Def. 3

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.*

Def. 3 *Sei* $f : A \longrightarrow B$ *eine Abbildung. Eine Abbildung* $g : B \longrightarrow A$ *heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu* f*,*

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Def. 3 *Sei* $f : A \longrightarrow B$ *eine Abbildung. Eine Abbildung* $g : B \longrightarrow A$ *heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu* f*, falls* $g \circ f = Id_A$ *(bzw.* $f \circ g = Id_B$*.)*

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$.*

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv*

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv*

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

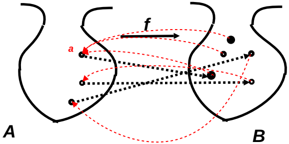
Beweis:

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:

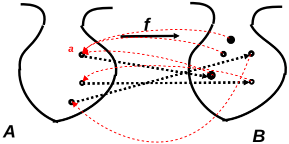


Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



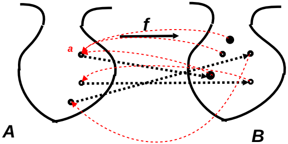
(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt.

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



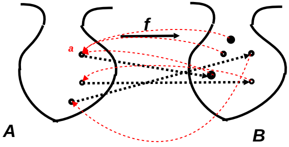
(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



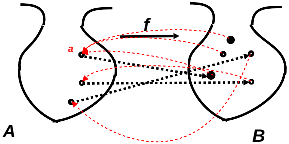
(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



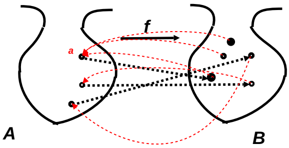
(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y).

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



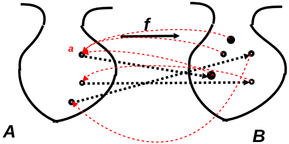
(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$,

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



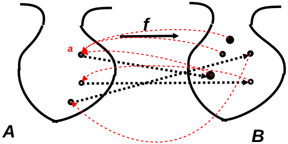
(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

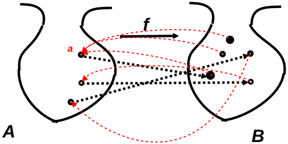
(1) $\Leftarrow$:

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

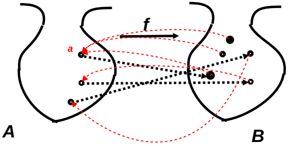
(1) $\Leftarrow$: Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \emptyset$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

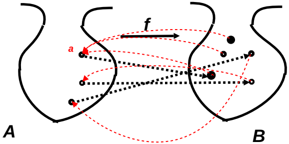
(1) $\Leftarrow$: Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben.

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \emptyset$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

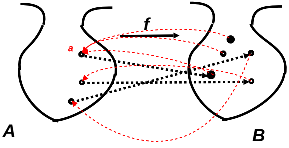
(1) $\Leftarrow$: Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen.

Def. 3 *Sei $f: A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g: B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f: A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \emptyset$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g: B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

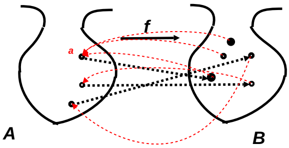
(1) $\Leftarrow$: Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen. Dazu wird g auf die Gleichung $f(x) = f(y)$ angewendet,

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

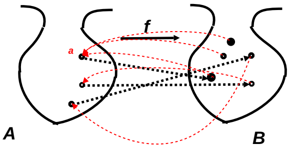
(1) $\Leftarrow$: Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen. Dazu wird g auf die Gleichung $f(x) = f(y)$ angewendet, was $g(f(x)) = g(f(y))$ ergibt.

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

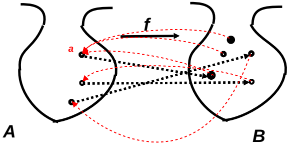
(1) $\Leftarrow$: Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen. Dazu wird g auf die Gleichung $f(x) = f(y)$ angewendet, was $g(f(x)) = g(f(y))$ ergibt. Mit der Eigenschaft der Linksinversen haben wir $\mathrm{Id}_A(x) = \mathrm{Id}_A(y)$,

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

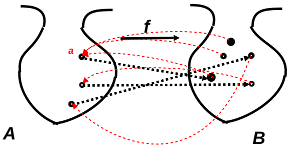
(1) $\Leftarrow$: Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen. Dazu wird g auf die Gleichung $f(x) = f(y)$ angewendet, was $g(f(x)) = g(f(y))$ ergibt. Mit der Eigenschaft der Linksinversen haben wir $\mathrm{Id}_A(x) = \mathrm{Id}_A(y)$, also $x = y$.

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

(1) $\Leftarrow$: Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen. Dazu wird g auf die Gleichung $f(x) = f(y)$ angewendet, was $g(f(x)) = g(f(y))$ ergibt. Mit der Eigenschaft der Linksinversen haben wir $\mathrm{Id}_A(x) = \mathrm{Id}_A(y)$, also $x = y$.

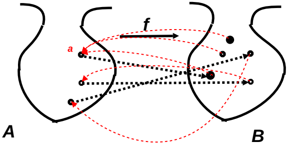
$\square$

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

(1) $\Leftarrow$: Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen. Dazu wird g auf die Gleichung $f(x) = f(y)$ angewendet, was $g(f(x)) = g(f(y))$ ergibt. Mit der Eigenschaft der Linksinversen haben wir $\mathrm{Id}_A(x) = \mathrm{Id}_A(y)$, also $x = y$.

□

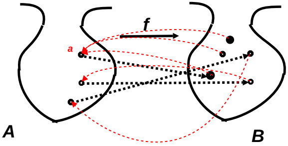
Beweis (2):

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

(1) $\Leftarrow$: Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen. Dazu wird g auf die Gleichung $f(x) = f(y)$ angewendet, was $g(f(x)) = g(f(y))$ ergibt. Mit der Eigenschaft der Linksinversen haben wir $\mathrm{Id}_A(x) = \mathrm{Id}_A(y)$, also $x = y$.

$\square$

Beweis (2): Hausaufgabe.

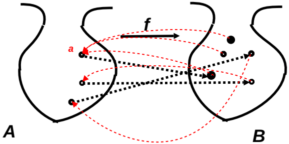
Bemerkung

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

(1) $\Leftarrow$: Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen. Dazu wird g auf die Gleichung $f(x) = f(y)$ angewendet, was $g(f(x)) = g(f(y))$ ergibt. Mit der Eigenschaft der Linksinversen haben wir $\mathrm{Id}_A(x) = \mathrm{Id}_A(y)$, also $x = y$.

$\square$

Beweis (2): Hausaufgabe.

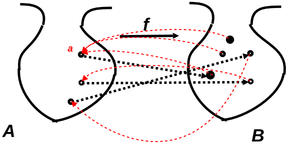
Bemerkung Links- und rechts- inverse sind nicht immer eindeutig.

Def. 3 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \to A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Beweis:



(1) $\Rightarrow$: f sei injektiv vorausgesetzt. Sei $a \in A$. Die gesuchte linksinverse Abbildung $g : B \to A$ wird nun definiert durch $g(y) := x$, falls y in der Bildmenge von f liegt, und $f(x) = y$ ist (da f injektiv ist, ergibt sich x eindeutig aus y). $g(y) := a$, falls y nicht in der Bildmenge von f liegt.

(1) $\Leftarrow$: Es gelte $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Nun seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Wir müssen $x = y$ zeigen. Dazu wird g auf die Gleichung $f(x) = f(y)$ angewendet, was $g(f(x)) = g(f(y))$ ergibt. Mit der Eigenschaft der Linksinversen haben wir $\mathrm{Id}_A(x) = \mathrm{Id}_A(y)$, also $x = y$. $\square$

Beweis (2): Hausaufgabe.

Bemerkung Links- und rechts- inverse sind nicht immer eindeutig.

Lemma 3

Lemma 3 Sei $f : A \to B$.

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

f ist bijektion

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

f ist bijektion $\iff$ $\exists g : B \to A$

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion} \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \end{array}$$

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

f ist bijektion $\iff$ $\exists g : B \to A$ s.d. $g \circ f = f \circ g = Id_A$.

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis:

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion} \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“:

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion } \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Lemma 3 Sei $f : A \rightarrow B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion } \iff \begin{array}{l} \exists g : B \rightarrow A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“:

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

f ist bijektion $\iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv.

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion } \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A\ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$,

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion } \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$.

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

f ist bijektion $\iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$": Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$": f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

g_1

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion } \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \stackrel{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B$$

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion } \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2)$$

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion } \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \end{array}.$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2$$

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion} \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2$$

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion } \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Eindeutigkeit:

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion } \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Eindeutigkeit: für g_1 und g_2 gelte:

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

f ist bijektion $\iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \end{array}$.

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$": Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$": f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Eindeutigkeit: für g_1 und g_2 gelte: $g_i \circ f = Id_A$,

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion } \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Eindeutigkeit: für g_1 und g_2 gelte: $g_i \circ f = Id_A$, $f \circ g_i = Id_B$ $(i = 1, 2)$.

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion } \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$": Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$": f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Eindeutigkeit: für g_1 und g_2 gelte: $g_i \circ f = Id_A$, $f \circ g_i = Id_B$ $(i = 1, 2)$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2)$$

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

f ist bijektion $\iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Eindeutigkeit: für g_1 und g_2 gelte: $g_i \circ f = Id_A$, $f \circ g_i = Id_B$ $(i = 1, 2)$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

f ist bijektion $\iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Eindeutigkeit: für g_1 und g_2 gelte: $g_i \circ f = Id_A$, $f \circ g_i = Id_B$ $(i = 1, 2)$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Bezeichnung:

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

f ist bijektion $\iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$": Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$": f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Eindeutigkeit: für g_1 und g_2 gelte: $g_i \circ f = Id_A$, $f \circ g_i = Id_B$ $(i = 1, 2)$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Bezeichnung: *Solches g werden wir f^{-1} bezeichnen*

Lemma 3 Sei $f : A \to B$. Dann gilt:

$$f \text{ ist bijektion} \iff \begin{array}{l} \exists g : B \to A \\ s.d.\ g \circ f = f \circ g = Id_A \ . \end{array}$$

Ferner gilt: Solches g ist eindeutig (und wird f^{-1} bezeichnet).

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Nach Lemma 2 ist f injektiv und surjektiv, also bijektiv.

„$\Longrightarrow$“: f sei surjektiv und injektiv. Nach Lemma 2 $\exists$ g_1 und g_2 mit $g_1 \circ f = Id_A$, $f \circ g_2 = Id_B$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Eindeutigkeit: für g_1 und g_2 gelte: $g_i \circ f = Id_A$, $f \circ g_i = Id_B$ $(i = 1, 2)$. Z.z.: $g_1 = g_2$.

$$g_1 \overset{\text{immer}}{=} g_1 \circ Id_B = g_1 \circ (f \circ g_2) \overset{\text{Lemma 1}}{=} (g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_A \circ g_2 \overset{\text{immer}}{=} g_2.$$

Bezeichnung: *Solches g werden wir f^{-1} bezeichnen und die Inverse nennen.*

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3 *Sei M eine (nichtleere) Menge.*

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3 *Sei M eine (nichtleere) Menge. Sei* $\mathcal{S}_M = \{f : M \to M,\ f \textit{ ist bijektiv}\}$.

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3 *Sei M eine (nichtleere) Menge. Sei $\mathcal{S}_M = \{f : M \to M,\ f \textit{ ist bijektiv }\}$. Dann gilt: $(\mathcal{S}_M, \circ)$*

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3 *Sei M eine (nichtleere) Menge. Sei* $\mathcal{S}_M = \{f : M \to M,\ f \textit{ ist bijektiv } \}$. *Dann gilt:* $(\mathcal{S}_M, \circ)$ *ist eine Gruppe.*

Beweis:

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3 *Sei M eine (nichtleere) Menge. Sei $\mathcal{S}_M = \{f : M \to M, \ f \ \textit{ist bijektiv} \}$. Dann gilt: $(\mathcal{S}_M, \circ)$ ist eine Gruppe.*

Beweis: Die Multiplikation ist wohl definiert:

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3 *Sei M eine (nichtleere) Menge. Sei $\mathcal{S}_M = \{f : M \to M,\ f \text{ ist bijektiv } \}$. Dann gilt: $(\mathcal{S}_M, \circ)$ ist eine Gruppe.*

Beweis: Die Multiplikation ist wohl definiert: Verkettung von zwei Bijektionen ist eine Bijektion

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3 *Sei M eine (nichtleere) Menge. Sei $\mathcal{S}_M = \{f : M \to M,\ f \textit{ ist bijektiv } \}$. Dann gilt: $(\mathcal{S}_M, \circ)$ ist eine Gruppe.*

Beweis: Die Multiplikation ist wohl definiert: Verkettung von zwei Bijektionen ist eine Bijektion (Hausaufgabe: Sind f und g bijektiv, dann auch $g \circ f$.)

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3 *Sei M eine (nichtleere) Menge. Sei* $\mathcal{S}_M = \{f : M \to M,\ f \textit{ ist bijektiv } \}$. *Dann gilt:* $(\mathcal{S}_M, \circ)$ *ist eine Gruppe.*

Beweis: Die Multiplikation ist wohl definiert: Verkettung von zwei Bijektionen ist eine Bijektion (Hausaufgabe: Sind f und g bijektiv, dann auch $g \circ f$.) Wir müssen Eigenschaften (G1, G2, G3) überprüfen:

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3 *Sei M eine (nichtleere) Menge. Sei $\mathcal{S}_M = \{f : M \to M,\ f \text{ ist bijektiv}\}$. Dann gilt: $(\mathcal{S}_M, \circ)$ ist eine Gruppe.*

Beweis: Die Multiplikation ist wohl definiert: Verkettung von zwei Bijektionen ist eine Bijektion (Hausaufgabe: Sind f und g bijektiv, dann auch $g \circ f$.) Wir müssen Eigenschaften (G1, G2, G3) überprüfen:

(G1): $\forall f, g, h \in \mathcal{S}_M \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3 *Sei M eine (nichtleere) Menge. Sei $\mathcal{S}_M = \{f : M \to M,\ f \textit{ ist bijektiv} \}$. Dann gilt: $(\mathcal{S}_M, \circ)$ ist eine Gruppe.*

Beweis: Die Multiplikation ist wohl definiert: Verkettung von zwei Bijektionen ist eine Bijektion (Hausaufgabe: Sind f und g bijektiv, dann auch $g \circ f$.) Wir müssen Eigenschaften (G1, G2, G3) überprüfen:

(G1): $\forall f, g, h \in \mathcal{S}_M \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \quad \Longleftarrow$ Lemma 1

(G2): $\exists\ e \in \mathcal{S}_M$ s.d. $\forall f \in \mathcal{S}_M \quad e \circ f = f$.

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3 *Sei M eine (nichtleere) Menge. Sei* $\mathcal{S}_M = \{f : M \to M, \ f \textit{ ist bijektiv } \}$. *Dann gilt:* $(\mathcal{S}_M, \circ)$ *ist eine Gruppe.*

Beweis: Die Multiplikation ist wohl definiert: Verkettung von zwei Bijektionen ist eine Bijektion (Hausaufgabe: Sind f und g bijektiv, dann auch $g \circ f$.) Wir müssen Eigenschaften (G1, G2, G3) überprüfen:

(G1): $\forall f, g, h \in \mathcal{S}_M \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \quad \Longleftarrow$ Lemma 1

(G2): $\exists \ e \in \mathcal{S}_M$ s.d. $\forall f \in \mathcal{S}_M \quad e \circ f = f. \quad \Longleftarrow e = Id_M$, s. Wicht. Bsp.

(G3): $\forall \ f \in \mathcal{S}_M \ \exists \ g \in \mathcal{S}_M$ mit $g \circ f = e = Id_M$.

Die Menge von Bijektionen ist eine Gruppe

Satz 3 *Sei M eine (nichtleere) Menge. Sei* $\mathcal{S}_M = \{f : M \to M,\ f \text{ ist bijektiv}\}$. *Dann gilt:* $(\mathcal{S}_M, \circ)$ *ist eine Gruppe.*

Beweis: Die Multiplikation ist wohl definiert: Verkettung von zwei Bijektionen ist eine Bijektion (Hausaufgabe: Sind f und g bijektiv, dann auch $g \circ f$.) Wir müssen Eigenschaften (G1, G2, G3) überprüfen:

(G1): $\forall f, g, h \in \mathcal{S}_M \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \quad \Longleftarrow$ Lemma 1

(G2): $\exists\ e \in \mathcal{S}_M$ s.d. $\forall f \in \mathcal{S}_M \quad e \circ f = f. \quad \Longleftarrow e = Id_M$, s. Wicht. Bsp.

(G3): $\forall\ f \in \mathcal{S}_M\ \exists\ g \in \mathcal{S}_M$ mit $g \circ f = e = Id_M. \quad \Longleftarrow$ Lemma 3 $\square$

Permutationen

Permutationen

Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elemente.

Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elemente.

Bezeichnung.

Permutationen

Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elemente.

Bezeichnung. Die Gruppe

Permutationen

Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elemente.

Bezeichnung. Die Gruppe $$\left(\underbrace{\{ f : M \to M,\ f \text{ ist bijektiv} \}}_{\text{aller Bijektionen } f\,:\,M \to M}, \circ \right)$$

bezeichnet man $\mathcal{S}_n$

Permutationen

Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elemente.

Bezeichnung. Die Gruppe $\left(\underbrace{\{f : M \to M,\ f \text{ ist bijektiv}\}}_{\text{aller Bijektionen } f : M \to M}, \circ \right)$

bezeichnet man $\mathcal{S}_n$ und nennt man die Gruppe von Permutationen von M.

OBdA ist $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Permutationen

Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elemente.

Bezeichnung. Die Gruppe $\left(\underbrace{\{f : M \to M,\ f \text{ ist bijektiv}\}}_{\text{aller Bijektionen } f : M \to M}, \circ \right)$
bezeichnet man $\mathcal{S}_n$ und nennt man die Gruppe von Permutationen von M.
OBdA ist $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Dann kann mann das Elemente $f \in \mathcal{S}_n$ als $2 \times n$-Tabellen schreiben

Permutationen

Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elemente.

Bezeichnung. Die Gruppe $\left(\underbrace{\{f : M \to M, \ f \text{ ist bijektiv} \}}_{\text{aller Bijektionen } f \,:\, M \to M}, \circ \right)$ bezeichnet man $\mathcal{S}_n$ und nennt man die Gruppe von Permutationen von M.

OBdA ist $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Dann kann mann das Elemente $f \in \mathcal{S}_n$ als $2 \times n$-Tabellen schreiben (Matrixform):

Permutationen

Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elemente.

Bezeichnung. Die Gruppe $\left(\underbrace{\{f : M \to M,\ f \text{ ist bijektiv}\}}_{\text{aller Bijektionen } f : M \to M}, \circ \right)$ bezeichnet man $\mathcal{S}_n$ und nennt man die Gruppe von Permutationen von M.

OBdA ist $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Dann kann mann das Elemente $f \in \mathcal{S}_n$ als $2 \times n$-Tabellen schreiben (Matrixform):

f

Permutationen

Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elemente.

Bezeichnung. Die Gruppe $\left(\underbrace{\{f : M \to M,\ f \text{ ist bijektiv}\}}_{\text{aller Bijektionen } f : M \to M}, \circ \right)$

bezeichnet man $\mathcal{S}_n$ und nennt man die Gruppe von Permutationen von M.

OBdA ist $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Dann kann mann das Elemente $f \in \mathcal{S}_n$ als $2 \times n$-Tabellen schreiben (Matrixform):

$$f \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ f(1) & f(2) & ... & f(n) \end{pmatrix}.$$

Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elemente.

Bezeichnung. Die Gruppe $\left(\underbrace{\{f : M \to M, \ f \text{ ist bijektiv}\}}_{\text{aller Bijektionen } f : M \to M}, \circ \right)$ bezeichnet man $\mathcal{S}_n$ und nennt man die Gruppe von Permutationen von M.

OBdA ist $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Dann kann mann das Elemente $f \in \mathcal{S}_n$ als $2 \times n$-Tabellen schreiben (Matrixform):

$$f \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ f(1) & f(2) & ... & f(n) \end{pmatrix}.$$

Bsp:

Permutationen

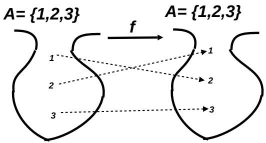
Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elemente.

Bezeichnung. Die Gruppe $\left(\underbrace{\{ f : M \to M,\ f \text{ ist bijektiv} \}}_{\text{aller Bijektionen } f\,:\,M \to M}, \circ \right)$ bezeichnet man $\mathcal{S}_n$ und nennt man die Gruppe von Permutationen von M.

OBdA ist $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Dann kann mann das Elemente $f \in \mathcal{S}_n$ als $2 \times n$-Tabellen schreiben (Matrixform):

$$f \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ f(1) & f(2) & ... & f(n) \end{pmatrix}.$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:



Permutationen

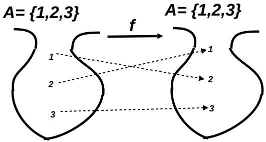
Die Menge M bestehe aus $n < \infty$ Elemente.

Bezeichnung. Die Gruppe $$\left(\underbrace{\{f : M \to M,\ f \text{ ist bijektiv }\}}_{\text{aller Bijektionen } f\,:\,M\to M}, \circ\right)$$
bezeichnet man $\mathcal{S}_n$ und nennt man die Gruppe von Permutationen von M.

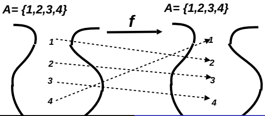
OBdA ist $M = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Dann kann mann das Elemente $f \in \mathcal{S}_n$ als $2 \times n$-Tabellen schreiben (Matrixform):

$$f \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:



Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.



Multiplizieren und invertieren von Permutationen

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$?

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$ **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$?

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & & \end{pmatrix}$$

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & & \end{pmatrix}$$

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & \end{pmatrix}$$

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3

Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

Bsp:

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3

Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben $(1\ 2\ \ 3\ \ \ldots\ \ n)$ steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

:

.

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben $(1\ 2\ \ 3\ \ \ldots\ \ n)$ steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

:

.

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tatsächlich: falls $f(i) = j$, dann $f^{-1}(j) = i$.

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tatsächlich: falls $f(i) = j$, dann $f^{-1}(j) = i$.

Aubfgabe: Man finde $X \in \mathcal{S}_4$

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tatsächlich: falls $f(i) = j$, dann $f^{-1}(j) = i$.

Aubfgabe: Man finde $X \in \mathcal{S}_4$ s.d. $X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tatsächlich: falls $f(i) = j$, dann $f^{-1}(j) = i$.

Aubfgabe: Man finde $X \in \mathcal{S}_4$ s.d. $X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tatsächlich: falls $f(i) = j$, dann $f^{-1}(j) = i$.

Aubfgabe: Man finde $X \in \mathcal{S}_4$ s.d. $X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir multiplizieren von rechts mit
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tatsächlich: falls $f(i) = j$, dann $f^{-1}(j) = i$.

Aubfgabe: Man finde $X \in \mathcal{S}_4$ s.d. $X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir multiplizieren von rechts mit

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben $(1\ 2\ \ 3\ \ \ldots\ \ n)$ steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tatsächlich: falls $f(i) = j$, dann $f^{-1}(j) = i$.

Aubfgabe: Man finde $X \in \mathcal{S}_4$ s.d. $X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir multiplizieren von rechts mit
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Wegen der Assoziativität:

.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tatsächlich: falls $f(i) = j$, dann $f^{-1}(j) = i$.

Aubfgabe: Man finde $X \in \mathcal{S}_4$ s.d. $X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir multiplizieren von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Wegen der Assoziativität:

$\Longleftrightarrow$.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tatsächlich: falls $f(i) = j$, dann $f^{-1}(j) = i$.

Aubfgabe: Man finde $X \in \mathcal{S}_4$ s.d. $X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir multiplizieren von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Wegen der Assoziativität:

$\iff X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Multiplizieren und invertieren von Permutationen

$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Frage:** Was ist $f(1)$? **Anwort:** 3
Frage: Was ist $f(3)$? **Anwort:** 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie invertiert man eine Permutation?

1: Man muss die Zeilen umtauschen

2: Und dann die Spalten sortieren, s.d. oben (1 2 3 ... n) steht.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Tatsächlich: falls $f(i) = j$, dann $f^{-1}(j) = i$.

Aubfgabe: Man finde $X \in \mathcal{S}_4$ s.d. $X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir multiplizieren von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Wegen der Assoziativität:

$\iff X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Bezeichnung: $|G|$ oder $\#G$ ist Anzahl von Elemente in der Menge G.
Satz 4 $|\mathcal{S}_n| = n!$

Bezeichnung: $|G|$ oder $\#G$ ist Anzahl von Elemente in der Menge G.
Satz 4 $|\mathcal{S}_n| = n! \; := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$

Zuerst Vorarbeit:

Mengenlehre: Vereinigung von Mengen

Gegeben ist eine nichtleere Menge V von Mengen.
Die Vereinigungsmenge

Mengenlehre: Vereinigung von Mengen

Gegeben ist eine nichtleere Menge V von Mengen.
Die Vereinigungsmenge (Bez: $\bigcup_{M \in V} M$)

Mengenlehre: Vereinigung von Mengen

Gegeben ist eine nichtleere Menge V von Mengen.
Die Vereinigungsmenge (Bez: $\bigcup_{M \in V} M$) von Mengen aus V

Mengenlehre: Vereinigung von Mengen

Gegeben ist eine nichtleere Menge V von Mengen.
Die Vereinigungsmenge (Bez: $\bigcup_{M \in V} M$) von Mengen aus V ist die Menge der Elemente,

Mengenlehre: Vereinigung von Mengen

Gegeben ist eine nichtleere Menge V von Mengen.
Die Vereinigungsmenge (Bez: $\bigcup\limits_{M \in V} M$) von Mengen aus V ist die Menge der Elemente, die in mind. einem Element von V enthalten sind:

Mengenlehre: Vereinigung von Mengen

Gegeben ist eine nichtleere Menge V von Mengen.
Die Vereinigungsmenge (Bez: $\bigcup\limits_{M \in V} M$) von Mengen aus V ist die Menge der Elemente, die in mind. einem Element von V enthalten sind:
$\bigcup\limits_{M \in V} M := \{x \mid \exists A \in V : x \in A\}$.
Für $V = \{A, B\}$

Mengenlehre: Vereinigung von Mengen

Gegeben ist eine nichtleere Menge V von Mengen.
Die Vereinigungsmenge (Bez: $\bigcup\limits_{M \in V} M$) von Mengen aus V ist die Menge der Elemente, die in mind. einem Element von V enthalten sind:
$\bigcup\limits_{M \in V} M := \{x \mid \exists A \in V : x \in A\}$.
Für $V = \{A, B\}$ schreibt man $A \cup B :=$

Mengenlehre: Vereinigung von Mengen

Gegeben ist eine nichtleere Menge V von Mengen.
Die Vereinigungsmenge (Bez: $\bigcup_{M \in V} M$) von Mengen aus V ist die Menge der Elemente, die in mind. einem Element von V enthalten sind:
$\bigcup_{M \in V} M := \{x \mid \exists A \in V : x \in A\}$.
Für $V = \{A, B\}$ schreibt man $A \cup B := \{x \mid (x \in A) \text{ oder } (x \in B)\}$.

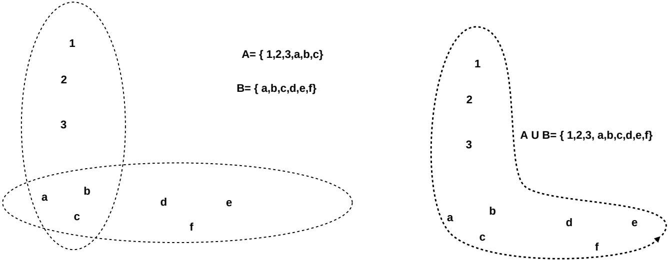


Abbildung: **Bsp:** $A \cup B$

Mengenlehre: Differenz von zwei Mengen

Die Differenzmenge (auch Restmenge) von Mengen A und B ist die Menge der Elemente, die in A, aber nicht in B enthalten sind:
$A \setminus B = \{x \;\text{ s.d. }\; (x \in A) \;\text{ und }\; (x \notin B)\}.$

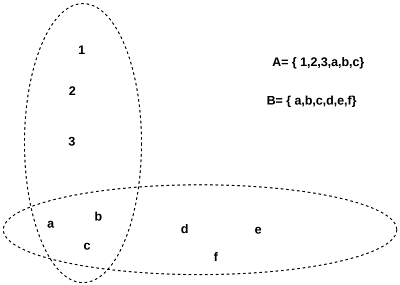


Abbildung: **Bsp:** Mengen A, B

Mengenlehre: Differenz von zwei Mengen

Die Differenzmenge (auch Restmenge) von Mengen A und B ist die Menge der Elemente, die in A, aber nicht in B enthalten sind:
$A \setminus B = \{x \;\text{ s.d. }\; (x \in A) \;\text{ und }\; (x \notin B)\}.$

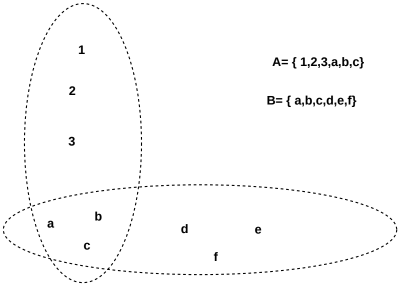


Abbildung: **Bsp:** Mengen A, B

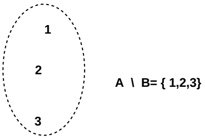


Abbildung: **Bsp:** $A \setminus B$

Beschränkung einer Abbildung

Beschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \to B$,

Beschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \to B$, $A_1 \subseteq A$.

Beschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \to B$, $A_1 \subseteq A$. f beschränkt auf A_1

Beschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \to B$, $A_1 \subseteq A$. f beschränkt auf A_1 (bez: $f_{|A_1}$)

Beschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \longrightarrow B$, $A_1 \subseteq A$. f beschränkt auf A_1 (bez: $f_{|A_1}$) ist die Abbildung
$f : A_1 \longrightarrow B$,

Beschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \longrightarrow B$, $A_1 \subseteq A$. f beschränkt auf A_1 (bez: $f_{|A_1}$) ist die Abbildung
$f : A_1 \longrightarrow B$, $f_{|A_1}(a) := f(a)$

Beschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \to B$, $A_1 \subseteq A$. f beschränkt auf A_1 (bez: $f_{|A_1}$) ist die Abbildung
$f : A_1 \to B$, $f_{|A_1}(a) := f(a) \quad (\forall a \in A_1)$.

Beschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \longrightarrow B$, $A_1 \subseteq A$. f beschränkt auf A_1 (bez: $f_{|A_1}$) ist die Abbildung
$f : A_1 \longrightarrow B$, $f_{|A_1}(a) := f(a) \quad (\forall a \in A_1)$.

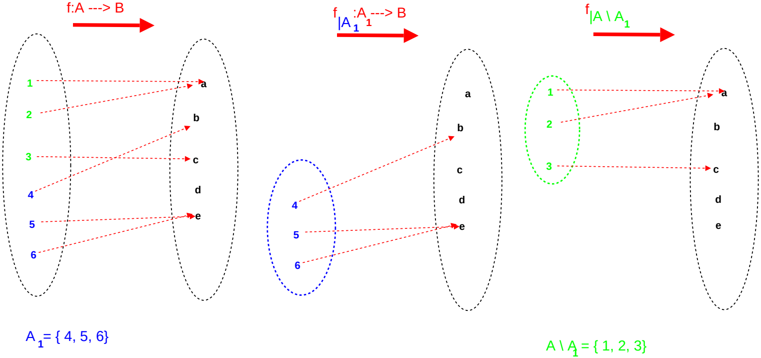


Abbildung: **Bsp:** $A_1 \subseteq A$, $f_{|A_1} : A_1 \longrightarrow B$, und $f_{|A \setminus A_1} : A \setminus A_1 \longrightarrow B$

Bemerkung:

Beschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \to B$, $A_1 \subseteq A$. f beschränkt auf A_1 (bez: $f_{|A_1}$) ist die Abbildung
$f : A_1 \to B$, $f_{|A_1}(a) := f(a) \quad (\forall a \in A_1)$.

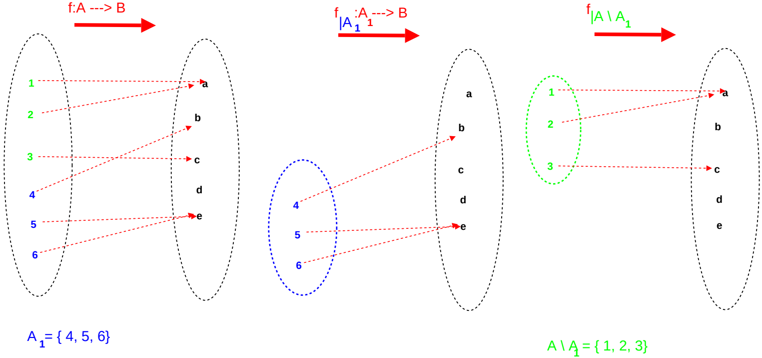


Abbildung: **Bsp:** $A_1 \subseteq A$, $f_{|A_1} : A_1 \to B$, und $f_{|A \setminus A_1} : A \setminus A_1 \to B$

Bemerkung: Ist $f_{|A_1} = g_{|A_1}$

Beschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \to B$, $\color{blue}{A_1} \subseteq A$. f **beschränkt** auf $\color{blue}{A_1}$ (bez: $\color{red}{f_{|A_1}}$) ist die Abbildung

$f : \color{blue}{A_1} \to B$, $f_{|A_1}(a) := f(a)$ $(\forall a \in \color{blue}{A_1})$.

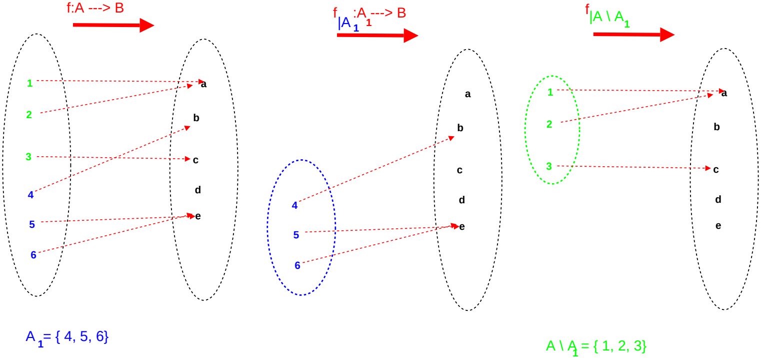


Abbildung: **Bsp:** $\color{blue}{A_1} \subseteq A$, $f_{|\color{blue}{A_1}} : \color{blue}{A_1} \to B$, und $f_{|\color{green}{A \setminus A_1}} : \color{green}{A \setminus A_1} \to B$

Bemerkung: Ist $f_{|A_1} = g_{|A_1}$ und $f_{|A \setminus A_1} = g_{|A \setminus A_1}$,

Beschränkung einer Abbildung

Sei $f : A \longrightarrow B$, $A_1 \subseteq A$. f beschränkt auf A_1 (bez: $f_{|A_1}$) ist die Abbildung
$f : A_1 \longrightarrow B$, $f_{|A_1}(a) := f(a) \quad (\forall a \in A_1)$.

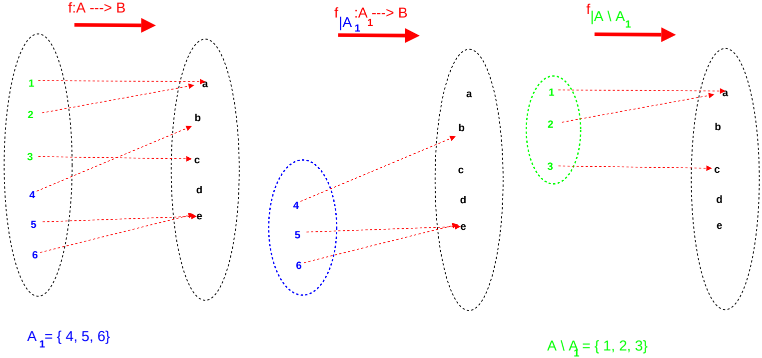


Abbildung: **Bsp:** $A_1 \subseteq A$, $f_{|A_1} : A_1 \longrightarrow B$, und $f_{|A \setminus A_1} : A \setminus A_1 \longrightarrow B$

Bemerkung: Ist $f_{|A_1} = g_{|A_1}$ und $f_{|A \setminus A_1} = g_{|A \setminus A_1}$, so ist $f = g$.

Beweis von Satz 4:

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage:

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$.

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\# \underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$.

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\#\underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\#\underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n:

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\# \underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\# \underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.

(IS:

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\#\underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.

(IS: $n \longrightarrow n+1$) :

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\# \underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.

(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema:

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\#\underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.
(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\# \underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.
(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

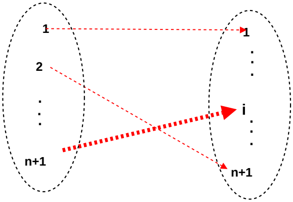
Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.
Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\#\underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.
(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man $\mathcal{F}^i := \{f : A \to B \ \ f(n+1) = i\}$.



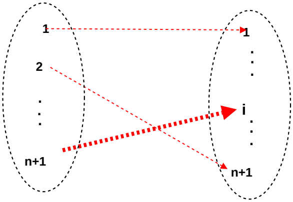
Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\#\underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.

(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man $\mathcal{F}^i := \{f : A \to B \quad f(n+1) = i\}$.
Offensichtlich, $\mathcal{F}^i \cap \mathcal{F}^j = \varnothing$ für $i \neq j$,



$\square$

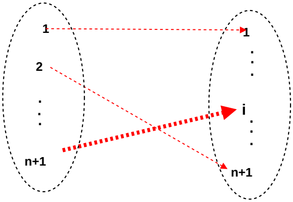
Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\#\underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.

(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man $\mathcal{F}^i := \{f : A \to B \quad f(n+1) = i\}$.
Offensichtlich, $\mathcal{F}^i \cap \mathcal{F}^j = \varnothing$ für $i \neq j$, und $\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}$.



$\square$

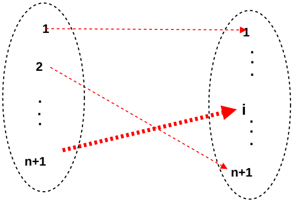
Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\#\underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.

(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man $\mathcal{F}^i := \{f : A \to B \ \ f(n+1) = i\}$.
Offensichtlich, $\mathcal{F}^i \cap \mathcal{F}^j = \varnothing$ für $i \neq j$, und $\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}$.



$\forall f \in \mathcal{F}^j$ gilt:

$\square$

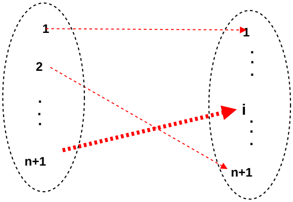
Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\# \underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.

(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man $\mathcal{F}^i := \{f : A \to B \;\; f(n+1) = i\}$.
Offensichtlich, $\mathcal{F}^i \cap \mathcal{F}^j = \varnothing$ für $i \neq j$, und $\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}$.



$\forall f \in \mathcal{F}^j$ gilt: $f_{|A \setminus \{n+1\}}$

$\square$

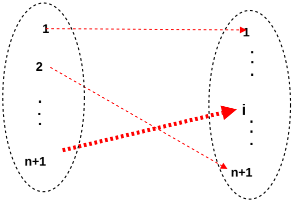
Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\# \underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.

(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man $\mathcal{F}^i := \{f : A \to B \;\; f(n+1) = i\}$.
Offensichtlich, $\mathcal{F}^i \cap \mathcal{F}^j = \varnothing$ für $i \neq j$, und $\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}$.



$\forall f \in \mathcal{F}^j$ gilt: $f_{|A \setminus \{n+1\}}$ ist Bijektion auf $B \setminus \{i\}$.

$\square$

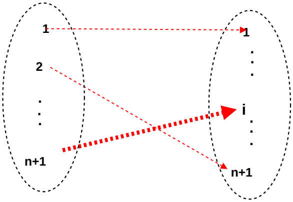
Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\#\underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.

(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man $\mathcal{F}^i := \{f : A \to B \quad f(n+1) = i\}$. Offensichtlich, $\mathcal{F}^i \cap \mathcal{F}^j = \varnothing$ für $i \neq j$, und $\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}$.



$\forall f \in \mathcal{F}^j$ gilt: $f_{|A \setminus \{n+1\}}$ ist Bijektion auf $B \setminus \{i\}$. Nach (IV) ist $\#\mathcal{F}^j = n!$.

$\square$

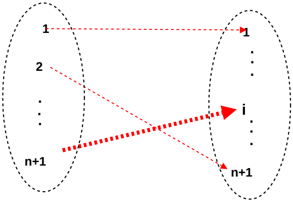
Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\#\underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.

(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man $\mathcal{F}^i := \{f : A \to B \quad f(n+1) = i\}$.
Offensichtlich, $\mathcal{F}^i \cap \mathcal{F}^j = \varnothing$ für $i \neq j$, und $\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}$.



$\forall f \in \mathcal{F}^j$ gilt: $f_{|A \setminus \{n+1\}}$ ist Bijektion auf $B \setminus \{i\}$. Nach (IV) ist $\#\mathcal{F}^j = n!$. Dann ist

$\#\mathcal{F}_{n+1} =$

$\square$

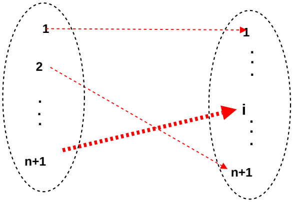
Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\# \underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n**:** (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.

(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man $\mathcal{F}^i := \{f : A \to B \ \ f(n+1) = i\}$.
Offensichtlich, $\mathcal{F}^i \cap \mathcal{F}^j = \varnothing$ für $i \neq j$, und $\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}$.



$\forall f \in \mathcal{F}^j$ gilt: $f_{|A \setminus \{n+1\}}$ ist Bijektion auf $B \setminus \{i\}$. Nach (IV) ist $\#\mathcal{F}^j = n!$. Dann ist

$$\#\mathcal{F}_{n+1} = \# \left(\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1}\right)$$

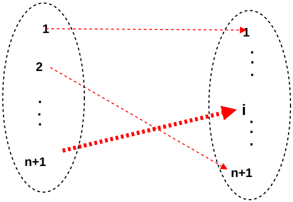
$\square$

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\#\underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.
(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man
$\mathcal{F}^i := \{f : A \to B \quad f(n+1) = i\}$.
Offensichtlich, $\mathcal{F}^i \cap \mathcal{F}^j = \varnothing$ für $i \neq j$,
und $\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}$.



$\forall f \in \mathcal{F}^j$ gilt: $f_{|A \setminus \{n+1\}}$ ist Bijektion auf $B \setminus \{i\}$. Nach (IV) ist $\#\mathcal{F}^j = n!$. Dann ist

$$\#\mathcal{F}_{n+1} = \#\left(\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1}\right) = \#\mathcal{F}^1 + \#\mathcal{F}^2 + ... + \#\mathcal{F}^{n+1}$$

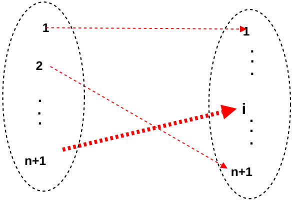
$\square$

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\# \underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.
(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man $\mathcal{F}^i := \{f : A \to B \ \ f(n+1) = i\}$.
Offensichtlich, $\mathcal{F}^i \cap \mathcal{F}^j = \varnothing$ für $i \neq j$, und $\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}$.



$\forall f \in \mathcal{F}^j$ gilt: $f_{|A \setminus \{n+1\}}$ ist Bijektion auf $B \setminus \{i\}$. Nach (IV) ist $\#\mathcal{F}^j = n!$. Dann ist

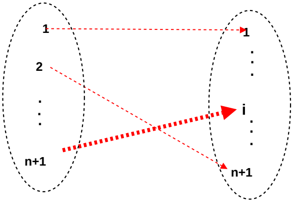
$$\#\mathcal{F}_{n+1} = \#\left(\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1}\right) = \#\mathcal{F}^1 + \#\mathcal{F}^2 + ... + \#\mathcal{F}^{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \underbrace{n! + n! + ... + n!}_{n+1} = n! \cdot (n+1) \qquad \square$$

Beweis von Satz 4: Wir beweisen die stärkere Aussage: Angenommen, $|A| = |B| = n$. Dann ist $\#\underbrace{\{f : A \to B, \quad f\text{- bijektiv}\}}_{\mathcal{F}_n} = n!$. (Satz 4 = Aussage für $A = B$).

Induktion nach n: (IA) : $\exists$ nur eine Abbildung von $\{a\}$ nach $\{b\}$.
(IS: $n \longrightarrow n+1$) : OBdA ist $A = B = \{1, ..., n+1\}$.

Schema: Wir zerlegen $\mathcal{F}_{n+1}$ in $n+1$ Mengen $\mathcal{F}^1, ..., \mathcal{F}^{n+1}$ mit $\#\mathcal{F}^i = n!$.

Für jedes $i \in \{1, ..., n+1\}$ betrachte man
$\mathcal{F}^i := \{f : A \to B \;\; f(n+1) = i\}$.
Offensichtlich, $\mathcal{F}^i \cap \mathcal{F}^j = \varnothing$ für $i \neq j$,
und $\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}$.



$\forall f \in \mathcal{F}^j$ gilt: $f_{|A \setminus \{n+1\}}$ ist Bijektion auf $B \setminus \{i\}$. Nach (IV) ist $\#\mathcal{F}^j = n!$. Dann ist

$$\#\mathcal{F}_{n+1} = \#\left(\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2 \cup ... \cup \mathcal{F}^{n+1}\right) = \#\mathcal{F}^1 + \#\mathcal{F}^2 + ... + \#\mathcal{F}^{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \underbrace{n! + n! + ... + n!}_{n+1} = n! \cdot (n+1) = (n+1)! \qquad \square$$

Def. 4

Def. 4 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Eine* *Untergruppe* *der Gruppe* G

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$*

Def. 4 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe* G *ist eine nicht leere Teilmenge* $U \subseteq G$ *mit Eigenschaften.*

Def. 4 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe* G *ist eine nicht leere Teilmenge* $U \subseteq G$ *mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$.

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} :=$

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\}$

Def. 4 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} :=$

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade } \} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n \}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5

Def. 4 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a,b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \ \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \ = \{n \mid \ n \text{ ist gerade } \} \ = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z},+)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \ \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid \ 3 \text{ teilt } n \ \}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z},+)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0},\cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe*

Def. 4 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*
Beweis. (G1)

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \ \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \ = \{n \mid \ n \text{ ist gerade } \} \ = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \ \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid \ 3 \text{ teilt } n \ \}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*
Beweis. (G1) ist offensichtlich:

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*
Beweis. (G1) ist offensichtlich: $a(bc) = (ab)c$ gilt für alle Elemente der ganzen Gruppe

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*
Beweis. (G1) ist offensichtlich: $a(bc) = (ab)c$ gilt für alle Elemente der ganzen Gruppe (und deswegen auch für Elemente der Untegruppe).

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*
Beweis. (G1) ist offensichtlich: $a(bc) = (ab)c$ gilt für alle Elemente der ganzen Gruppe (und deswegen auch für Elemente der Untegruppe).
Wir beweisen (G2).

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \ \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \ = \{n \mid \ n \text{ ist gerade } \} \ = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \ \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid \ 3 \text{ teilt } n \ \}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*
Beweis. (G1) ist offensichtlich: $a(bc) = (ab)c$ gilt für alle Elemente der ganzen Gruppe (und deswegen auch für Elemente der Untegruppe).
Wir beweisen (G2). Z.z.: $e \in U$.

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \ \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \ = \{n \mid \ n \text{ ist gerade } \} \ = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \ \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid \ 3 \text{ teilt } n \ \}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*
Beweis. (G1) ist offensichtlich: $a(bc) = (ab)c$ gilt für alle Elemente der ganzen Gruppe (und deswegen auch für Elemente der Untegruppe).
Wir beweisen (G2). Z.z.: $e \in U$. Nehme ein $a \in U$.

Def. 4 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe* G *ist eine nicht leere Teilmenge* $U \subseteq G$ *mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*
Beweis. (G1) ist offensichtlich: $a(bc) = (ab)c$ gilt für alle Elemente der ganzen Gruppe (und deswegen auch für Elemente der Untegruppe).
Wir beweisen (G2). Z.z.: $e \in U$. Nehme ein $a \in U$. Nach (ii) ist $a^{-1} \in U$.

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*
Beweis. (G1) ist offensichtlich: $a(bc) = (ab)c$ gilt für alle Elemente der ganzen Gruppe (und deswegen auch für Elemente der Untegruppe).
Wir beweisen (G2). Z.z.: $e \in U$. Nehme ein $a \in U$. Nach (ii) ist $a^{-1} \in U$. Nach (i) ist $a^{-1}a = e \in U$.

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n \}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*
Beweis. (G1) ist offensichtlich: $a(bc) = (ab)c$ gilt für alle Elemente der ganzen Gruppe (und deswegen auch für Elemente der Untegruppe).
Wir beweisen (G2). Z.z.: $e \in U$. Nehme ein $a \in U$. Nach (ii) ist $a^{-1} \in U$.
Nach (i) ist $a^{-1}a = e \in U$. (G3)

Def. 4 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \ \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \ = \{n \mid \ n \text{ ist gerade } \} \ = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \ \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid \ 3 \text{ teilt } n \ \}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*
Beweis. (G1) ist offensichtlich: $a(bc) = (ab)c$ gilt für alle Elemente der ganzen Gruppe (und deswegen auch für Elemente der Untegruppe).
Wir beweisen (G2). Z.z.: $e \in U$. Nehme ein $a \in U$. Nach (ii) ist $a^{-1} \in U$.
Nach (i) ist $a^{-1}a = e \in U$. (G3) folgt direct aus (ii).

Def. 4 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe der Gruppe G ist eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq G$ mit Eigenschaften.*

(i) Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$. (Geschlossen bzgl. Multiplikation)

(ii) Für jedes $a \in U$ ist $a^{-1} \in U$ (Geschlossen bzgl. Invertieren)

Bsp: $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \text{ ist gerade }\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $3\mathbb{Z} := \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid 3 \text{ teilt } n\}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.
Bsp: $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
Bsp: Hausaufgabe 5 Blatt 2.
Satz 5 *Eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Gruppe (bzgl. der induzierten (= beschränkten) Multiplikation.)*
Beweis. (G1) ist offensichtlich: $a(bc) = (ab)c$ gilt für alle Elemente der ganzen Gruppe (und deswegen auch für Elemente der Untegruppe).
Wir beweisen (G2). Z.z.: $e \in U$. Nehme ein $a \in U$. Nach (ii) ist $a^{-1} \in U$.
Nach (i) ist $a^{-1}a = e \in U$. (G3) folgt direct aus (ii). $\square$