Drückfehler in Def. 1 (Vorlesung 1) korrigiert (in grün)

Gruppen

Def. 2 *Eine Gruppe besteht aus einer nicht leeren Menge G und einer Abbildung* $\cdot : G \times G \longrightarrow G$

Def. 2 *Eine Gruppe besteht aus einer nicht leeren Menge G und einer Abbildung $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ (wir werden $a \cdot b$ oder ab statt $\cdot(a, b)$ schreiben;*

Gruppen

Def. 2 *Eine Gruppe besteht aus einer nicht leeren Menge G und einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$ (wir werden $a \cdot b$ oder ab statt $\cdot(a, b)$ schreiben; die Abbildung heißt Multiplikaiton) mit folgenden Eigenschaften*

G1: $\forall a, b, c \in G \quad a(bc) = (ab)c$

Def. 2 *Eine Gruppe besteht aus einer nicht leeren Menge G und einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$ (wir werden $a \cdot b$ oder ab statt $\cdot(a, b)$ schreiben; die Abbildung heißt Multiplikaiton) mit folgenden Eigenschaften*

G1: $\forall a, b, c \in G \quad a(bc) = (ab)c$ *Assoziativität*

G2: $\exists\ e \in G$ *s.d.* $\forall a \in G\ \ ea = a.$

Def. 2 *Eine Gruppe besteht aus einer nicht leeren Menge G und einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$ (wir werden $a \cdot b$ oder ab statt $\cdot(a, b)$ schreiben; die Abbildung heißt Multiplikaiton) mit folgenden Eigenschaften*

G1: $\forall a, b, c \in G \quad a(bc) = (ab)c$ *Assoziativität*

G2: $\exists\ e \in G$ *s.d.* $\forall a \in G\ \ ea = a.$ *Existenz eines neutralen Elementes*

G3: $\forall\ a \in G\ \exists\ b \in G$ *mit* $ba = e.$

Gruppen

Def. 2 *Eine Gruppe besteht aus einer nicht leeren Menge G und einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$ (wir werden $a \cdot b$ oder ab statt $\cdot(a, b)$ schreiben; die Abbildung heißt Multiplikaiton) mit folgenden Eigenschaften*

G1: $\forall a, b, c \in G \quad a(bc) = (ab)c$ *Assoziativität*

G2: $\exists\ e \in G$ *s.d.* $\forall a \in G\ \ ea = a.$ *Existenz eines neutralen Elementes*

G3: $\forall\ a \in G\ \exists\ b \in G$ *mit* $ba = e.$ *Existenz eines inversen Elements*

Gruppen

Def. 2 *Eine Gruppe besteht aus einer nicht leeren Menge G und einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$ (wir werden $a \cdot b$ oder ab statt $\cdot(a,b)$ schreiben; die Abbildung heißt Multiplikaiton) mit folgenden Eigenschaften*

G1: $\forall a, b, c \in G \quad a(bc) = (ab)c$ *Assoziativität*

G2: $\exists\ e \in G$ s.d. $\forall a \in G\ ea = a$. *Existenz eines neutralen Elementes*

G3: $\forall\ a \in G\ \exists\ b \in G$ mit $ba = e$. *Existenz eines inversen Elements*

Bemerkung *Gilt ausserdem $\forall a, b \quad ab = ba$,*

Def. 2 *Eine Gruppe besteht aus einer nicht leeren Menge G und einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$ (wir werden $a \cdot b$ oder ab statt $\cdot(a, b)$ schreiben; die Abbildung heißt Multiplikaiton) mit folgenden Eigenschaften*

G1: $\forall a, b, c \in G \quad a(bc) = (ab)c$ *Assoziativität*

G2: $\exists\ e \in G$ s.d. $\forall a \in G\ \ ea = a$. *Existenz eines neutralen Elementes*

G3: $\forall\ a \in G\ \exists\ b \in G$ mit $ba = e$. *Existenz eines inversen Elements*

Bemerkung *Gilt ausserdem $\forall a, b \quad ab = ba$, so heißt die Gruppe eine abel'sche*

Gruppen

Def. 2 *Eine Gruppe besteht aus einer nicht leeren Menge G und einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$ (wir werden $a \cdot b$ oder ab statt $\cdot(a, b)$ schreiben; die Abbildung heißt Multiplikaiton) mit folgenden Eigenschaften*

G1: $\forall a, b, c \in G \quad a(bc) = (ab)c$ *Assoziativität*

G2: $\exists\ e \in G$ *s.d.* $\forall a \in G\ \ ea = a$. *Existenz eines neutralen Elementes*

G3: $\forall\ a \in G\ \exists\ b \in G$ *mit* $ba = e$. *Existenz eines inversen Elements*

Bemerkung *Gilt ausserdem* $\forall a, b \quad ab = ba$ *, so heißt die Gruppe eine abel'sche (oder eine kommutative) Gruppe.*

Gruppen

Def. 2 *Eine Gruppe besteht aus einer nicht leeren Menge G und einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$ (wir werden $a \cdot b$ oder ab statt $\cdot(a, b)$ schreiben; die Abbildung heißt Multiplikaiton) mit folgenden Eigenschaften*

G1: $\forall a, b, c \in G \quad a(bc) = (ab)c$ *Assoziativität*

G2: $\exists\ e \in G$ s.d. $\forall a \in G\ \ ea = a$. *Existenz eines neutralen Elementes*

G3: $\forall\ a \in G\ \exists\ b \in G$ mit $ba = e$. *Existenz eines inversen Elements*

Bemerkung *Gilt ausserdem $\forall a, b \quad ab = ba$, so heißt die Gruppe eine abel'sche (oder eine kommutative) Gruppe.*

Bemerkung *In einer abel'sche Gruppe bezeichnet man oft die Multiplikation mit $+$.*

Gruppen

Def. 2 *Eine Gruppe besteht aus einer nicht leeren Menge G und einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$ (wir werden $a \cdot b$ oder ab statt $\cdot(a, b)$ schreiben; die Abbildung heißt Multiplikaiton) mit folgenden Eigenschaften*

- G1: $\forall a, b, c \in G \quad a(bc) = (ab)c$ *Assoziativität*
- G2: $\exists\ e \in G$ s.d. $\forall a \in G\ \ ea = a$. *Existenz eines neutralen Elementes*
- G3: $\forall\ a \in G\ \exists\ b \in G$ mit $ba = e$. *Existenz eines inversen Elements*

Bemerkung *Gilt ausserdem $\forall a, b \quad ab = ba$, so heißt die Gruppe eine abel'sche (oder eine kommutative) Gruppe.*

Bemerkung *In einer abel'sche Gruppe bezeichnet man oft die Multiplikation mit $+$.*

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$)

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle,

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e							
a_1							
a_i							
$\vdots$							$\vdots$
a_m							

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e							
a_1							
a_i					$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m							

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e							
a_1							
a_i					$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m							

Bemerkung

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e							
a_1							
a_i					$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m							

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).*

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).*

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).* (G3): in jeder Zeile steht jedes Element.

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i,j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).* (G3): in jeder Zeile steht jedes Element. Tatsächlich, die Gleichung $ax = b$ ist immer Lösbar:

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	$\dots$	a_j	$\dots$	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).* (G3): in jeder Zeile steht jedes Element. Tatsächlich, die Gleichung $ax = b$ ist immer Lösbar: $x = a^{-1}b$.

1. Triviale Gruppe

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).* (G3): in jeder Zeile steht jedes Element. Tatsächlich, die Gleichung $ax = b$ ist immer Lösbar: $x = a^{-1}b$.

1. Triviale Gruppe $G = \{e\}$ (mit $e \cdot e := e$), deren Tabelle

	e
e	e

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	$\dots$	a_j	$\dots$	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).* (G3): in jeder Zeile steht jedes Element. Tatsächlich, die Gleichung $ax = b$ ist immer Lösbar: $x = a^{-1}b$.

1. Triviale Gruppe $G = \{e\}$ (mit $e \cdot e := e$), deren Tabelle

	e
e	e

2. Gruppe aus zwei Elementen

	e	a
e		
a		

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).* (G3): in jeder Zeile steht jedes Element. Tatsächlich, die Gleichung $ax = b$ ist immer Lösbar: $x = a^{-1}b$.

1. Triviale Gruppe $G = \{e\}$ (mit $e \cdot e := e$), deren Tabelle

	e
e	e

2. Gruppe aus zwei Elementen $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$

	e	a
e		
a		

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).* (G3): in jeder Zeile steht jedes Element. Tatsächlich, die Gleichung $ax = b$ ist immer Lösbar: $x = a^{-1}b$.

1. Triviale Gruppe $G = \{e\}$ (mit $e \cdot e := e$), deren Tabelle

	e
e	e

2. Gruppe aus zwei Elementen $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$

	e	a
e	e	a
a	a	

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i,j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).* (G3): in jeder Zeile steht jedes Element. Tatsächlich, die Gleichung $ax = b$ ist immer Lösbar: $x = a^{-1}b$.

1. Triviale Gruppe $G = \{e\}$ (mit $e \cdot e := e$), deren Tabelle

	e
e	e

2. Gruppe aus zwei Elementen $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$ mit $a \cdot a := e$.

	e	a
e	e	a
a	a	e

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).* (G3): in jeder Zeile steht jedes Element. Tatsächlich, die Gleichung $ax = b$ ist immer Lösbar: $x = a^{-1}b$.

1. Triviale Gruppe $G = \{e\}$ (mit $e \cdot e := e$), deren Tabelle

	e
e	e

2. Gruppe aus zwei Elementen $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$ mit $a \cdot a := e$.

	e	a
e	e	a
a	a	e

3. Gruppe aus drei Elementen

	e	a	b
e			
a			
b			

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i,j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).* (G3): in jeder Zeile steht jedes Element. Tatsächlich, die Gleichung $ax = b$ ist immer Lösbar: $x = a^{-1}b$.

1. Triviale Gruppe $G = \{e\}$ (mit $e \cdot e := e$), deren Tabelle

	e
e	e

2. Gruppe aus zwei Elementen $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$ mit $a \cdot a := e$.

	e	a
e	e	a
a	a	e

3. Gruppe aus drei Elementen

	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).* (G3): in jeder Zeile steht jedes Element. Tatsächlich, die Gleichung $ax = b$ ist immer Lösbar: $x = a^{-1}b$.

1. Triviale Gruppe $G = \{e\}$ (mit $e \cdot e := e$), deren Tabelle

	e
e	e

2. Gruppe aus zwei Elementen $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$ mit $a \cdot a := e$.

	e	a
e	e	a
a	a	e

3. Gruppe aus drei Elementen

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	
b	b		

Bsp: Endliche Gruppen (= endlich viel Elementen)

Man muss die Menge beschreiben (z.B. auflisten, z.B. $G = \{e, a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$) und die Multiplikation angeben z.B. mit einer Tabelle, auf $(i, j)-$ Stelle steht $a_i \cdot a_j$

	e	a_1	a_2	...	a_j	...	a_m
e	e	a_1	a_2		a_j		a_m
a_1	a_1						
a_i	a_i				$a_i \cdot a_j$		
$\vdots$							$\vdots$
a_m	a_m						

Bemerkung *(G2)+ Satz 2: erste Zeile (Spalte) wiederholt die Null-Zeile (Spalte).* (G3): in jeder Zeile steht jedes Element. Tatsächlich, die Gleichung $ax = b$ ist immer Lösbar: $x = a^{-1}b$.

1. Triviale Gruppe $G = \{e\}$ (mit $e \cdot e := e$), deren Tabelle

	e
e	e

2. Gruppe aus zwei Elementen $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\}$ mit $a \cdot a := e$.

	e	a
e	e	a
a	a	e

3. Gruppe aus drei Elementen

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Zyklische (endliche) Gruppe

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$.

.

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze
$a\, a^{q-1} = e$.

.

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben,

.

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

.

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a				
a^2	a^2				
a^3	a^3				
a^4	a^4				

.

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\,a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2			
a^2	a^2				
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze
$a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B.
für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2			
a^2	a^2				
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.
$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3		
a^2	a^2				
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3		
a^2	a^2				
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	
a^2	a^2				
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze
$a\,a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B.
für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	
a^2	a^2				
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$

$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$

$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2				
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$

$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$

$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\,a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2				
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$

$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$

$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3			
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$

$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$

$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4		
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$$

$$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$$

$$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$

$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$

$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3				
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$

$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$

$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3	a^4			
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$$
$$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$$
$$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3	a^4	e		
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \stackrel{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$

$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$

$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3	a^4	e	a	
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$$

$$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3	a^4	e	a	a^2
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$$

$$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3	a^4	e	a	a^2
a^4	a^4				

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$$

$$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3	a^4	e	a	a^2
a^4	a^4	e			

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$

$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$

$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3	a^4	e	a	a^2
a^4	a^4	e	a		

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$$

$$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze
$a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B.
für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3	a^4	e	a	a^2
a^4	a^4	e	a	a^2	

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$$

$$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen $e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, \ldots, a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\,a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3	a^4	e	a	a^2
a^4	a^4	e	a	a^2	a^3

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$$

$$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$$

Zyklische (endliche) Gruppe

Besteht aus Elementen
$e, a, a \cdot a := a^2, a^2 \cdot a := a^3, ..., a^{q-2} \cdot a = a^{q-1}$. Man setze $a\, a^{q-1} = e$. Lass uns die Tabelle der Gruppe beschreiben, z.B. für $q = 5$

	e	a	a^2	a^3	a^4
e	e	a	a^2	a^3	a^4
a	a	a^2	a^3	a^4	e
a^2	a^2	a^3	a^4	e	a
a^3	a^3	a^4	e	a	a^2
a^4	a^4	e	a	a^2	a^3

$a \cdot a = a^2$ nach Definition.

$a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot a) \cdot a = a^3$

$a \cdot a^3 = a \cdot ((a \cdot a) \cdot a) = a^4$

$a \cdot a^4 = a \cdot ((((a \cdot a) \cdot a) \cdot a)) = a \cdot a^4 = e$

Bemerkung Wir haben noch nicht die Assoziativität bewiesen

Einige unendliche Gruppen

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$:

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$,

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.
   (G3): $a^{-1} = -a$, weil $a + (-a) = 0$.

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.
   (G3): $a^{-1} = -a$, weil $a + (-a) = 0$.
2. Ebenso: $(\mathbb{Q}, +)$,

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.
   (G3): $a^{-1} = -a$, weil $a + (-a) = 0$.
2. Ebenso: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$.

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.
   (G3): $a^{-1} = -a$, weil $a + (-a) = 0$.
2. Ebenso: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$. $(\mathbb{C}, +)$.

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.
   (G3): $a^{-1} = -a$, weil $a + (-a) = 0$.
2. Ebenso: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$. $(\mathbb{C}, +)$. Hier stets $e = 0$,

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.
   (G3): $a^{-1} = -a$, weil $a + (-a) = 0$.
2. Ebenso: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$. $(\mathbb{C}, +)$. Hier stets $e = 0$, $\quad a^{-1} = -a$

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.
   (G3): $a^{-1} = -a$, weil $a + (-a) = 0$.
2. Ebenso: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$. $(\mathbb{C}, +)$. Hier stets $e = 0$, $\quad a^{-1} = -a$
3. Ist $(\mathbb{N}, +)$ eine Gruppe? Assoziativität ist erfüllt;

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.
   (G3): $a^{-1} = -a$, weil $a + (-a) = 0$.
2. Ebenso: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$. $(\mathbb{C}, +)$. Hier stets $e = 0$, $\quad a^{-1} = -a$
3. Ist $(\mathbb{N}, +)$ eine Gruppe? Assoziativität ist erfüllt; (G2) auch $(0 + a = a)$;

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.
   (G3): $a^{-1} = -a$, weil $a + (-a) = 0$.
2. Ebenso: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$. $(\mathbb{C}, +)$. Hier stets $e = 0$, $a^{-1} = -a$
3. Ist $(\mathbb{N}, +)$ eine Gruppe? Assoziativität ist erfüllt; (G2) auch $(0 + a = a)$; aber inverses Element existiert nicht d.h. (G3) ist nicht erfüllt.

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.
   (G3): $a^{-1} = -a$, weil $a + (-a) = 0$.
2. Ebenso: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$. $(\mathbb{C}, +)$. Hier stets $e = 0$, $a^{-1} = -a$
3. Ist $(\mathbb{N}, +)$ eine Gruppe? Assoziativität ist erfüllt; (G2) auch $(0 + a = a)$; aber inverses Element existiert nicht d.h. (G3) ist nicht erfüllt.
4. $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$, (wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation ist), $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind Gruppen.
   (G1): Multiplikation von reellen oder komplexen Zahlen ist assoziativ.

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z}, +)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.
   (G3): $a^{-1} = -a$, weil $a + (-a) = 0$.
2. Ebenso: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$. $(\mathbb{C}, +)$. Hier stets $e = 0$, $\quad a^{-1} = -a$
3. Ist $(\mathbb{N}, +)$ eine Gruppe? Assoziativität ist erfüllt; (G2) auch $(0 + a = a)$; aber inverses Element existiert nicht d.h. (G3) ist nicht erfüllt.
4. $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$, (wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation ist), $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind Gruppen.
   (G1): Multiplikation von reellen oder komplexen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 1$, weil $1 \cdot a = a$.

Einige unendliche Gruppen

1. $(\mathbb{Z},+)$: $G := \mathbb{Z}$, $\cdot := +$
   (G1): Addition von reellen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 0$, weil $0 + a = a$.
   (G3): $a^{-1} = -a$, weil $a + (-a) = 0$.
2. Ebenso: $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$. $(\mathbb{C},+)$. Hier stets $e = 0, \quad a^{-1} = -a$
3. Ist $(\mathbb{N},+)$ eine Gruppe? Assoziativität ist erfüllt; (G2) auch $(0 + a = a)$; aber inverses Element existiert nicht d.h. (G3) ist nicht erfüllt.
4. $(\mathbb{Q}_{>0},\cdot)$, (wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation ist), $(\mathbb{R}_{>0},\cdot)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ sind Gruppen.
   (G1): Multiplikation von reellen oder komplexen Zahlen ist assoziativ.
   (G2): $e := 1$, weil $1 \cdot a = a$.
   (G3) $a^{-1} = \frac{1}{a}$, weil $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Alle Gruppen oben sind abel'sch (kommutativ)

Satz 2

Satz 2 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe.*

Satz 2 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Dann gilt:*

Satz 2 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element* $e \in G$

Satz 2 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element* $e \in G$ *(so dass* $e \cdot a = a$ *für jedes* $a \in G$*).*

Satz 2 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element* $e \in G$ *(so dass* $e \cdot a = a$ *für jedes* $a \in G$*). Ferner gilt:* $\forall a \quad a \cdot e = a$.

(ii) *Zu jedem* $a \in G$

Satz 2 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element* $e \in G$ *(so dass* $e \cdot a = a$ *für jedes* $a \in G$*). Ferner gilt:* $\forall a \quad a \cdot e = a$.

(ii) *Zu jedem* $a \in G$ *existiert nur ein* $b \in G$,

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt.*

Satz 2 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element* $e \in G$ *(so dass* $e \cdot a = a$ *für jedes* $a \in G$*). Ferner gilt:* $\forall a \quad a \cdot e = a$.

(ii) *Zu jedem* $a \in G$ *existiert nur ein* $b \in G$*, für das* $b \cdot a = e$ *gilt. Für dieses* b *gilt auch:* $a \cdot b = e$.

Satz 2 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element* $e \in G$ *(so dass* $e \cdot a = a$ *für jedes* $a \in G$*). Ferner gilt:* $\forall a \quad a \cdot e = a$.

(ii) *Zu jedem* $a \in G$ *existiert nur ein* $b \in G$*, für das* $b \cdot a = e$ *gilt. Für dieses* b *gilt auch:* $a \cdot b = e$.
Bezeichnung:

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$

Satz 2 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element* $e \in G$ *(so dass* $e \cdot a = a$ *für jedes* $a \in G$*). Ferner gilt:* $\forall a \quad a \cdot e = a$.

(ii) *Zu jedem* $a \in G$ *existiert nur ein* $b \in G$*, für das* $b \cdot a = e$ *gilt. Für dieses* b *gilt auch:* $a \cdot b = e$.
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ *mit* $b \cdot a = a \cdot b = e$ *wird mit* a^{-1}

Satz 2 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element* $e \in G$ *(so dass* $e \cdot a = a$ *für jedes* $a \in G$*). Ferner gilt:* $\forall a \quad a \cdot e = a$.

(ii) *Zu jedem* $a \in G$ *existiert nur ein* $b \in G$*, für das* $b \cdot a = e$ *gilt. Für dieses* b *gilt auch:* $a \cdot b = e$.
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ *mit* $b \cdot a = a \cdot b = e$ *wird mit* a^{-1} *(bzw. mit* $-a$*, falls* $\cdot = +$*) bezeichnet.*

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:

$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow$

Satz 2 *Sei* $(G, \cdot)$ *eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element* $e \in G$ *(so dass* $e \cdot a = a$ *für jedes* $a \in G$*). Ferner gilt:* $\forall a \quad a \cdot e = a$.

(ii) *Zu jedem* $a \in G$ *existiert nur ein* $b \in G$*, für das* $b \cdot a = e$ *gilt. Für dieses* b *gilt auch:* $a \cdot b = e$.
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ *mit* $b \cdot a = a \cdot b = e$ *wird mit* a^{-1} *(bzw. mit* $-a$*, falls* $\cdot = +$*) bezeichnet.*

Beweis: Zeige zunächst:

$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3)

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$.

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$ $\quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$a \cdot b$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$ $\quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b)$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b)$$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \;\; a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$ $\quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=}$$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b)$$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$ $\quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b)$$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b =$$

Satz 2 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i)

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element,

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \stackrel{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt.

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$.

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)\qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \stackrel{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \stackrel{(G2)}{}$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=}$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \;\; a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$ $\quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \;\; \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=}$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2)\text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2)\text{ für } e}{=}$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \stackrel{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \stackrel{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \stackrel{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \stackrel{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$.

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$.

Satz 2 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3)

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$ $\quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$ $\quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$.

Satz 2 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$ $\quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e =$$

Satz 2 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \;\; a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$ $\quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a)$$

Satz 2 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2)\text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2)\text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a$$

Satz 2 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2)\text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2)\text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \overset{(G2)}{=}$$

Satz 2 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$ $\quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2)\text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2)\text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \overset{(G2)}{=} a.$$

Satz 2 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2)\text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2)\text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \overset{(G2)}{=} a.$$

Beweis von (ii):

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)\qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2)\text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2)\text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \overset{(G2)}{=} a.$$

Beweis von (ii): Seien $a, b, \tilde{b} \in G$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \stackrel{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \stackrel{(G2)\text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \stackrel{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \stackrel{(G2)\text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \stackrel{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \stackrel{(G2)}{=} a.$$

Beweis von (ii): Seien $a, b, \tilde{b} \in G$ und es gelte: $b \cdot a = e = \tilde{b} \cdot a$.

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$
Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \overset{(G2)}{=} a.$
Beweis von (ii): Seien $a, b, \tilde{b} \in G$ und es gelte: $b \cdot a = e = \tilde{b} \cdot a$. Z.z.: $b = \tilde{b}$.

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$ $\quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:
$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$
Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also
$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \overset{(G2)}{=} a.$$
Beweis von (ii): Seien $a, b, \tilde{b} \in G$ und es gelte: $b \cdot a = e = \tilde{b} \cdot a$. Z.z.: $b = \tilde{b}$. Es gilt: $\tilde{b} \overset{(i)}{=}$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \;\; a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \overset{(G2)}{=} a.$$

Beweis von (ii): Seien $a, b, \tilde{b} \in G$ und es gelte: $b \cdot a = e = \tilde{b} \cdot a$. Z.z.: $b = \tilde{b}$. Es gilt: $\tilde{b} \overset{(i)}{=} \tilde{b} \cdot e \overset{(*)}{=}$

Satz 2 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*)$ $\quad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2)\text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2)\text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \overset{(G2)}{=} a.$$

Beweis von (ii): Seien $a, b, \tilde{b} \in G$ und es gelte: $b \cdot a = e = \tilde{b} \cdot a$. Z.z.: $b = \tilde{b}$. Es gilt: $\tilde{b} \overset{(i)}{=} \tilde{b} \cdot e \overset{(*)}{=} \tilde{b} \cdot (a \cdot b)$

Satz 2 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \;\; a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \overset{(G2)}{=} a.$$

Beweis von (ii): Seien $a, b, \tilde{b} \in G$ und es gelte: $b \cdot a = e = \tilde{b} \cdot a$. Z.z.: $b = \tilde{b}$. Es gilt: $\tilde{b} \overset{(i)}{=} \tilde{b} \cdot e \overset{(*)}{=} \tilde{b} \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=}$

Satz 2 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \overset{(G2)}{=} a.$$

Beweis von (ii): Seien $a, b, \tilde{b} \in G$ und es gelte: $b \cdot a = e = \tilde{b} \cdot a$. Z.z.: $b = \tilde{b}$. Es gilt: $\tilde{b} \overset{(i)}{=} \tilde{b} \cdot e \overset{(*)}{=} \tilde{b} \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} (\tilde{b} \cdot a) \cdot b$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \;\; a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:
$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$
Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2)\text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2)\text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also
$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \overset{(G2)}{=} a.$
Beweis von (ii): Seien $a, b, \tilde{b} \in G$ und es gelte: $b \cdot a = e = \tilde{b} \cdot a$. Z.z.: $b = \tilde{b}$. Es gilt: $\tilde{b} \overset{(i)}{=} \tilde{b} \cdot e \overset{(*)}{=} \tilde{b} \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} (\tilde{b} \cdot a) \cdot b = e \cdot b$

Satz 2 *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \overset{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \overset{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \overset{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \overset{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \overset{(G2)}{=} a.$$

Beweis von (ii): Seien $a, b, \tilde{b} \in G$ und es gelte: $b \cdot a = e = \tilde{b} \cdot a$. Z.z.: $b = \tilde{b}$. Es gilt: $\tilde{b} \overset{(i)}{=} \tilde{b} \cdot e \overset{(*)}{=} \tilde{b} \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} (\tilde{b} \cdot a) \cdot b = e \cdot b \overset{(G2)}{=} b$

Satz 2 *Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element $e \in G$ (so dass $e \cdot a = a$ für jedes $a \in G$). Ferner gilt: $\forall a \quad a \cdot e = a$.*

(ii) *Zu jedem $a \in G$ existiert nur ein $b \in G$, für das $b \cdot a = e$ gilt. Für dieses b gilt auch: $a \cdot b = e$.*
Bezeichnung: Das Element $b \in G$ mit $b \cdot a = a \cdot b = e$ wird mit a^{-1} (bzw. mit $-a$, falls $\cdot = +$) bezeichnet.

Beweis: Zeige zunächst:
$(*) \qquad a, b \in G$ und $b \cdot a = e \quad \Rightarrow a \cdot b = e$ ($\Rightarrow$ 2. Behauptung in (ii))
Denn: Nach (G3) existiert zu $b \in G$ ein $c \in G$ mit $c \cdot b = e$. Es gilt:

$$a \cdot b = e \cdot (a \cdot b) = (c \cdot b) \cdot (a \cdot b) \stackrel{(G1)}{=} c \cdot ((b \cdot a) \cdot b) = c \cdot (e \cdot b) = c \cdot b = e.$$

Beweis von (i) : Sei $\tilde{e} \in G$ ein Element, so dass (G2) gilt. Z.z.: $e = \tilde{e}$. Es gilt: $e \stackrel{(G2) \text{ für } \tilde{e}}{=} \tilde{e} \cdot e \stackrel{(*)}{=} e \cdot \tilde{e} \stackrel{(G2) \text{ für } e}{=} \tilde{e}$.
Sei $a \in G$. Wir zeigen $a \cdot e = a$. Nach (G3) existiert ein $b \in G$ mit $b \cdot a = e$ und nach $(*)$ folgt $a \cdot b = e$. Also

$$a \cdot e = a \cdot (b \cdot a) \stackrel{(G1)}{=} (a \cdot b) \cdot a = e \cdot a \stackrel{(G2)}{=} a.$$

Beweis von (ii): Seien $a, b, \tilde{b} \in G$ und es gelte: $b \cdot a = e = \tilde{b} \cdot a$. Z.z.: $b = \tilde{b}$. Es gilt: $\tilde{b} \stackrel{(i)}{=} \tilde{b} \cdot e \stackrel{(*)}{=} \tilde{b} \cdot (a \cdot b) \stackrel{(G1)}{=} (\tilde{b} \cdot a) \cdot b = e \cdot b \stackrel{(G2)}{=} b \qquad \square$

Folgerung

Folgerung *Sei* $(G, \cdot)$ *Gruppe,*

Folgerung *Sei* $(G, \cdot)$ *Gruppe,* $a, b \in G$.

Folgerung *Sei* $(G,\cdot)$ *Gruppe,* $a, b \in G$*. Dann gilt:*

Folgerung *Sei* $(G, \cdot)$ *Gruppe,* $a, b \in G$. *Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

Folgerung *Sei $(G, \cdot)$ Gruppe, $a, b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

Folgerung *Sei* $(G, \cdot)$ *Gruppe,* $a, b \in G$*. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a)

Folgerung *Sei $(G, \cdot)$ Gruppe, $a, b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$.

Folgerung *Sei* $(G, \cdot)$ *Gruppe,* $a, b \in G$*. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$,

Folgerung *Sei* $(G, \cdot)$ *Gruppe,* $a, b \in G$*. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2,

Folgerung *Sei $(G, \cdot)$ Gruppe, $a, b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii),

Folgerung *Sei $(G, \cdot)$ Gruppe, $a, b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

Folgerung *Sei* $(G, \cdot)$ *Gruppe,* $a, b \in G$. *Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

(b)

Folgerung *Sei* $(G, \cdot)$ *Gruppe,* $a, b \in G$. *Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.:

Folgerung *Sei $(G, \cdot)$ Gruppe, $a, b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = e$.

Folgerung *Sei* $(G, \cdot)$ *Gruppe,* $a, b \in G$*. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = e$. Wir rechnen:

Folgerung *Sei $(G, \cdot)$ Gruppe, $a, b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = e$. Wir rechnen:

$$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b)$$

Folgerung *Sei $(G,\cdot)$ Gruppe, $a,b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = e$. Wir rechnen:

$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=}$

Folgerung *Sei $(G,\cdot)$ Gruppe, $a,b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a\cdot b)^{-1} = b^{-1}\cdot a^{-1}$

(c) $a\cdot e = a = e\cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a\cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1}\cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a\cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b) = e$. Wir rechnen:

$(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b) \overset{(G1)}{=} b^{-1}\cdot(a^{-1}$

$\cdot a)\cdot b = b^{-1}\cdot e\cdot b$

Folgerung *Sei $(G, \cdot)$ Gruppe, $a, b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = e$. Wir rechnen:

$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} b^{-1} \cdot (a^{-1}$

$\cdot a) \cdot b = b^{-1} \cdot e \cdot b \overset{(G2)}{=} b^{-1} \cdot b$

Folgerung *Sei $(G,\cdot)$ Gruppe, $a,b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a\cdot b)^{-1} = b^{-1}\cdot a^{-1}$

(c) $a\cdot e = a = e\cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a\cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1}\cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a\cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b) = e$. Wir rechnen:

$$(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b) \overset{(G1)}{=} b^{-1}\cdot(a^{-1}$$

$$\cdot a)\cdot b = b^{-1}\cdot e\cdot b \overset{(G2)}{=} b^{-1}\cdot b = e$$

Folgerung *Sei $(G,\cdot)$ Gruppe, $a,b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a\cdot b)^{-1} = b^{-1}\cdot a^{-1}$

(c) $a\cdot e = a = e\cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a\cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1}\cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a\cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b) = e$. Wir rechnen:

$(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b) \overset{(G1)}{=} b^{-1}\cdot(a^{-1}$

$\cdot a)\cdot b = b^{-1}\cdot e\cdot b \overset{(G2)}{=} b^{-1}\cdot b = e$

(c)

Folgerung *Sei* $(G, \cdot)$ *Gruppe,* $a, b \in G$. *Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = e$. Wir rechnen:

$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} b^{-1} \cdot (a^{-1}$

$\cdot a) \cdot b = b^{-1} \cdot e \cdot b \overset{(G2)}{=} b^{-1} \cdot b = e$

(c) $\Longleftarrow$ Satz 1, Aussage (i).

Folgerung *Sei $(G,\cdot)$ Gruppe, $a,b\in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1}=a$

(b) $(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$

(c) $a\cdot e=a=e\cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a\cdot a^{-1}=e$. Nach Definition gilt $a^{-1}\cdot a=e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a\cdot a^{-1}=e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b)=e$. Wir rechnen:

$(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b)\overset{(G1)}{=}b^{-1}\cdot(a^{-1}$

$\cdot a)\cdot b=b^{-1}\cdot e\cdot b\overset{(G2)}{=}b^{-1}\cdot b=e$

(c) $\Longleftarrow$ Satz 1, Aussage (i). Alternativer Beweis:

Folgerung *Sei $(G,\cdot)$ Gruppe, $a,b\in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1}=a$

(b) $(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$

(c) $a\cdot e=a=e\cdot a$

Beweis:
(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a\cdot a^{-1}=e$. Nach Definition gilt $a^{-1}\cdot a=e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a\cdot a^{-1}=e$.
(b) Z.z.: $(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b)=e$. Wir rechnen:

$$(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b)\overset{(G1)}{=}b^{-1}\cdot(a^{-1}$$

$$\cdot a)\cdot b=b^{-1}\cdot e\cdot b\overset{(G2)}{=}b^{-1}\cdot b=e$$

(c) $\Longleftarrow$ Satz 1, Aussage (i). Alternativer Beweis: Z.z.: $a\cdot e=a$. Wir haben: $e\cdot a^{-1}=a^{-1}$. Dann ist

$$(e\cdot a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}$$

Folgerung *Sei $(G, \cdot)$ Gruppe, $a, b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = e$. Wir rechnen:

$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} b^{-1} \cdot (a^{-1}$

$\cdot a) \cdot b = b^{-1} \cdot e \cdot b \overset{(G2)}{=} b^{-1} \cdot b = e$

(c) $\Longleftarrow$ Satz 1, Aussage (i). Alternativer Beweis: Z.z.: $a \cdot e = a$.

Wir haben: $e \cdot a^{-1} = a^{-1}$. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} (e \cdot a^{-1})^{-1} & = & (a^{-1})^{-1} \\ \| \ (b) & & \end{array}$$

Folgerung *Sei $(G, \cdot)$ Gruppe, $a, b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = e$. Wir rechnen:

$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} b^{-1} \cdot (a^{-1}$

$\cdot a) \cdot b = b^{-1} \cdot e \cdot b \overset{(G2)}{=} b^{-1} \cdot b = e$

(c) $\Longleftarrow$ Satz 1, Aussage (i). Alternativer Beweis: Z.z.: $a \cdot e = a$. Wir haben: $e \cdot a^{-1} = a^{-1}$. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} (e \cdot a^{-1})^{-1} & = & (a^{-1})^{-1} \\ \| \; (b) & & \\ (a^{-1})^{-1} \cdot e^{-1} & & \end{array}$$

Folgerung *Sei $(G, \cdot)$ Gruppe, $a, b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = e$. Wir rechnen:

$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) \overset{(G1)}{=} b^{-1} \cdot (a^{-1}$

$\cdot a) \cdot b = b^{-1} \cdot e \cdot b \overset{(G2)}{=} b^{-1} \cdot b = e$

(c) $\Longleftarrow$ Satz 1, Aussage (i). Alternativer Beweis: Z.z.: $a \cdot e = a$.

Wir haben: $e \cdot a^{-1} = a^{-1}$. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} (e \cdot a^{-1})^{-1} & = & (a^{-1})^{-1} \\ \| \ (b) & & \\ (a^{-1})^{-1} \cdot e^{-1} & \overset{(a)}{=} & \end{array}$$

Folgerung *Sei $(G,\cdot)$ Gruppe, $a,b\in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1}=a$

(b) $(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$

(c) $a\cdot e=a=e\cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a\cdot a^{-1}=e$. Nach Definition gilt $a^{-1}\cdot a=e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a\cdot a^{-1}=e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b)=e$. Wir rechnen:

$(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b)\overset{(G1)}{=}b^{-1}\cdot(a^{-1}$

$\cdot a)\cdot b=b^{-1}\cdot e\cdot b\overset{(G2)}{=}b^{-1}\cdot b=e$

(c) $\Longleftarrow$ Satz 1, Aussage (i). Alternativer Beweis: Z.z.: $a\cdot e=a$. Wir haben: $e\cdot a^{-1}=a^{-1}$. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} (e\cdot a^{-1})^{-1} & = & (a^{-1})^{-1} \\ \| \; (b) & & \\ (a^{-1})^{-1}\cdot e^{-1} & \overset{(a)}{=} & a\cdot e \end{array}$$

Folgerung *Sei $(G, \cdot)$ Gruppe, $a, b \in G$. Dann gilt:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

(c) $a \cdot e = a = e \cdot a$

Beweis:

(a) Z.z.: a ist das Inverse von a^{-1}, d.h. $a \cdot a^{-1} = e$. Nach Definition gilt $a^{-1} \cdot a = e$, und nach Satz 2, Aussage (ii), folgt daraus $a \cdot a^{-1} = e$.

(b) Z.z.: $(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = e$. Wir rechnen:

$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) \stackrel{(G1)}{=} b^{-1} \cdot (a^{-1}$

$\cdot a) \cdot b = b^{-1} \cdot e \cdot b \stackrel{(G2)}{=} b^{-1} \cdot b = e$

(c) $\Longleftarrow$ Satz 1, Aussage (i). Alternativer Beweis: Z.z.: $a \cdot e = a$. Wir haben: $e \cdot a^{-1} = a^{-1}$. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} (e \cdot a^{-1})^{-1} & = & (a^{-1})^{-1} \\ \| \, (b) & & \\ (a^{-1})^{-1} \cdot e^{-1} & \stackrel{(a)}{=} & a \cdot e \end{array}$$

$\square$

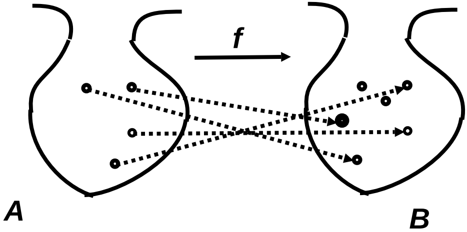
Exkurs 2 in der Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

Sei A, B zwei Mengen, $f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung

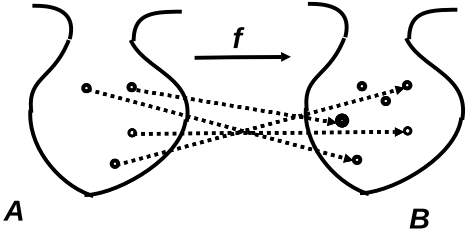
Exkurs 2 in der Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

Sei A, B zwei Mengen, $f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung



Exkurs 2 in der Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

Sei A, B zwei Mengen, $f : A \to B$ sei eine Abbildung

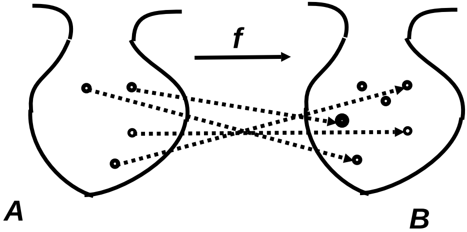


Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Injektion (oder eine injektive Abbildung), falls für jede $x \neq y \in A$ gilt $f(x) \neq f(y)$

.

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

Sei A, B zwei Mengen, $f : A \to B$ sei eine Abbildung

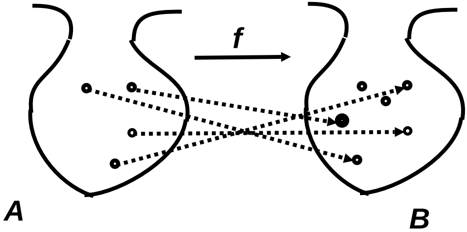


Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Injektion (oder eine injektive Abbildung), falls für jede $x \neq y \in A$ gilt $f(x) \neq f(y)$

.

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

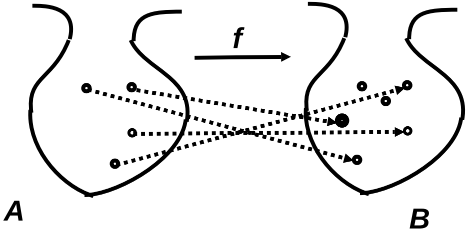
Sei A, B zwei Mengen, $f : A \to B$ sei eine Abbildung



Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Injektion (oder eine injektive Abbildung), falls für jede $x \neq y \in A$ gilt $f(x) \neq f(y)$
(Oder: $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$).

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

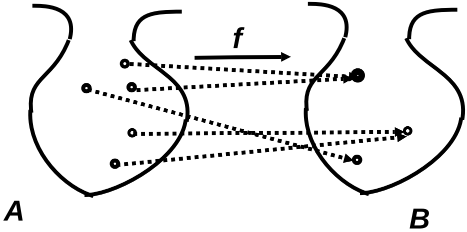
Sei A, B zwei Mengen, $f : A \to B$ sei eine Abbildung



Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Surjektion (oder eine surjektive Abbildung), falls für jedes $x \in B$ existiert mind. ein $y \in A$ so dass $f(y) = x$.

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

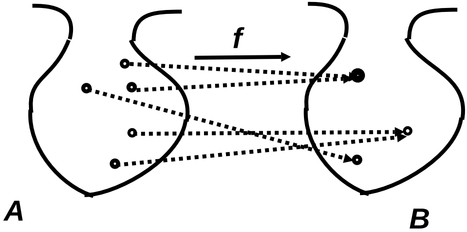
Sei A, B zwei Mengen, $f : A \to B$ sei eine Abbildung



Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Surjektion (oder eine surjektive Abbildung), falls für jedes $x \in B$ existiert mind. ein $y \in A$ so dass $f(y) = x$.

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

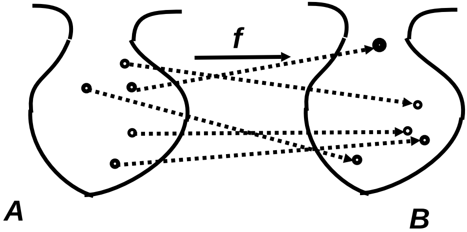
Sei A, B zwei Mengen, $f : A \to B$ sei eine Abbildung



Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Surjektion (oder eine surjektive Abbildung), falls für jedes $x \in B$ existiert mind. ein $y \in A$ so dass $f(y) = x$.
(Oder: $Bild_f := \{b \in B \text{ s.d. } \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b\} = B$).

Exkurs 2 in der Mengenlehre: Surjektion, Injektion und Bijektion

Sei A, B zwei Mengen, $f : A \to B$ sei eine Abbildung



Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt Bijektion (oder eine bijektive Abbildung), falls sie eine Injektion und eine Surjektion ist.

Drei Bilder zusammen

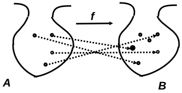


Abbildung: Injektion (Abbildung in)

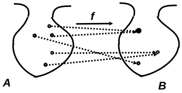


Abbildung: Surjektion (Abbildung auf)

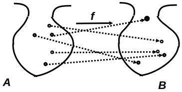


Abbildung: Bijektion = Surjektion und Injektion

Wichtige Bezeichnung von der vorletzten Folie:

$$Bild_f := \{b \in B \text{ s.d. } \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b\}$$

Wichtige Bezeichnung von der vorletzten Folie:

$$Bild_f := \{b \in B \text{ s.d. } \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b\}$$

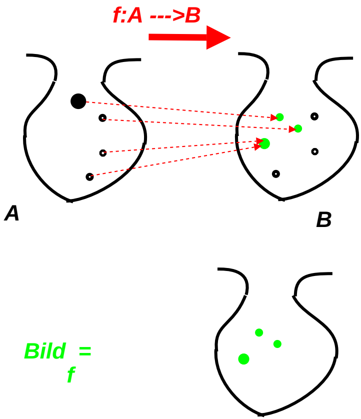


Abbildung: **Bsp:** $Bild_f$

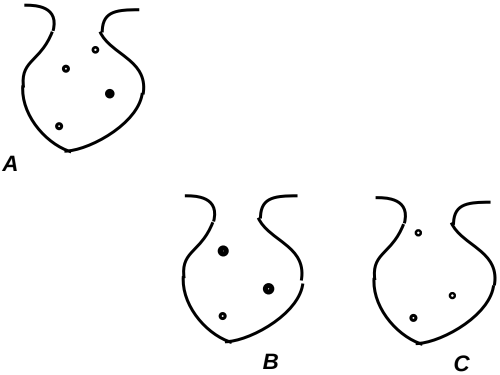
Verkettung von Abbildungen

Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen,

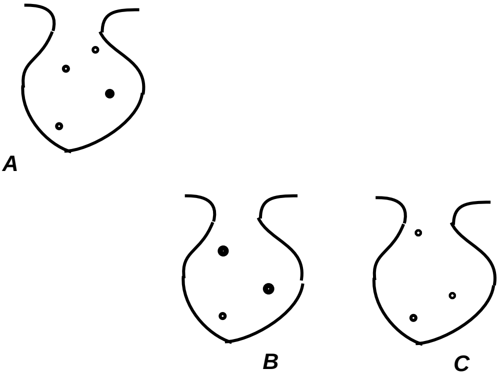
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen,



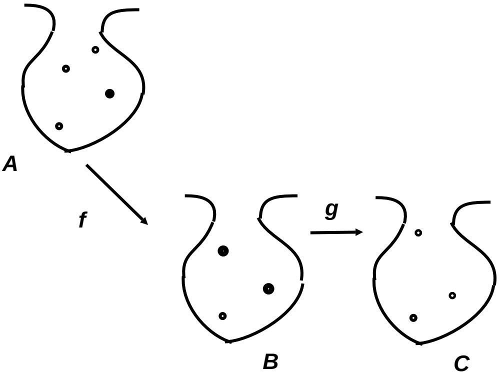
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen.



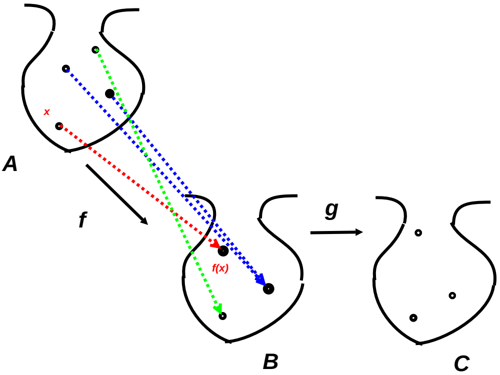
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen.



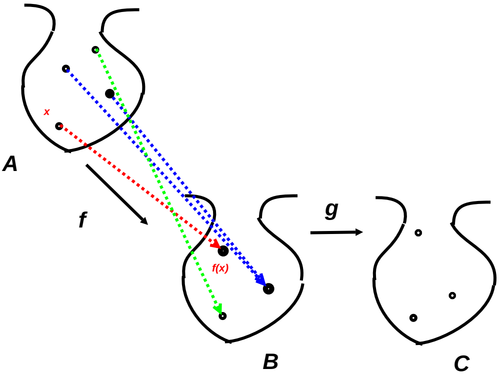
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen.



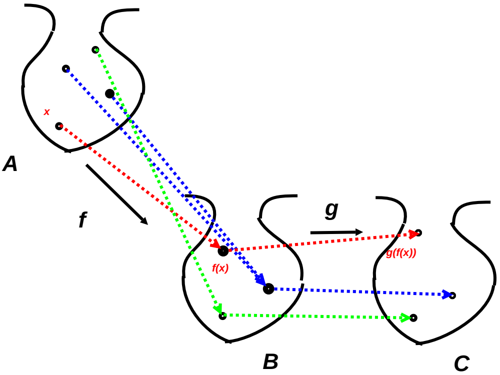
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen.



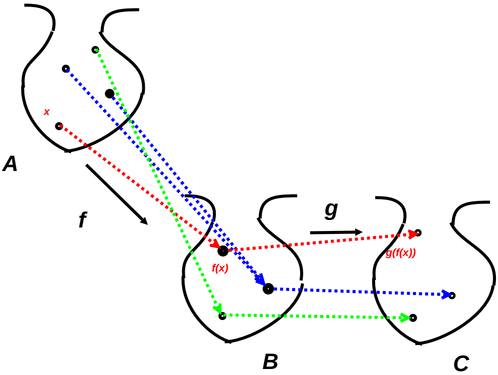
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen.
Die Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abildungen g und f ist die Abbildung



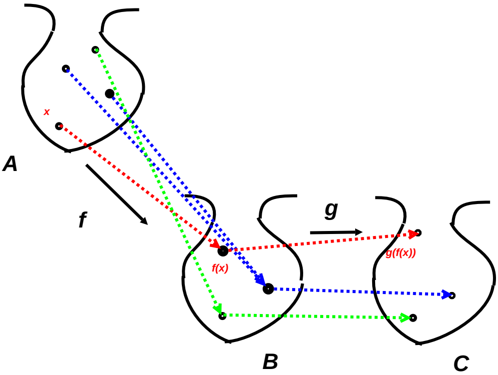
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen.
Die Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \longrightarrow C$,



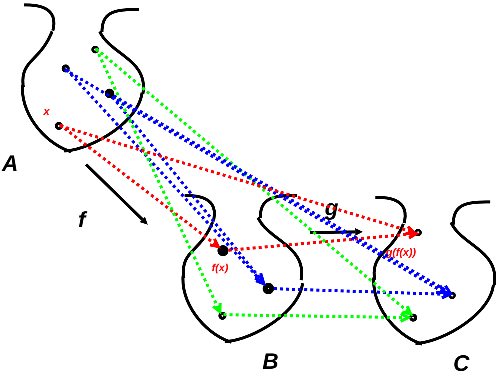
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen.
Die Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \longrightarrow C$,
$g \circ f(x) := g(f(x))$.



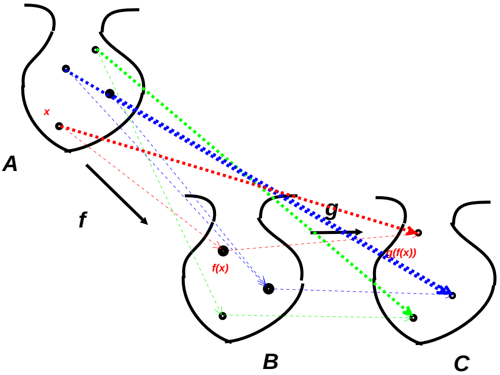
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen.
Die Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \longrightarrow C$,
$g \circ f(x) := g(f(x))$.



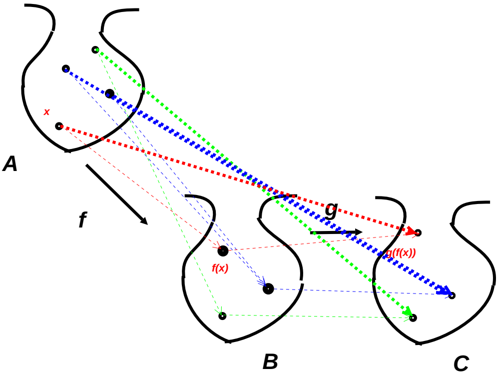
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen.
Die Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \longrightarrow C$,
$g \circ f(x) := g(f(x))$.
Bsp:



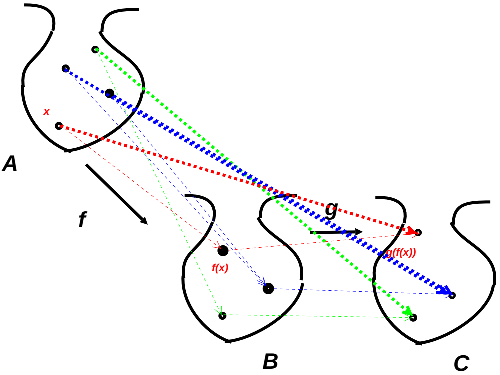
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen.
Die Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \longrightarrow C$,
$g \circ f(x) := g(f(x))$.
Bsp: $A = B = C = \mathbb{R}$,



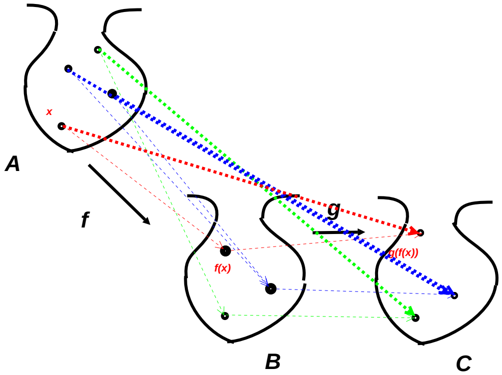
Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen.
Die Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \longrightarrow C$,
$g \circ f(x) := g(f(x))$.
Bsp: $A = B = C = \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, $g(x) := \cos(x)$,



Verkettung von Abbildungen

A, B, C seien die Mengen, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen.
Die Verkettung (Komposition, Superposition, Hintereinanderausführung) von Abildungen g und f ist die Abbildung $g \circ f : A \longrightarrow C$,
$g \circ f(x) := g(f(x))$.
Bsp: $A = B = C = \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, $g(x) := \cos(x)$, dann ist die Verkettung $g \circ f(x) = \cos(x^3)$.



Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen.

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis.

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$.

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a)$$

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$,

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$.

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a)$

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a) = g(f(a))$

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) =$

Lemma 1 Seien $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$,

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$,
$h \circ (g \circ f)(a) =$

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$,
$h \circ (g \circ f)(a) = h(g \circ f(a)) =$

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen.
Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$,
$h \circ (g \circ f)(a) = h(g \circ f(a)) = h(c) = d$.

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$,
$h \circ (g \circ f)(a) = h(g \circ f(a)) = h(c) = d$. Also, die linke Seite von $(*)$ ist d.
$f(a) = b$,

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$,
$h \circ (g \circ f)(a) = h(g \circ f(a)) = h(c) = d$. Also, die linke Seite von $(*)$ ist d.
$f(a) = b$,
$(h \circ g) \circ f(a) = h \circ g(f(a)) = h \circ g(b)$

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$,
$h \circ (g \circ f)(a) = h(g \circ f(a)) = h(c) = d$. Also, die linke Seite von $(*)$ ist d.
$f(a) = b$,
$(h \circ g) \circ f(a) = h \circ g(f(a)) = h \circ g(b) = h(g(b)) = h(c) = d$.

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen.
Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$,
$h \circ (g \circ f)(a) = h(g \circ f(a)) = h(c) = d$. Also, die linke Seite von
$(*)$ ist d.
$f(a) = b$,
$(h \circ g) \circ f(a) = h \circ g(f(a)) = h \circ g(b) = h(g(b)) = h(c) = d$.
Also, die rechte Seite von $(*)$

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$,
$h \circ (g \circ f)(a) = h(g \circ f(a)) = h(c) = d$. Also, die linke Seite von $(*)$ ist d.
$f(a) = b$,
$(h \circ g) \circ f(a) = h \circ g(f(a)) = h \circ g(b) = h(g(b)) = h(c) = d$.
Also, die rechte Seite von $(*)$ ist auch d.

Lemma 1 Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In Worten: *Die Verkettung von Abbildungen ist assoziativ.*

Beweis. Nehme ein $a \in A$. Z.z.:

$$h \circ (g \circ f)(a) = (h \circ g) \circ f(a) \qquad (*)$$

Setze $b := f(a)$, $c := g(b)$ und $d := h(c)$. Dann ist
$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$,
$h \circ (g \circ f)(a) = h(g \circ f(a)) = h(c) = d$. Also, die linke Seite von $(*)$ ist d.
$f(a) = b$,
$(h \circ g) \circ f(a) = h \circ g(f(a)) = h \circ g(b) = h(g(b)) = h(c) = d$.
Also, die rechte Seite von $(*)$ ist auch d. $\square$

Inverse Abbildung

Bezeichnung:

Inverse Abbildung

Bezeichnung: Für jede Menge A

Inverse Abbildung

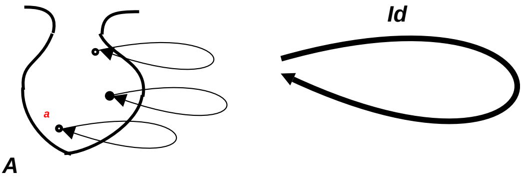
Bezeichnung: Für jede Menge A definiere $Id_A : A \to A$,

Inverse Abbildung

Bezeichnung: Für jede Menge A definiere $Id_A : A \to A$, $Id(a) = a$

Inverse Abbildung

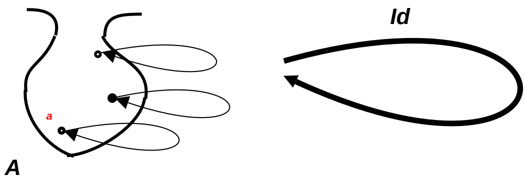
Bezeichnung: Für jede Menge A definiere $Id_A : A \to A$, $Id(a) = a \;\; (\forall a \in A)$.



Wicht. Bsp: $\forall\ f : A \to B$ gilt:
$f \circ Id_A = f$, (Weil $\forall a \in A$ $f \circ Id_A(a) =$

Inverse Abbildung

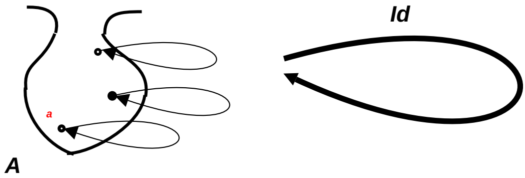
Bezeichnung: Für jede Menge A definiere $Id_A : A \to A$, $Id(a) = a \ \ (\forall a \in A)$.



Wicht. Bsp: $\forall\ f : A \to B$ gilt:
$f \circ Id_A = f$, (Weil $\forall a \in A\ f \circ Id_A(a) = \ f(Id_A(a)) = f(a))$
$Id_B \circ f = f$.

Inverse Abbildung

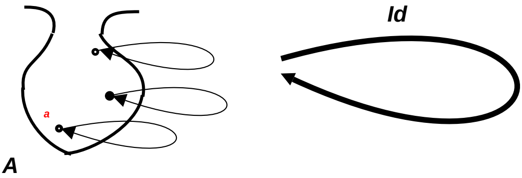
Bezeichnung: Für jede Menge A definiere $Id_A : A \longrightarrow A$, $Id(a) = a \quad (\forall a \in A)$.



Wicht. Bsp: $\forall\ f : A \longrightarrow B$ gilt:
$f \circ Id_A = f$, (Weil $\forall a \in A\ f \circ Id_A(a) = \ f(Id_A(a)) = f(a))$
$Id_B \circ f = f$. (Weil $\forall a \in A\ Id_B \circ f(a) =$

Inverse Abbildung

Bezeichnung: Für jede Menge A definiere $Id_A : A \to A$, $Id(a) = a \ \ (\forall a \in A)$.



Wicht. Bsp: $\forall\ f : A \to B$ gilt:
$f \circ Id_A = f$, (Weil $\forall a \in A\ f \circ Id_A(a) = \ f(Id_A(a)) = f(a))$
$Id_B \circ f = f$. (Weil $\forall a \in A\ Id_B \circ f(a) = \ Id_B(f((a))) = f(a))$

Def. 3

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung.*

Def. 3 *Sei* $f : A \longrightarrow B$ *eine Abbildung. Eine Abbildung* $g : B \longrightarrow A$ *heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu* f*,*

Def. 3 *Sei* $f : A \longrightarrow B$ *eine Abbildung. Eine Abbildung* $g : B \longrightarrow A$ *heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu* f*, falls* $g \circ f = Id_A$ *(bzw.* $f \circ g = Id_B$*.)*

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Def. 3 *Sei* $f : A \longrightarrow B$ *eine Abbildung. Eine Abbildung* $g : B \longrightarrow A$ *heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu* f*, falls* $g \circ f = Id_A$ *(bzw.* $f \circ g = Id_B$*.)*

Lemma 2

Def. 3 *Sei* $f : A \longrightarrow B$ *eine Abbildung. Eine Abbildung* $g : B \longrightarrow A$ *heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu* f*, falls* $g \circ f = Id_A$ *(bzw.* $f \circ g = Id_B$*.)*

Lemma 2 $f : A \longrightarrow B$ *sei eine Abbildung und* $A \neq \emptyset$*.*

Def. 3 *Sei* $f : A \to B$ *eine Abbildung. Eine Abbildung* $g : B \to A$ *heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu* f*, falls* $g \circ f = Id_A$ *(bzw.* $f \circ g = Id_B$*.)*

Lemma 2 $f : A \to B$ *sei eine Abbildung und* $A \neq \varnothing$*. Dann gilt:*

Def. 3 *Sei* $f : A \longrightarrow B$ *eine Abbildung. Eine Abbildung* $g : B \longrightarrow A$ *heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu* f*, falls* $g \circ f = Id_A$ *(bzw.* $f \circ g = Id_B$*.)*

Lemma 2 $f : A \longrightarrow B$ *sei eine Abbildung und* $A \neq \varnothing$*. Dann gilt:*

1. f *ist injektiv*

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ f hat eine Linksinverse.*

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv*

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Def. 3 *Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ heißt eine Links- (bzw. Rechts-)inverse Abbildung zu f, falls $g \circ f = Id_A$ (bzw. $f \circ g = Id_B$.)*

Lemma 2 *$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

1. *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*
2. *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*