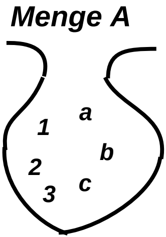
Mengenlehre: Schnittmenge

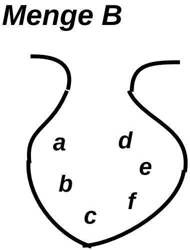
Mengenlehre: Schnittmenge

A, B seien Mengen. Der Durchschnitt von A und B (Bezeichnung: $A \cap B$) (ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.)

Mengenlehre: Schnittmenge

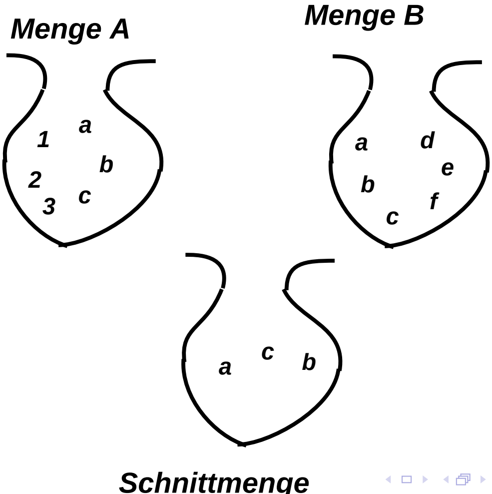
A, B seien Mengen. Der Durchschnitt von A und B (Bezeichnung: $A \cap B$) (ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.)





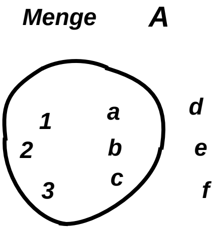
Mengenlehre: Schnittmenge

A, B seien Mengen. Der Durchschnitt von A und B (Bezeichnung: $A \cap B$) (ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.)



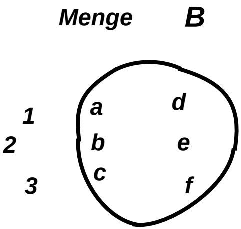
Mengenlehre: Schnittmenge

A, B seien Mengen. Der Durchschnitt von A und B (Bezeichnung: $A \cap B$) (ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.)



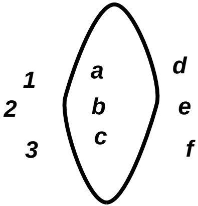
Mengenlehre: Schnittmenge

A, B seien Mengen. Der Durchschnitt von A und B (Bezeichnung: $A \cap B$) (ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.)



Mengenlehre: Schnittmenge

A, B seien Mengen. Der Durchschnitt von A und B (Bezeichnung: $A \cap B$) (ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.)



Schnittmenge

Schnittmenge von mehreren Mengen

,

Schnittmenge von mehreren Mengen

Gegeben ist eine Menge $\mathbb{M}$ von Mengen.

,

Schnittmenge von mehreren Mengen

Gegeben ist eine Menge $\mathbb{M}$ von Mengen. Die Schnittmenge

,

Schnittmenge von mehreren Mengen

Gegeben ist eine Menge $\mathbb{M}$ von Mengen. Die Schnittmenge von $\mathbb{M}$ ist die Menge

,

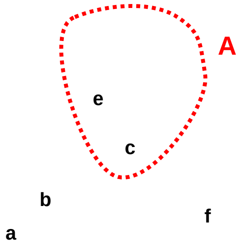
Schnittmenge von mehreren Mengen

Gegeben ist eine Menge $\mathbb{M}$ von Mengen. Die Schnittmenge von $\mathbb{M}$ ist die Menge $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$

,

Schnittmenge von mehreren Mengen

Gegeben ist eine Menge $\mathbb{M}$ von Mengen. Die Schnittmenge von $\mathbb{M}$ ist die Menge $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$ der Elemente, die in jedem Element von $\mathbb{M}$ enthalten sind:

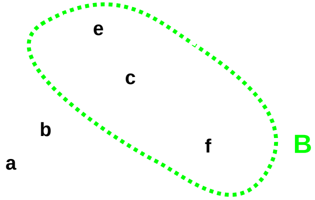


$A = \{e, c\}$

,

Schnittmenge von mehreren Mengen

Gegeben ist eine Menge $\mathbb{M}$ von Mengen. Die Schnittmenge von $\mathbb{M}$ ist die Menge $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$ der Elemente, die in jedem Element von $\mathbb{M}$ enthalten sind: $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M := \{a \mid \text{ für alle } M \in \mathbb{M} \text{ gilt } \quad a \in M. \}$

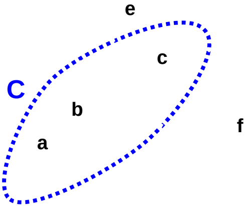


$A = \{e, c\} \quad B = \{e, c, f\}$

,

Schnittmenge von mehreren Mengen

Gegeben ist eine Menge $\mathbb{M}$ von Mengen. Die Schnittmenge von $\mathbb{M}$ ist die Menge $\bigcap_{M\in\mathbb{M}} M$ der Elemente, die in jedem Element von $\mathbb{M}$ enthalten sind: $\bigcap_{M\in\mathbb{M}} M := \{a \mid \text{ für alle } M \in \mathbb{M} \text{ gilt } \ a \in M. \}$

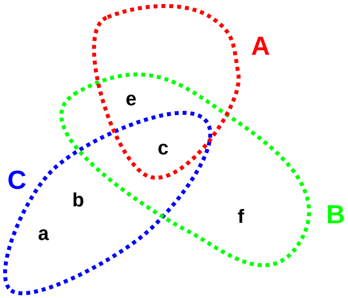


$A = \{e, c\} \quad B = \{e, c, f\} \quad C = \{a, b, c\}$

,

Schnittmenge von mehreren Mengen

Gegeben ist eine Menge $\mathbb{M}$ von Mengen. Die Schnittmenge von $\mathbb{M}$ ist die Menge $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$ der Elemente, die in jedem Element von $\mathbb{M}$ enthalten sind: $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M := \{a \mid \text{ für alle } M \in \mathbb{M} \text{ gilt } \quad a \in M. \}$

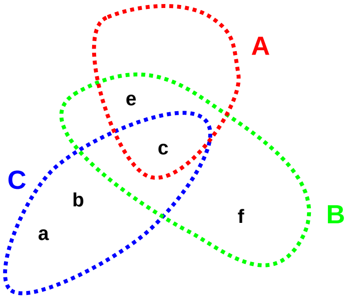


$A = \{e, c\} \quad B = \{e, c, f\} \quad C = \{a, b, c\}$ Falls $\mathbb{M} := \{A, B, C\}$

,

Schnittmenge von mehreren Mengen

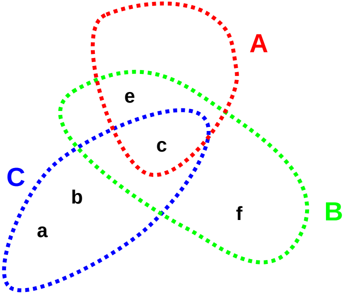
Gegeben ist eine Menge $\mathbb{M}$ von Mengen. Die Schnittmenge von $\mathbb{M}$ ist die Menge $\bigcap_{M\in\mathbb{M}} M$ der Elemente, die in jedem Element von $\mathbb{M}$ enthalten sind: $\bigcap_{M\in\mathbb{M}} M := \{a \mid \text{ für alle } M \in \mathbb{M} \text{ gilt } \; a \in M. \}$



$A = \{e, c\} \quad B = \{e, c, f\} \quad C = \{a, b, c\}$ Falls $\mathbb{M} := \{A, B, C\}$ $= \{\{e, c\}, \{e, c, f\}, \{a, b, c\}\}$,

Schnittmenge von mehreren Mengen

Gegeben ist eine Menge $\mathbb{M}$ von Mengen. Die Schnittmenge von $\mathbb{M}$ ist die Menge $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$ der Elemente, die in jedem Element von $\mathbb{M}$ enthalten sind: $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M := \{a \mid \text{ für alle } M \in \mathbb{M} \text{ gilt } \quad a \in M. \}$



$A = \{e, c\} \quad B = \{e, c, f\} \quad C = \{a, b, c\}$ Falls $\mathbb{M} := \{A, B, C\}$ $= \{\{e, c\}, \{e, c, f\}, \{a, b, c\}\}$, ist $\bigcap_{M \in \mathbb{M}} M = \{c\}$

Satz 6 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Unterguppen der Gruppe* $(G, \cdot)$.

Satz 6 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe* $(G, \cdot)$. *Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.
Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} =$

Satz 6 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Unterguppen der Gruppe $(G, \cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.
Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} =$

Satz 6 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Unterguppen der Gruppe* $(G, \cdot)$. *Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.

Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.

Satz 6 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe $(G, \cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.
Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.
Beweis. Z.z.:

Satz 6 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Unterguppen der Gruppe* $(G, \cdot)$*. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.
Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.
Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

Satz 6 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe $(G, \cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.
Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.
Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

Satz 6 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe $(G,\cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.

Bsp: $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.

Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \quad \Rightarrow$

Satz 6 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Unterguppen der Gruppe $(G, \cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.

Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.

Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

Satz 6 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Unterguppen der Gruppe $(G, \cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.
Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.
Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.
(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$
(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

Satz 6 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Unterguppen der Gruppe $(G,\cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.

Bsp: $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.

Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \quad \Rightarrow$

Satz 6 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Unterguppen der Gruppe* $(G, \cdot)$. *Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.

Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.

Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

Satz 6 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Unterguppen der Gruppe* $(G, \cdot)$. *Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.
Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.
Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a)

Satz 6 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe $(G, \cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.

Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.

Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap\limits_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$, weil e in allen Untergruppen liegt.

Satz 6 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe $(G,\cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.
Bsp: $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.
Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u,v \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U\in\mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap\limits_{U\in\mathbb{U}} U \neq \varnothing$, weil e in allen Untergruppen liegt.
(b): Angennomen $u,v \in U \in \mathbb{U}$

Satz 6 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe* $(G, \cdot)$. *Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.
Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.
Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap\limits_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$, weil e in allen Untergruppen liegt.
(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \; uv \in U$

Satz 6 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe* $(G, \cdot)$. *Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.

Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.

Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap\limits_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$, weil e in allen Untergruppen liegt.

(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \; uv \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\cdot$ “).

Satz 6 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe $(G, \cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.

Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.

Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap\limits_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$, weil e in allen Untergruppen liegt.

(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow uv \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\cdot$ “). Also uv liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$,

Satz 6 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe* $(G, \cdot)$. *Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.
Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.
Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap\limits_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$, weil e in allen Untergruppen liegt.
(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \ uv \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\cdot$ “). Also uv liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

Satz 6 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe* $(G, \cdot)$*. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.
Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.
Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap\limits_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$, weil e in allen Untergruppen liegt.
(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow uv \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\cdot$ “). Also uv liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.
(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}$,

Satz 6 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe* $(G, \cdot)$. *Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.

Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.

Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap\limits_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$, weil e in allen Untergruppen liegt.
(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow uv \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\cdot$ “). Also uv liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.
(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}, \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. invertieren).

Satz 6 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe $(G, \cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.

Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.

Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap\limits_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$, weil e in allen Untergruppen liegt.

(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \; uv \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\cdot$ “). Also uv liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}, \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. invertieren).

Also u^{-1} liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$,

Satz 6 $\mathbb{U}$ *sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe* $(G, \cdot)$. *Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.

Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.

Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap\limits_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$, weil e in allen Untergruppen liegt.

(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow uv \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\cdot$ “). Also uv liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}, \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. invertieren).

Also u^{-1} liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, $\Longrightarrow u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

Satz 6 *$\mathbb{U}$ sei eine Menge der Untergruppen der Gruppe $(G, \cdot)$. Dann ist die Schnittmenge*

$$\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$$

auch eine Untergruppe.
Bsp: $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{n \mid 2 \text{ teilt } n \text{ und } 3 \text{ teilt } n\} = \{n \mid 6 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe.
Beweis. Z.z.:

(a) $\bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$.

(b) $u, v \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$

(c) $u \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.

(a) $\bigcap\limits_{U \in \mathbb{U}} U \neq \varnothing$, weil e in allen Untergruppen liegt.
(b): Angennomen $u, v \in U \in \mathbb{U} \Rightarrow \; uv \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. „$\cdot$ “). Also uv liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, also $uv \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$.
(c): Angenommen $u \in U \in \mathbb{U}, \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in U$ (Abgeschlossenheit von U bzg. invertieren).
Also u^{-1} liegt in jedem Element von $\mathbb{U}$, $\Longrightarrow u^{-1} \in \bigcap_{U \in \mathbb{U}} U$. $\square$

Homo- und Isomorphismus

Homo- und Isomorphismus

Def. 5

Homo- und Isomorphismus

Def. 5 *Seien* $(G,\cdot)$ *und* $(H,\circ)$ *Gruppe. Die Abbildung* $\phi : G \to H$ *heißt ein Homomorphismus, falls* $\forall a,b \in G$ *gilt* $\phi(a\cdot b) = \phi(a)\circ\phi(b)$.

Homo- und Isomorphismus

Def. 5 *Seien* $(G, \cdot)$ *und* $(H, \circ)$ *Gruppe. Die Abbildung* $\phi : G \to H$ *heißt ein Homomorphismus, falls* $\forall a, b \in G$ *gilt* $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \circ \phi(b)$.
Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.
Jargon: ϕ erhält Multiplikation.

Homo- und Isomorphismus

Def. 5 *Seien* $(G, \cdot)$ *und* $(H, \circ)$ *Gruppe. Die Abbildung* $\phi : G \to H$ *heißt ein Homomorphismus, falls* $\forall a, b \in G$ *gilt* $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \circ \phi(b)$*. Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.*

Jargon: ϕ erhält Multiplikation.

Bsp: $\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$ ist ein Isomorphismus.

Homo- und Isomorphismus

Def. 5 *Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ Gruppe. Die Abbildung $\phi : G \to H$ heißt ein Homomorphismus, falls $\forall a, b \in G$ gilt $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \circ \phi(b)$. Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.*
Jargon: ϕ erhält Multiplikation.
Bsp: $\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$ ist ein Isomorphismus. Tatsächlich,

Homo- und Isomorphismus

Def. 5 *Seien* $(G,\cdot)$ *und* $(H,\circ)$ *Gruppe. Die Abbildung* $\phi : G \to H$ *heißt ein Homomorphismus, falls* $\forall a, b \in G$ *gilt* $\phi(a\cdot b) = \phi(a)\circ\phi(b)$.
Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.

Jargon: ϕ erhält Multiplikation.

Bsp: $\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$ ist ein Isomorphismus. Tatsächlich,

$\phi(k) + \phi(m) = \frac{k}{3} + \frac{m}{3} = \frac{k+m}{3} = \phi(k+m)$.

Homo- und Isomorphismus

Def. 5 *Seien $(G,\cdot)$ und $(H,\circ)$ Gruppe. Die Abbildung $\phi: G \to H$ heißt ein Homomorphismus, falls $\forall a,b \in G$ gilt $\phi(a\cdot b) = \phi(a)\circ\phi(b)$. Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.*

Jargon: ϕ erhält Multiplikation.

Bsp: $\phi: \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$ ist ein Isomorphismus. Tatsächlich,

$\phi(k)+\phi(m) = \frac{k}{3}+\frac{m}{3} = \frac{k+m}{3} = \phi(k+m)$.

ϕ ist eine Bijektion.

Bsp:

Homo- und Isomorphismus

Def. 5 *Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ Gruppe. Die Abbildung $\phi : G \to H$ heißt ein Homomorphismus, falls $\forall a, b \in G$ gilt $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \circ \phi(b)$. Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.*

Jargon: ϕ erhält Multiplikation.

Bsp: $\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$ ist ein Isomorphismus. Tatsächlich,

$\phi(k) + \phi(m) = \frac{k}{3} + \frac{m}{3} = \frac{k+m}{3} = \phi(k + m)$.

ϕ ist eine Bijektion.

Bsp: $\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}$,

Homo- und Isomorphismus

Def. 5 *Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ Gruppe. Die Abbildung $\phi : G \to H$ heißt ein Homomorphismus, falls $\forall a, b \in G$ gilt $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \circ \phi(b)$. Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.*

Jargon: ϕ erhält Multiplikation.

Bsp: $\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$ ist ein Isomorphismus. Tatsächlich,

$\phi(k) + \phi(m) = \frac{k}{3} + \frac{m}{3} = \frac{k+m}{3} = \phi(k + m)$.

ϕ ist eine Bijektion.

Bsp: $\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \quad \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$

Homo- und Isomorphismus

Def. 5 *Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ Gruppe. Die Abbildung $\phi : G \to H$ heißt ein Homomorphismus, falls $\forall a, b \in G$ gilt $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \circ \phi(b)$. Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.*

Jargon: ϕ erhält Multiplikation.

Bsp: $\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$ ist ein Isomorphismus. Tatsächlich,

$\phi(k) + \phi(m) = \frac{k}{3} + \frac{m}{3} = \frac{k+m}{3} = \phi(k + m)$.

ϕ ist eine Bijektion.

Bsp: $\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \quad \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$

ist ein Homomorphismus.

Triviales Bsp:

Homo- und Isomorphismus

Def. 5 *Seien $(G,\cdot)$ und $(H,\circ)$ Gruppe. Die Abbildung $\phi : G \to H$ heißt ein Homomorphismus, falls $\forall a,b \in G$ gilt $\phi(a\cdot b) = \phi(a)\circ\phi(b)$. Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.*

Jargon: ϕ erhält Multiplikation.

Bsp: $\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$ ist ein Isomorphismus. Tatsächlich,

$\phi(k)+\phi(m) = \frac{k}{3}+\frac{m}{3} = \frac{k+m}{3} = \phi(k+m)$.

ϕ ist eine Bijektion.

Bsp: $\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}$, $\psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$

ist ein Homomorphismus.

Triviales Bsp: Für alle Gruppen $(G,\cdot)$ und $(H,\circ)$ ist

Homo- und Isomorphismus

Def. 5 *Seien $(G,\cdot)$ und $(H,\circ)$ Gruppe. Die Abbildung $\phi : G \to H$ heißt ein Homomorphismus, falls $\forall a,b \in G$ gilt $\phi(a\cdot b) = \phi(a)\circ\phi(b)$. Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.*

Jargon: ϕ erhält Multiplikation.

Bsp: $\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$ ist ein Isomorphismus. Tatsächlich,

$\phi(k) + \phi(m) = \frac{k}{3} + \frac{m}{3} = \frac{k+m}{3} = \phi(k+m)$.

ϕ ist eine Bijektion.

Bsp: $\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}$, $\psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$

ist ein Homomorphismus.

Triviales Bsp: Für alle Gruppen $(G,\cdot)$ und $(H,\circ)$ ist $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e$ ein Homomophismus.

Homo- und Isomorphismus

Def. 5 *Seien* $(G,\cdot)$ *und* $(H,\circ)$ *Gruppe. Die Abbildung* $\phi : G \to H$ *heißt ein Homomorphismus, falls* $\forall a,b \in G$ *gilt* $\phi(a\cdot b) = \phi(a)\circ\phi(b)$.
Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus.
Jargon: ϕ erhält Multiplikation.
Bsp: $\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$ ist ein Isomorphismus. Tatsächlich,
$\phi(k)+\phi(m) = \frac{k}{3}+\frac{m}{3} = \frac{k+m}{3} = \phi(k+m)$.
ϕ ist eine Bijektion.

Bsp: $\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}$, $\psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$

ist ein Homomorphismus.
Triviales Bsp: Für alle Gruppen $(G,\cdot)$ und $(H,\circ)$ ist $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e$ ein Homomophismus.

Informal: für uns sind zwei Isomorphen Gruppen gleich

Satz

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H.

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus.

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\, g \in G$ gilt

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus,

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \longrightarrow G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \longrightarrow G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) =$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) =$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$\Longrightarrow e_H$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G)$$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$.

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) =$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \rightarrow G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) =$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G)$.

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=}$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,

$\Longrightarrow$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G)$.

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$.

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.
$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G)$.

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$.

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun
$\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') =$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G)$.

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun
$\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') = \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right)$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\
&= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) \\
&=
\end{aligned}$$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) \; . \\ &= \phi^{-1}(h \circ h') \end{aligned}$$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G)$.

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\
&= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\
&= \phi^{-1}(h \circ h')
\end{aligned}$$

□

Bsp:

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\ &= \phi^{-1}(h \circ h') \end{aligned}$$

$\square$

Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$,

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$,

(b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\
&= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\
&= \phi^{-1}(h \circ h')
\end{aligned}$$

□

Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(x) = e^x$.

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\ &= \phi^{-1}(h \circ h') \end{aligned}$$

□

Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(x) = e^x$. Dann ist $e^{a+b} = e^a\ e^b$,

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G)$.

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \stackrel{(a)}{=} e_H$,

$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\ &= \phi^{-1}(h \circ h') \end{aligned}$$

□

Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(x) = e^x$. Dann ist $e^{a+b} = e^a\, e^b$, also ist die Exponentialabbildung ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h,\ h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right)\\ &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) .\\ &= \phi^{-1}(h \circ h')\end{aligned}$$

$\square$

Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(x) = e^x$. Dann ist $e^{a+b} = e^a\ e^b$, also ist die Exponentialabbildung ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.
$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G)$.

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\
&= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\
&= \phi^{-1}(h \circ h')
\end{aligned}$$

□

Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(x) = e^x$. Dann ist $e^{a+b} = e^a\ e^b$, also ist die Exponentialabbildung ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
Wir sehen: (a):

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\ &= \phi^{-1}(h \circ h') \end{aligned}$$

□

Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(x) = e^x$. Dann ist $e^{a+b} = e^a\, e^b$, also ist die Exponentialabbildung ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
Wir sehen: (a): $e^0 = 1$, (b):

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$, $\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\ &= \phi^{-1}(h \circ h') \end{aligned}$$

□

Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(x) = e^x$. Dann ist $e^{a+b} = e^a\, e^b$, also ist die Exponentialabbildung ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Wir sehen: (a): $e^0 = 1$, (b): $e^{-x} = 1/e^x$.

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.
$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun
$$\begin{aligned} \phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\ &= \phi^{-1}(h \circ h') \end{aligned}$$
□

Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(x) = e^x$. Dann ist $e^{a+b} = e^a\ e^b$, also ist die Exponentialabbildung ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
Wir sehen: (a): $e^0 = 1$, (b): $e^{-x} = 1/e^x$. (c): e^x ist bijektiv,

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G)$.

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\ &= \phi^{-1}(h \circ h') \end{aligned}$$

□

Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(x) = e^x$. Dann ist $e^{a+b} = e^a\ e^b$, also ist die Exponentialabbildung ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Wir sehen: (a): $e^0 = 1$, (b): $e^{-x} = 1/e^x$. (c): e^x ist bijektiv, also ist ein Isomorphismus,

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.
$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G)$.

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\ &= \phi^{-1}(h \circ h') \end{aligned}$$

□

Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(x) = e^x$. Dann ist $e^{a+b} = e^a\ e^b$, also ist die Exponentialabbildung ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Wir sehen: (a): $e^0 = 1$, (b): $e^{-x} = 1/e^x$. (c): e^x ist bijektiv, also ist ein Isomorphismus, die inverse Abbildung ist *log*.

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\ g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.

$$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G).$$

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\ &= \phi^{-1}(h \circ h') \end{aligned}$$

$\square$

Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(x) = e^x$. Dann ist $e^{a+b} = e^a\ e^b$, also ist die Exponentialabbildung ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Wir sehen: (a): $e^0 = 1$, (b): $e^{-x} = 1/e^x$. (c): e^x ist bijektiv, also ist ein Isomorphismus, die inverse Abbildung ist *log*. Wir sehen: $log(x \cdot y) = log(x) + log(y)$,

Satz 7 Seien G und H Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H. Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(a) $\phi(e_G) = e_H$, (b) $\forall\, g \in G$ gilt $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

(c) Ist ϕ Isomorphismus, so ist $\phi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomomorphismus.

Beweis: (a): $\phi(e_G) = \phi(e_G \cdot e_G) = \phi(e_G) \circ \phi(e_G)$.
$\Longrightarrow e_H = (\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G) = \underbrace{(\phi(e_G))^{-1} \circ \phi(e_G)}_{e_H} \circ \phi(e_G) = \phi(e_G)$.

(b) : Sei $g \in G$. Es ist $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = \phi(g^{-1} \cdot g) = \phi(e_G) \overset{(a)}{=} e_H$,
$\Longrightarrow \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. (c) Seien $h, h' \in H$. Nun

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h') &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h')\right)\right) \\ &= \phi^{-1}\left(\phi\left(\phi^{-1}(h)\right) \circ \phi\left(\phi^{-1}(h')\right)\right) . \\ &= \phi^{-1}(h \circ h') \end{aligned}$$

□

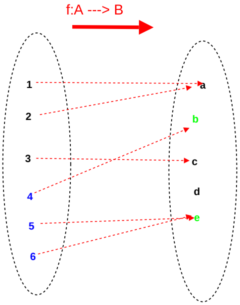
Bsp: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(x) = e^x$. Dann ist $e^{a+b} = e^a\, e^b$, also ist die Exponentialabbildung ein Homomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Wir sehen: (a): $e^0 = 1$, (b): $e^{-x} = 1/e^x$. (c): e^x ist bijektiv, also ist ein Isomorphismus, die inverse Abbildung ist *log*. Wir sehen: $log(x \cdot y) = log(x) + log(y)$, also *log* ist ein Isomorphismus.

Def. 6 Sei $f : A \longrightarrow B$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$.

$\color{red}{Bild_f(A')} := Bild_{f_{|A'}} =$

$= \{b \in B \mid \exists a' \in A',\ f(a') = B\}.$

$\color{red}{Urbild_f(B')} := \{a \in A \mid \exists b' \in B',\ f(a) = b'\}.$



A' = { 4, 5, 6}

B' = { a, c, d}

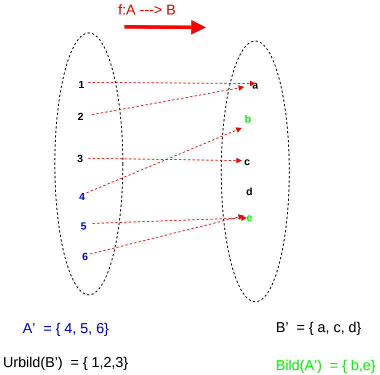
Urbild(B') = { 1,2,3}

Bild(A') = { b,e}

Satz 8

Def. 6 Sei $f : A \longrightarrow B$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$.
$\color{red}{Bild_f(A')}$ $:= Bild_{f_{|A'}} =$
$= \{b \in B \mid \exists a' \in A',\ f(a') = B\}$.

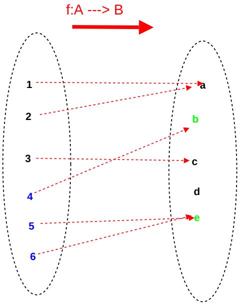
$\color{red}{Urbild_f(B')}$ $:= \{a \in A \mid \exists b' \in B',\ f(a) = b'\}$.



Satz 8 *Sei $\phi : G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus.*

Def. 6 Sei $f : A \to B$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$.
$\color{red}{Bild_f(A')}$ $:= Bild_{f_{|A'}} =$
$= \{b \in B \mid \exists a' \in A',\ f(a') = B\}$.

$\color{red}{Urbild_f(B')}$ $:= \{a \in A \mid \exists b' \in B',\ f(a) = b'\}$.



A' = { 4, 5, 6}

B' = { a, c, d}

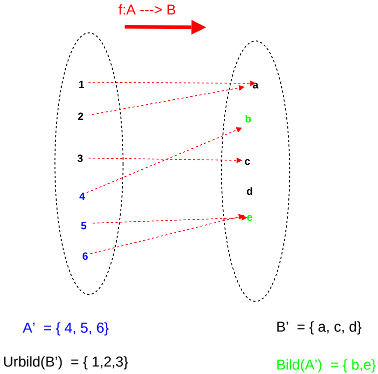
Urbild(B') = { 1,2,3}

Bild(A') = { b,e}

Satz 8 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen.*

Def. 6 Sei $f : A \to B$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$.
$Bild_f(A') := Bild_{f_{|A'}} =$
$= \{b \in B \mid \exists a' \in A',\ f(a') = B\}$.

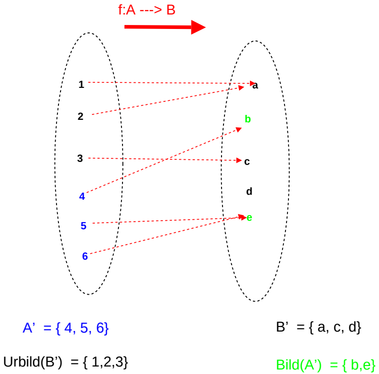
$Urbild_f(B') := \{a \in A \mid \exists b' \in B',\ f(a) = b'\}$.



Satz 8 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann ist $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

Def. 6 Sei $f : A \longrightarrow B$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$.
$Bild_f(A') := Bild_{f_{|A'}} =$
$= \{b \in B \mid \exists a' \in A',\ f(a') = B\}$.

$Urbild_f(B') := \{a \in A \mid \exists b' \in B',\ f(a) = b'\}$.

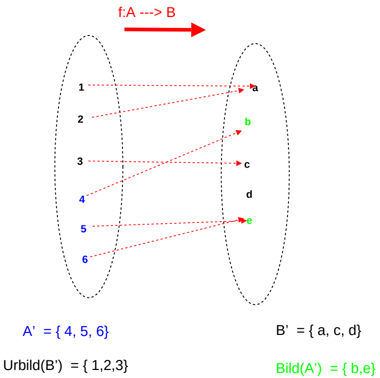


Satz 8 *Sei $\phi : G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann ist $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

In Worten: Homomorphismen führen Untergruppen in Untergruppen über.

Def. 6 Sei $f : A \to B$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$.
$Bild_f(A') := Bild_{f_{|A'}} =$
$= \{b \in B \mid \exists a' \in A',\ f(a') = B\}$.

$Urbild_f(B') := \{a \in A \mid \exists b' \in B',\ f(a) = b'\}$.



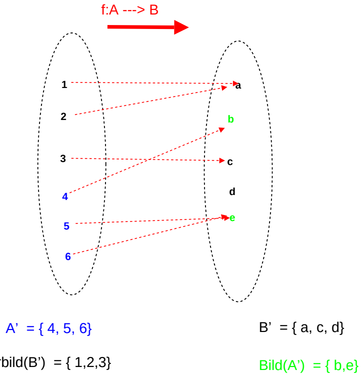
Satz 8 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann ist $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

In Worten: Homomorphismen führen Untergruppen in Untergruppen über.

Beweis:

Def. 6 Sei $f : A \to B$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$.
$\color{red}{Bild_f(A')} := Bild_{f_{|A'}} =$
$= \{b \in B \mid \exists a' \in A',\ f(a') = B\}$.

$\color{red}{Urbild_f(B')} := \{a \in A \mid \exists b' \in B',\ f(a) = b'\}$.



Satz 8 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann ist $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

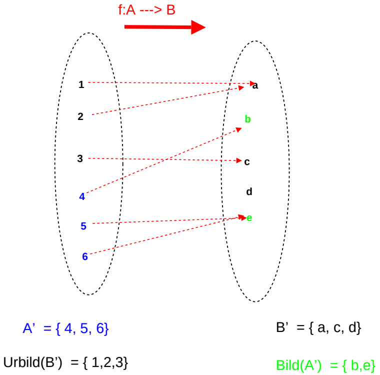
In Worten: Homomorphismen führen Untergruppen in Untergruppen über.

Beweis: Z.z.: $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Multiplikation,

Def. 6 Sei $f : A \to B$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$.
$Bild_f(A') := Bild_{f_{|A'}} =$
$= \{b \in B \mid \exists a' \in A',\ f(a') = B\}$.

$Urbild_f(B') := \{a \in A \mid \exists b' \in B',\ f(a) = b'\}$.



Satz 8 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Seien $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$ Untergruppen. Dann ist $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ Untergruppen von jeweils H und G.*

In Worten: Homomorphismen führen Untergruppen in Untergruppen über.

Beweis: Z.z.: $Bild_\phi(G')$ und $Urbild_\phi(H')$ sind abgeschlossen bzgl.

(i) Multiplikation,

(ii) Invertieren

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def 5}{=} \phi(a \cdot b)$.

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \stackrel{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G')$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow}$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$.

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist

$a \circ b =$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def 5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist

$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b')$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \ \phi(a') \circ \phi(b') \overset{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=}$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \stackrel{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \stackrel{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$,
$\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \stackrel{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \overset{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$,

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \overset{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \stackrel{Def 5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \stackrel{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \stackrel{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$.

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \stackrel{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \stackrel{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \stackrel{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$,

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \overset{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \stackrel{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \stackrel{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$,
$\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \stackrel{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also,
$a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Abg. Bzgl. Inv.:} \\ \\ \end{array} \right.$$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \stackrel{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \stackrel{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \stackrel{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$\left\{ \text{Abg. Bzgl. Inv.:} \right.$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def 5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \overset{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$$\begin{cases} \text{Abg. Bzgl. Inv.:} \quad \Longrightarrow \quad a'^{-1} \in G' \\ \end{cases}$$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \overset{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$$\begin{cases} \text{Abg. Bzgl. Inv.:} \quad \Longrightarrow \quad a'^{-1} \in G' \\ \end{cases}$$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \overset{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Abg. Bzgl. Inv.:} & \Longrightarrow & a'^{-1} \in G' \\ & & \end{array} \right.$$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \stackrel{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \stackrel{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \stackrel{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Abg. Bzgl. Inv.:} \quad \Longrightarrow \quad a'^{-1} \in G' \\ \text{Satz 7:} \end{array} \right.$$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \stackrel{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \stackrel{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \stackrel{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Abg. Bzgl. Inv.:} \quad \Longrightarrow \quad a'^{-1} \in G' \\ \quad \text{Satz 7:} \end{array} \right.$$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \stackrel{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \stackrel{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \stackrel{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$$\begin{cases} \text{Abg. Bzgl. Inv.:} & \Longrightarrow \quad a'^{-1} \in G' \\ \text{Satz 7:} & \Longrightarrow \quad \phi(a'^{-1}) = \phi\,(a')^{-1} \end{cases}$$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def 5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \overset{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$$\left\{ \begin{array}{lcc} \text{Abg. Bzgl. Inv.:} & \Longrightarrow & a'^{-1} \in G' \\ \text{Satz 7:} & \Longrightarrow & \phi(a'^{-1}) = \phi\,(a')^{-1} \end{array} \right.$$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \stackrel{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \stackrel{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \stackrel{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$$\begin{cases} \text{Abg. Bzgl. Inv.:} & \Longrightarrow \quad a'^{-1} \in G' \\ \text{Satz 7:} & \Longrightarrow \quad \phi(a'^{-1}) = \phi\left(a'\right)^{-1} \end{cases}$$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \overset{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist

$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \overset{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$$\begin{cases} \text{Abg. Bzgl. Inv.:} & \Longrightarrow \quad a'^{-1} \in G' \\ \text{Satz 7:} & \Longrightarrow \quad \phi(a'^{-1}) = \phi\left(a'\right)^{-1} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \phi(a'^{-1}) = a^{-1}$

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \stackrel{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \stackrel{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist

$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \stackrel{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$$\begin{cases} \text{Abg. Bzgl. Inv.:} & \Longrightarrow \quad a'^{-1} \in G' \\ \text{Satz 7:} & \Longrightarrow \quad \phi(a'^{-1}) = \phi\,(a')^{-1} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \phi(a'^{-1}) = a^{-1} \in Bild_\phi(G')$.

(i) Seien $a, b \in Urbild_\phi(H')$. Man betrachte $\underbrace{\phi(a) \circ \phi(b)}_{\in H'} \stackrel{Def5}{=} \phi(a \cdot b)$.

Also $\phi(a \cdot b) \in H'$ und deswegen $a \cdot b \in Urbild_\phi(H')$.

$a, b \in Bild_\phi(G') \overset{\text{Def. von Bild}}{\Longrightarrow} \exists a', b' \in G'$ s.d. $\phi(a') = a$, $\phi(b') = b$. Dann ist
$a \circ b = \phi(a') \circ \phi(b') \overset{\text{Def. 5 von Homomorp.}}{=} \phi(a' \cdot b') \in Bild_\phi(G')$.

(ii) Ist $a \in Urbild_\phi(H')$, so ist nach Satz 7 $(\phi(a))^{-1} = \phi(a^{-1})$. Also, $a^{-1} \in Urbild_\phi(H')$.

Ist $a \in Bild_\phi(G')$, so gibt es ein $a' \in G'$ mit $\phi(a') = a$.

$$\begin{cases} \text{Abg. Bzgl. Inv.:} & \Longrightarrow \quad a'^{-1} \in G' \\ \text{Satz 7:} & \Longrightarrow \quad \phi(a'^{-1}) = \phi(a')^{-1} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \phi(a'^{-1}) = a^{-1} \in Bild_\phi(G')$.

$\square$

Def. 7

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus.

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus.

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$)

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\})$

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\}$

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: *Kern*$_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: *Kern*$_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$.

$$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \ \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$)

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}, \ \phi(k) = \frac{k}{3}$.

$$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \ \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}, \ \phi(k) = \frac{k}{3}$.

$$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \ \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt:

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$.

$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}$, $\psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$.

(Für alle Gruppen $(G,\cdot)$ und $(H,\circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: *$Kern_\phi$*) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H},\ \phi(k) = \frac{k}{3}$.

$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}},\ \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$,

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: *$Kern_\phi$*) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$.

$$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \ \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$, $Kern_\psi =$

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$.

$$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \ \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$, $Kern_\psi = 2\mathbb{Z}$,

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}, \ \phi(k) = \frac{k}{3}$.

$$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \ \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$, $Kern_\psi = 2\mathbb{Z}$, $Kern_\tau = G$.

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}, \ \phi(k) = \frac{k}{3}$.

$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \ \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$, $Kern_\psi = 2\mathbb{Z}$, $Kern_\tau = G$.

Folgerung

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$.

$$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \ \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade}. \end{cases}$$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$, $Kern_\psi = 2\mathbb{Z}$, $Kern_\tau = G$.

Folgerung *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus.*

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$.

$$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \quad \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$, $Kern_\psi = 2\mathbb{Z}$, $Kern_\tau = G$.

Folgerung *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann sind $Kern_\phi$ und $Bild_\phi$ die Untergruppen von jeweils G and H.*

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: *$Kern_\phi$*) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}, \ \phi(k) = \frac{k}{3}$.

$$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \ \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$, $Kern_\psi = 2\mathbb{Z}$, $Kern_\tau = G$.

Folgerung *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann sind $Kern_\phi$ und $Bild_\phi$ die Untergruppen von jeweils G and H.*

Beweis:

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$.

$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}$, $\psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$.

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$, $Kern_\psi = 2\mathbb{Z}$, $Kern_\tau = G$.

Folgerung *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann sind $Kern_\phi$ und $Bild_\phi$ die Untergruppen von jeweils G and H.*

Beweis: $\{e\}$ und G sind die Untergruppen von jeweils H und G.

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: *Kern*$_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}, \ \phi(k) = \frac{k}{3}$.

$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \ \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$, $Kern_\psi = 2\mathbb{Z}$, $Kern_\tau = G$.

Folgerung *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann sind $Kern_\phi$ und $Bild_\phi$ die Untergruppen von jeweils G and H.*

Beweis: $\{e\}$ und G sind die Untergruppen von jeweils H und G. Nach Satz 8 sind $Kern_\phi := Urbild_\phi(\{e_H\})$

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}, \ \phi(k) = \frac{k}{3}$.

$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}}, \ \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$, $Kern_\psi = 2\mathbb{Z}$, $Kern_\tau = G$.

Folgerung *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann sind $Kern_\phi$ und $Bild_\phi$ die Untergruppen von jeweils G and H.*

Beweis: $\{e\}$ und G sind die Untergruppen von jeweils H und G. Nach Satz 8 sind $Kern_\phi := Urbild_\phi(\{e_H\})$, und $Bild_\phi = Bild_\phi(G)$ auch Untergruppen.

Def. 7 Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Kernel von ϕ (Bez: $Kern_\phi$) ist $Urbild_\phi(\{e_H\}) := \{a \in G \mid \phi(a) = e\} \subseteq G$.

Bsple von Homomorphh. direkt nach Def. 5:

$\phi : \underbrace{3\mathbb{Z}}_{G} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{H}$, $\phi(k) = \frac{k}{3}$.

$$\psi : \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{Aus Vorlesung 3}} , \psi(k) = \begin{cases} e & \text{falls } k \text{ gerade} \\ a & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

(Für alle Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$) $\tau : G \to H$, $\tau(a) = e_H$.

Dann gilt: $Kern_\phi = \{0\}$, $Kern_\psi = 2\mathbb{Z}$, $Kern_\tau = G$.

Folgerung *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann sind $Kern_\phi$ und $Bild_\phi$ die Untergruppen von jeweils G and H.*

Beweis: $\{e\}$ und G sind die Untergruppen von jeweils H und G. Nach Satz 8 sind $Kern_\phi := Urbild_\phi(\{e_H\})$, und $Bild_\phi = Bild_\phi(G)$ auch Untergruppen. $\square$

Satz 9

Satz 9 *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus.*

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*
$Kern_\phi =$

Satz 9 *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus. Dann gilt:*
$Kern_\phi = \ \{e\}$

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*
$Kern_\phi = \{e\} \iff$

Satz 9 *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus. Dann gilt:*
$Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ *ist injektiv.*

Satz 9 *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus. Dann gilt:* *Kern*$_\phi = \{e\} \iff \phi$ *ist injektiv.*

Beweis:

Satz 9 *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus. Dann gilt:* $Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ *ist injektiv.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$.

Satz 9 *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus. Dann gilt:* $Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ *ist injektiv.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$.

Satz 9 *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus. Dann gilt:* $Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ *ist injektiv.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1}$

Satz 9 *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus. Dann gilt:* $Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ *ist injektiv.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=}$$

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*
$Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ ist injektiv.

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)\left(\phi(y^{-1})\right) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=}$$

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:* *$Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ ist injektiv.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)\left(\phi(y^{-1})\right) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$$

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*
$Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ *ist injektiv.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)\left(\phi(y^{-1})\right) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$$

Also, $xy^{-1} \in Kern_\phi$.

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*
$Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ ist injektiv.

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)\left(\phi(y^{-1})\right) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$$

Also, $xy^{-1} \in Kern_\phi$. Da $Kern_\phi = \{e\}$,

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*
$Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ ist injektiv.

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)(\phi(y^{-1})) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$$

Also, $xy^{-1} \in Kern_\phi$. Da $Kern_\phi = \{e\}$, ist $xy^{-1} = e$.

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*
$Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ ist injektiv.

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \stackrel{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)(\phi(y^{-1})) \stackrel{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$$

Also, $xy^{-1} \in Kern_\phi$. Da $Kern_\phi = \{e\}$, ist $xy^{-1} = e$. Dann $x = y$.

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*
$Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ ist injektiv.

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)(\phi(y^{-1})) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$$

Also, $xy^{-1} \in Kern_\phi$. Da $Kern_\phi = \{e\}$, ist $xy^{-1} = e$. Dann $x = y$.

$\Longleftarrow$: ϕ sei injektiv.

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt: $Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ ist injektiv.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)(\phi(y^{-1})) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$$

Also, $xy^{-1} \in Kern_\phi$. Da $Kern_\phi = \{e\}$, ist $xy^{-1} = e$. Dann $x = y$.

$\Longleftarrow$: ϕ sei injektiv. Dann besteht $Kern_\phi := Urbild_\phi(\{e\}$

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*
$Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ *ist injektiv.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)(\phi(y^{-1})) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$$

Also, $xy^{-1} \in Kern_\phi$. Da $Kern_\phi = \{e\}$, ist $xy^{-1} = e$. Dann $x = y$.

$\Longleftarrow$: ϕ sei injektiv. Dann besteht $Kern_\phi := Urbild_\phi(\{e\}$ aus einem Element.

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:* $Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ *ist injektiv.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)(\phi(y^{-1})) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$
Also, $xy^{-1} \in Kern_\phi$. Da $Kern_\phi = \{e\}$, ist $xy^{-1} = e$. Dann $x = y$.

$\Longleftarrow$: ϕ sei injektiv. Dann besteht $Kern_\phi := Urbild_\phi(\{e\}$ aus einem Element. Aber $Urbild_\phi(\{e\})$

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*
$Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ *ist injektiv.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)(\phi(y^{-1})) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$$

Also, $xy^{-1} \in Kern_\phi$. Da $Kern_\phi = \{e\}$, ist $xy^{-1} = e$. Dann $x = y$.

$\Longleftarrow$: ϕ sei injektiv. Dann besteht $Kern_\phi := Urbild_\phi(\{e\}$ aus einem Element. Aber $Urbild_\phi(\{e\})$ ist eine Untergruppe (Satz 8),

Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:* *$Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ ist injektiv.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)(\phi(y^{-1})) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$
Also, $xy^{-1} \in Kern_\phi$. Da $Kern_\phi = \{e\}$, ist $xy^{-1} = e$. Dann $x = y$.

$\Longleftarrow$: ϕ sei injektiv. Dann besteht $Kern_\phi := Urbild_\phi(\{e\}$ aus einem Element. Aber $Urbild_\phi(\{e\})$ ist eine Untergruppe (Satz 8), und deswegen enthält e.

Satz 9 *Sei* $\phi : G \to H$ *ein Homomorphismus. Dann gilt:* $Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ *ist injektiv.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

$$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)(\phi(y^{-1})) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$$

Also, $xy^{-1} \in Kern_\phi$. Da $Kern_\phi = \{e\}$, ist $xy^{-1} = e$. Dann $x = y$.

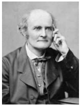
$\Longleftarrow$: ϕ sei injektiv. Dann besteht $Kern_\phi := Urbild_\phi(\{e\}$ aus einem Element. Aber $Urbild_\phi(\{e\})$ ist eine Untergruppe (Satz 8), und deswegen enthält e. Dann ist $Kern_\phi = \{e\}$.

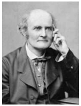
Satz 9 *Sei $\phi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt:* $Kern_\phi = \{e\} \iff \phi$ *ist injektiv.*

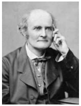
Beweis: $\Longrightarrow$: Angenommen, $Kern_\phi = \{e\}$. Man betrachte $x, y \in G$ mit $\phi(x) = \phi(y)$. Z.z.: $x = y$.

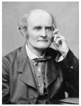
$e = \phi(x)(\phi(y))^{-1} \overset{\text{Satz 7}}{=} \phi(x)\left(\phi(y^{-1})\right) \overset{\text{Def. Homomorph.}}{=} \phi\left(xy^{-1}\right)$
Also, $xy^{-1} \in Kern_\phi$. Da $Kern_\phi = \{e\}$, ist $xy^{-1} = e$. Dann $x = y$.

$\Longleftarrow$: ϕ sei injektiv. Dann besteht $Kern_\phi := Urbild_\phi(\{e\}$ aus einem Element. Aber $Urbild_\phi(\{e\})$ ist eine Untergruppe (Satz 8), und deswegen enthält e. Dann ist $Kern_\phi = \{e\}$. $\square$

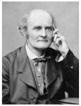
Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)**

Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)** *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe,*

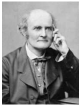
Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)** *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe,* $\#G = n < \infty$.

Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)** *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe,*

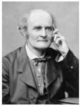
$\#G = n < \infty$. *Dann gibt es eine Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$, *s.d.* G *zu* H *isomorph ist.*

Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)** *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe,* $\#G = n < \infty$. *Dann gibt es eine Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$*, s.d.* G *zu* H *isomorph ist.*

In Worten:

Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)** *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe,* $\#G = n < \infty$. *Dann gibt es eine Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$, *s.d.* G *zu* H *isomorph ist.*

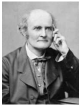
In Worten: Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.

Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)** *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe,* $\#G = n < \infty$. *Dann gibt es eine Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$, *s.d.* G *zu* H *isomorph ist.*

In Worten: Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.

Logic des Abschnitts „Gruppentheorie“:

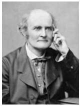
- Definitionen

Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)** *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe,* $\#G = n < \infty$. *Dann gibt es eine Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$, *s.d.* G *zu* H *isomorph ist.*

In Worten: Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.

Logic des Abschnitts „Gruppentheorie“:

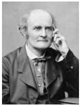
- Definitionen
- Einige Eigenschaften

Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)** *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe,* $\#G = n < \infty$. *Dann gibt es eine Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$*, s.d.* G *zu* H *isomorph ist.*

In Worten: Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.

Logic des Abschnitts „Gruppentheorie“:

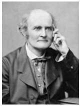
- Definitionen
- Einige Eigenschaften
- Eine grosse Familie von Bsple ($\mathcal{S}_n$ und deren Untegruppen.)

Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)** *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe,* $\#G = n < \infty$. *Dann gibt es eine Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$, *s.d.* G *zu* H *isomorph ist.*

In Worten: Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.

Logic des Abschnitts „Gruppentheorie“:

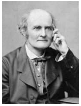
- Definitionen
- Einige Eigenschaften
- Eine grosse Familie von Bsple ($\mathcal{S}_n$ und deren Untegruppen.)
- Die Aussage (Satz von Cayley), dass alle Gruppen die Gruppen aus der Familie von Bsple sind

Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)** *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe,* $\#G = n < \infty$. *Dann gibt es eine Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$, *s.d.* G *zu* H *isomorph ist.*

In Worten: Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.

Logic des Abschnitts „Gruppentheorie“:

- Definitionen
- Einige Eigenschaften
- Eine grosse Familie von Bsple ($\mathcal{S}_n$ und deren Untegruppen.)
- Die Aussage (Satz von Cayley), dass alle Gruppen die Gruppen aus der Familie von Bsple sind (bis zum Isomophismen)

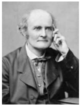
Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)** *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe, $\#G = n < \infty$. Dann gibt es eine Untegruppe $H \subseteq \mathcal{S}_n$, s.d. G zu H isomorph ist.*

In Worten: Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.

Logic des Abschnitts „Gruppentheorie“:

- Definitionen
- Einige Eigenschaften
- Eine grosse Familie von Bsple ($\mathcal{S}_n$ und deren Untegruppen.)
- Die Aussage (Satz von Cayley), dass alle Gruppen die Gruppen aus der Familie von Bsple sind (bis zum Isomophismen)

Solche Logic heißt „synthetische Aufbau“ der Theorie;

Satz 10 (Cayley  **1821 –1895)** *Sei* $(G,\cdot)$ *eine Gruppe,* $\#G = n < \infty$. *Dann gibt es eine Untegruppe* $H \subseteq \mathcal{S}_n$*, s.d.* G *zu* H *isomorph ist.*

In Worten: Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.

Logic des Abschnitts „Gruppentheorie“:

- Definitionen
- Einige Eigenschaften
- Eine grosse Familie von Bsple ($\mathcal{S}_n$ und deren Untegruppen.)
- Die Aussage (Satz von Cayley), dass alle Gruppen die Gruppen aus der Familie von Bsple sind (bis zum Isomophismen)

Solche Logic heißt „synthetische Aufbau“ der Theorie; wir werden viele Theorien synthetisch aufbauen.

Beweis.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf,

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \to \mathcal{S}_n$ wie folgt:

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \to \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \to \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1:

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \to \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert:

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \to \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \longrightarrow \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.
Injektivität von $\phi(a)$:

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \longrightarrow \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Injektivität von $\phi(a)$: Ist $\phi(a)(x) = \phi(a)(y)$,

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \longrightarrow \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Injektivität von $\phi(a)$: Ist $\phi(a)(x) = \phi(a)(y)$, so ist $ax = ay$

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \longrightarrow \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.
Injektivität von $\phi(a)$: Ist $\phi(a)(x) = \phi(a)(y)$, so ist $ax = ay$ und, nach multiplizieren mit a^{-1},

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \longrightarrow \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Injektivität von $\phi(a)$: Ist $\phi(a)(x) = \phi(a)(y)$, so ist $ax = ay$ und, nach multiplizieren mit a^{-1}, ist $x = y$.

Surjektivität von $\phi(a)$:

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \longrightarrow \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Injektivität von $\phi(a)$: Ist $\phi(a)(x) = \phi(a)(y)$, so ist $ax = ay$ und, nach multiplizieren mit a^{-1}, ist $x = y$.

Surjektivität von $\phi(a)$: Z.z.: $\forall y \in G$

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \longrightarrow \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.
Injektivität von $\phi(a)$: Ist $\phi(a)(x) = \phi(a)(y)$, so ist $ax = ay$ und, nach multiplizieren mit a^{-1}, ist $x = y$.
Surjektivität von $\phi(a)$: Z.z.: $\forall y \in G \ \ \exists x \in G$

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \to \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Injektivität von $\phi(a)$: Ist $\phi(a)(x) = \phi(a)(y)$, so ist $ax = ay$ und, nach multiplizieren mit a^{-1}, ist $x = y$.

Surjektivität von $\phi(a)$: Z.z.: $\forall y \in G \;\; \exists x \in G$ mit $\phi(a)(x) = ax = y$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \to \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.
Injektivität von $\phi(a)$: Ist $\phi(a)(x) = \phi(a)(y)$, so ist $ax = ay$ und, nach multiplizieren mit a^{-1}, ist $x = y$.
Surjektivität von $\phi(a)$: Z.z.: $\forall y \in G \ \ \exists x \in G$ mit $\phi(a)(x) = ax = y$. Aber das ist erfüllt für $x = a^{-1}y$.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \to \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.
Injektivität von $\phi(a)$: Ist $\phi(a)(x) = \phi(a)(y)$, so ist $ax = ay$ und, nach multiplizieren mit a^{-1}, ist $x = y$.
Surjektivität von $\phi(a)$: Z.z.: $\forall y \in G \ \exists x \in G$ mit $\phi(a)(x) = ax = y$. Aber das ist erfüllt für $x = a^{-1}y$.
Also,

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \to \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Injektivität von $\phi(a)$: Ist $\phi(a)(x) = \phi(a)(y)$, so ist $ax = ay$ und, nach multiplizieren mit a^{-1}, ist $x = y$.

Surjektivität von $\phi(a)$: Z.z.: $\forall y \in G \;\; \exists x \in G$ mit $\phi(a)(x) = ax = y$. Aber das ist erfüllt für $x = a^{-1}y$.

Also, ist $\phi(a)$ eine Bijektion,

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \to \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Injektivität von $\phi(a)$: Ist $\phi(a)(x) = \phi(a)(y)$, so ist $ax = ay$ und, nach multiplizieren mit a^{-1}, ist $x = y$.

Surjektivität von $\phi(a)$: Z.z.: $\forall y \in G \;\; \exists x \in G$ mit $\phi(a)(x) = ax = y$. Aber das ist erfüllt für $x = a^{-1}y$.

Also, ist $\phi(a)$ eine Bijektion, und deswegen ist die Abbildung ϕ wohldefiniert.

Beweis. Wir fassen $\mathcal{S}_n$ als die Gruppe von Bijektionen von G nach G auf, und definieren $\phi : G \to \mathcal{S}_n$ wie folgt: $\underbrace{\phi(a)}_{\in \mathcal{S}_n}(b) = ab$.

Behauptung 1: ϕ ist wohldefiniert: für jedes $a \in G$ ist $\phi(a)$ eine Bijektion von G nach G.

Injektivität von $\phi(a)$: Ist $\phi(a)(x) = \phi(a)(y)$, so ist $ax = ay$ und, nach multiplizieren mit a^{-1}, ist $x = y$.

Surjektivität von $\phi(a)$: Z.z.: $\forall y \in G \ \ \exists x \in G$ mit $\phi(a)(x) = ax = y$. Aber das ist erfüllt für $x = a^{-1}y$.

Also, ist $\phi(a)$ eine Bijektion, und deswegen ist die Abbildung ϕ wohldefiniert.