*

Beweis: Z.z.: $\forall h$ s.d. $\underbrace{\phi(h) = e}_{\iff h \in Kern_\phi}$, $\forall g \in G$ gilt: $\phi(g^{-1}hg) = e$.

$$\phi(g^{-1}hg) \overset{\text{Def 5}}{=} \phi(g^{-1}) \circ \underbrace{\phi(h)}_{e} \circ \phi(g) \overset{\text{Satz 7}}{=} (\phi(g))^{-1} \circ \phi(g) = e,$$

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ ... \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ ... \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.

Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.

Satz 14 *Es sei $\phi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann ist $\mathrm{Kern}_\phi \subseteq G$ normal.*

Beweis: Z.z.: $\forall h$ s.d. $\underbrace{\phi(h) = e}_{\iff h \in Kern_\phi}$, $\forall g \in G$ gilt: $\phi(g^{-1}hg) = e$.

$$\phi(g^{-1}hg) \overset{\text{Def 5}}{=} \phi(g^{-1}) \circ \underbrace{\phi(h)}_{e} \circ \phi(g) \overset{\text{Satz 7}}{=} (\phi(g))^{-1} \circ \phi(g) = e, \qquad \square$$

Def 9 Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt normal (oder Normalteiler), falls $\forall g \in G\ \forall h \in H$ gilt $g^{-1}hg \in H$.

Bsp: Alle Untergruppen Abel'schen Gruppen sind normal.

Tatsächlich, ist $h \in H$, so ist $g^{-1}hg \overset{\text{falls } G \text{ abel'sch}}{=} h\underbrace{g^{-1}g}_{=e} = h \in H$.

Bsp: $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ ist normal.

Tatsächlich, $\mathrm{sign}(Q^{-1}PQ) \overset{\text{Lem 5}}{=} \mathrm{sign}(Q^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(P) \cdot \mathrm{sign}(Q)$. Aber $\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(Q^{-1})$, weil $(T_1 \circ \ldots \circ T_m)^{-1} \overset{\text{Folgerung aus Satz 2}}{=} T_m \circ \ldots \circ T_1$, (wobei T_i Transpositionen sind), und deswegen Q und Q^{-1} als Produkt von gleichen Anzahl von Transpositionen darstellbar sind.

Dann ist $\mathrm{sign}(Q^{-1})\mathrm{sign}(P)\mathrm{sign}(Q) = \mathrm{sign}(P)$. Ist $P \in \mathcal{A}_n$, so ist $Q^{-1}PQ \in \mathcal{A}_n$.

Satz 14 *Es sei $\phi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann ist $Kern_\phi \subseteq G$ normal.*

Beweis: Z.z.: $\forall h$ s.d. $\underbrace{\phi(h) = e}_{\iff h \in Kern_\phi}$, $\forall g \in G$ gilt: $\phi(g^{-1}hg) = e$.

$$\phi(g^{-1}hg) \overset{\text{Def 5}}{=} \phi(g^{-1}) \circ \underbrace{\phi(h)}_{e} \circ \phi(g) \overset{\text{Satz 7}}{=} (\phi(g))^{-1} \circ \phi(g) = e, \qquad \square$$

Bem: Satz 14 $\Longrightarrow \mathcal{A}_n$ ist normal, s. Bsp oben.