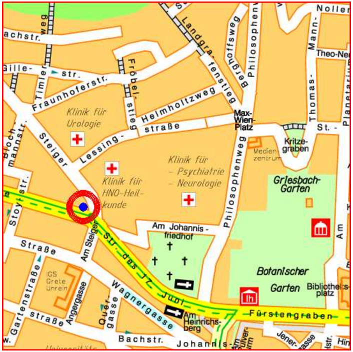
# Prüfung-Klausur

# Prüfung-Klausur

- Findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00 (Zweistundig), in Döbereiner Hörsaal (Am Steiger 3, Ecke Steiger/Humboldtstr) statt.

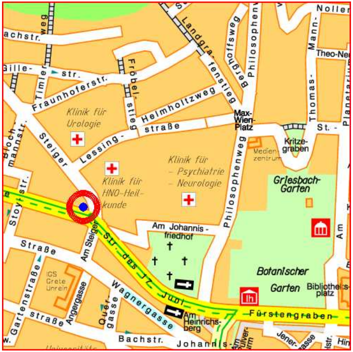
# Prüfung-Klausur

- Findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00 (Zweistundig), in Döbereiner Hörsaal (Am Steiger 3, Ecke Steiger/Humboldtstr) statt.



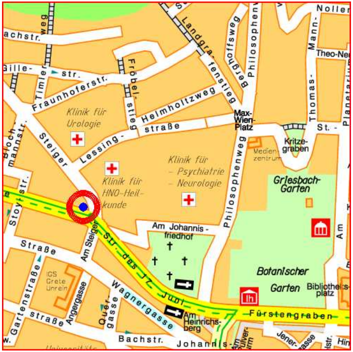
# Prüfung-Klausur

- Findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00 (Zweistundig), in Döbereiner Hörsaal (Am Steiger 3, Ecke Steiger/Humboldtstr) statt.
- Hauptzulassungskriterium: 126 Punkten für Hausaufgaben + Probe-Klausur + Bonusblätter



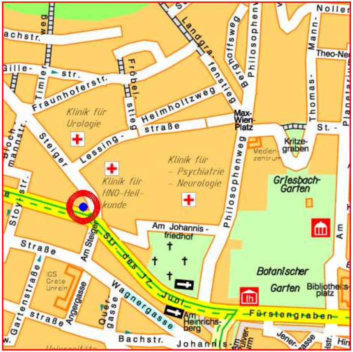
# Prüfung-Klausur

- Findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00 (Zweistundig), in Döbereiner Hörsaal (Am Steiger 3, Ecke Steiger/Humboldtstr) statt.
- Hauptzulassungskriterium: 126 Punkten für Hausaufgaben + Probe-Klausur + Bonusblätter
- Keine Hilfsmittel sind zugelassen (außer dem Schreibstift/Bleistift). Papier wird gegeben.



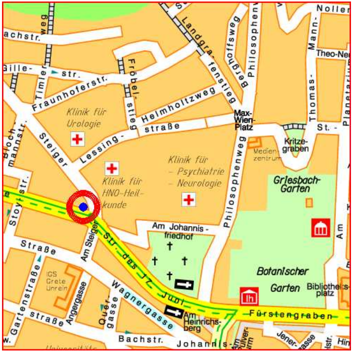
# Prüfung-Klausur

- Findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00 (Zweistundig), in Döbereiner Hörsaal (Am Steiger 3, Ecke Steiger/Humboldtstr) statt.
- Hauptzulassungskriterium: 126 Punkten für Hausaufgaben + Probe-Klausur + Bonusblätter
- Keine Hilfsmittel sind zugelassen (außer dem Schreibstift/Bleistift). Papier wird gegeben.
- Ausweiskontrolle: bitte die Ausweise mitbringen



# Prüfung-Klausur

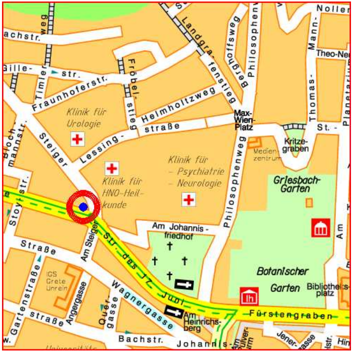
- Findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00 (Zweistundig), in Döbereiner Hörsaal (Am Steiger 3, Ecke Steiger/Humboldtstr) statt.
- Hauptzulassungskriterium: 126 Punkten für Hausaufgaben + Probe-Klausur + Bonusblätter
- Keine Hilfsmittel sind zugelassen (außer dem Schreibstift/Bleistift). Papier wird gegeben.




- Ausweiskontrolle: bitte die Ausweise mitbringen
- Essen/Trinken/Einzeln Raus gehen ist erlaubt, aber nicht erwünscht

# Prüfung-Klausur

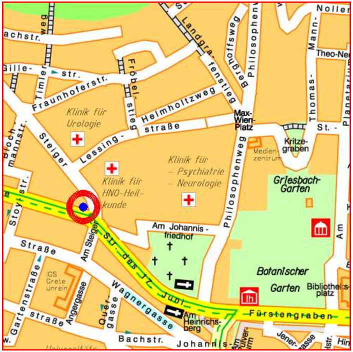
- Findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00 (Zweistundig), in Döbereiner Hörsaal (Am Steiger 3, Ecke Steiger/Humboldtstr) statt.
- Hauptzulassungskriterium: 126 Punkten für Hausaufgaben + Probe-Klausur + Bonusblätter
- Keine Hilfsmittel sind zugelassen (außer dem Schreibstift/Bleistift). Papier wird gegeben.




- Ausweiskontrolle: bitte die Ausweise mitbringen
- Essen/Trinken/Einzeln Raus gehen ist erlaubt, aber nicht erwünscht
- Wir werden versuchen, die Klausur schnell möglichst zu korrigieren.

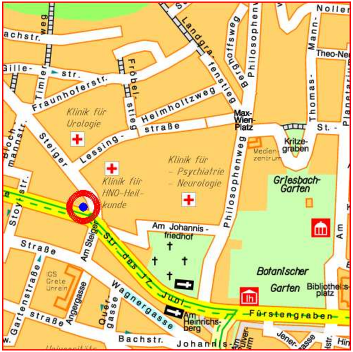
# Prüfung-Klausur

- Findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00 (Zweistundig), in Döbereiner Hörsaal (Am Steiger 3, Ecke Steiger/Humboldtstr) statt.




- Hauptzulassungskriterium: 126 Punkten für Hausaufgaben + Probe-Klausur + Bonusblätter
- Keine Hilfsmittel sind zugelassen (außer dem Schreibstift/Bleistift). Papier wird gegeben.
- Ausweiskontrolle: bitte die Ausweise mitbringen
- Essen/Trinken/Einzeln Raus gehen ist erlaubt, aber nicht erwünscht
- Wir werden versuchen, die Klausur schnell möglichst zu korrigieren.
- Die Ergebnisse/Musterlösungen werden in CAJ veröffentlicht.

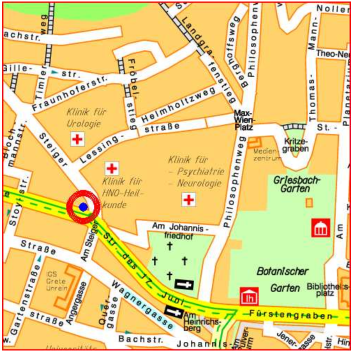
# Prüfung-Klausur




- Findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00 (Zweistundig), in Döbereiner Hörsaal (Am Steiger 3, Ecke Steiger/Humboldtstr) statt.
- Hauptzulassungskriterium: 126 Punkten für Hausaufgaben + Probe-Klausur + Bonusblätter
- Keine Hilfsmittel sind zugelassen (außer dem Schreibstift/Bleistift). Papier wird gegeben.
- Ausweiskontrolle: bitte die Ausweise mitbringen
- Essen/Trinken/Einzeln Raus gehen ist erlaubt, aber nicht erwünscht
- Wir werden versuchen, die Klausur schnell möglichst zu korrigieren.
- Die Ergebnisse/Musterlösungen werden in CAJ veröffentlicht.
- 50% der Punkten = „ausreichend“. 75 % = „ausgezeichnet“.

# Prüfung-Klausur

- Findet am Montag, 25.2.2008, 12:00-15:00 (Zweistundig), in Döbereiner Hörsaal (Am Steiger 3, Ecke Steiger/Humboldtstr) statt.
- Hauptzulassungskriterium: 126 Punkten für Hausaufgaben + Probe-Klausur + Bonusblätter
- Keine Hilfsmittel sind zugelassen (außer dem Schreibstift/Bleistift). Papier wird gegeben.




- Ausweiskontrolle: bitte die Ausweise mitbringen
- Essen/Trinken/Einzeln Raus gehen ist erlaubt, aber nicht erwünscht
- Wir werden versuchen, die Klausur schnell möglichst zu korrigieren.
- Die Ergebnisse/Musterlösungen werden in CAJ veröffentlicht.
- 50% der Punkten = „ausreichend“. 75 % = „ausgezeichnet“.
- Innerhalb der zwei Wochen nach der Veröffentlichung können Sie Ihre Lösungen ansehen.

# Klausurstruktur: wie Probeklausur

# Klausurstruktur: wie Probeklausur

- Etwa die Hälfte: veränderte Haus/Bonusaufgaben

# Klausurstruktur: wie Probeklausur

- Etwa die Hälfte: veränderte Haus/Bonusaufgaben
- Verständnisaufgaben

## Klausurstruktur: wie Probeklausur

- Etwa die Hälfte: veränderte Haus/Bonusaufgaben
- Verständnisaufgaben
- Theoretische Aufgaben: Definitionen werden abgefragt. Sätze werden abgefragt.

# Klausurstruktur: wie Probeklausur

- Etwa die Hälfte: veränderte Haus/Bonusaufgaben
- Verständnisaufgaben
- Theoretische Aufgaben: Definitionen werden abgefragt. Sätze werden abgefragt.
- Ein Satz aus der Liste kommt mit dem Beweis.

# Klausurstruktur: wie Probeklausur

- Etwa die Hälfte: veränderte Haus/Bonusaufgaben
- Verständnisaufgaben
- Theoretische Aufgaben: Definitionen werden abgefragt. Sätze werden abgefragt.
- Ein Satz aus der Liste kommt mit dem Beweis.
  - Satz 10 (Von Cayley)
  - Satz 25 (Äquivalente Definitionen von Basis)
  - Lemma 16 (Austauschlemma)
  - Satz 29 (Haupsatz der linearen Algebra)
  - Satz 31 (Erste Dimensionformel und Folgerung davon)
  - Lemma 24 (Eindeutigkeit der Determinante)
  - Satz 55 (1ster Kriterium für Diaganalisierbarkeit)
  - Satz 59 (Klassifikationssatz für Biliniarformen)
  - Satz 65 (Diagonalizierbarkeit von symmetrischen Matrizen) und Folgerung davon.
  - Satz 71 Klassifikation von 2-dim Quadriken

# Was müssen sie nicht kennen und andere Ratschläge

# Was müssen sie nicht kennen und andere Ratschläge

- Die Nummerierung von Sätze /Aussagen/ Definition (sie sollen trotzdem die benutzte Sätze irgendwie spezifizieren; z.B. nach dem Austauschsatz )

# Was müssen sie nicht kennen und andere Ratschläge

- Die Nummerierung von Sätze /Aussagen/ Definition (sie sollen trotzdem die benutzte Sätze irgendwie spezifizieren; z.B. nach dem Austauschsatz )
- Jede Aufgabe zuerst lesen und verstehen und nur dann lösen

# Was müssen sie nicht kennen und andere Ratschläge

- Die Nummerierung von Sätze /Aussagen/ Definition (sie sollen trotzdem die benutzte Sätze irgendwie spezifizieren; z.B. nach dem Austauschsatz )
- Jede Aufgabe zuerst lesen und verstehen und nur dann lösen
- Bitte nicht die ganze Zeit mit einer Aufgabe verbringen

# Was müssen sie nicht kennen und andere Ratschläge

- Die Nummerierung von Sätze /Aussagen/ Definition (sie sollen trotzdem die benutzte Sätze irgendwie spezifizieren; z.B. nach dem Austauschsatz )
- Jede Aufgabe zuerst lesen und verstehen und nur dann lösen
- Bitte nicht die ganze Zeit mit einer Aufgabe verbringen
- Trotzdem, nach dem Sie die Aufgabe gelöst haben, prüfen Sie sie noch einmal.

# Was müssen sie nicht kennen und andere Ratschläge

- Die Nummerierung von Sätze /Aussagen/ Definition (sie sollen trotzdem die benutzte Sätze irgendwie spezifizieren; z.B. nach dem Austauschsatz )
- Jede Aufgabe zuerst lesen und verstehen und nur dann lösen
- Bitte nicht die ganze Zeit mit einer Aufgabe verbringen
- Trotzdem, nach dem Sie die Aufgabe gelöst haben, prüfen Sie sie noch einmal.
- Sie bekommen wenige Zeit und die Hausaufgaben sind komplizierter: bitte sich gut vorbereiten

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$.

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52**

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$ ,

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$ ,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$ ,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$ ,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

**Def. 61** Tensor ( $=$ Multilineare $(p, q)$-Form

# Multilineare Algebra – Tensoren

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,

$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$ ,

$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

**Def. 61** Tensor ( $=$ Multilineare $(p, q)$-Form) ist die Abbildung

$$T : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{p \text{ Stuck}} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{q \text{ Stuck}} \to \mathbb{K}$$

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,

$$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v) \ ,$$

$$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'').$$

**Def. 61** Tensor ( $=$ Multilineare $(p, q)$-Form) ist die Abbildung

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p \text{ Stuck}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q \text{ Stuck}} \to \mathbb{K},$$ die linear bzgl. jedes Argumentes ist

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,

$$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)\ ,$$

$$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'').$$

**Def. 61** Tensor ( = Multilineare $(p, q)$-Form) ist die Abbildung

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p \text{ Stuck}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q \text{ Stuck}} \to \mathbb{K},$$ die linear bzgl. jedes Argumentes ist:

$$T(\cdots, \lambda v + \mu u, \cdots)$$

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,

$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$ ,

$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

**Def. 61** Tensor ( = Multilineare $(p, q)$-Form) ist die Abbildung

$T : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{p \text{ Stuck}} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{q \text{ Stuck}} \to \mathbb{K}$, die linear bzgl. jedes Argumentes ist:

$$T(\cdots, \lambda v + \mu u, \cdots) = \lambda \cdot T(\cdots, v, \cdots) + \mu \cdot T(\cdots, u, \cdots)$$

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,

$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$ ,

$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

**Def. 61** Tensor ( $=$ Multilineare $(p, q)$-Form) ist die Abbildung

$T : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{p \text{ Stuck}} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{q \text{ Stuck}} \to \mathbb{K}$, die linear bzgl. jedes Argumentes ist:

$T(\cdots, \lambda v + \mu u, \cdots) = \lambda \cdot T(\cdots, v, \cdots) + \mu \cdot T(\cdots, u, \cdots)$.

**Bsp.** $\phi \in V^*$ ist ein $(0, 1)-$Tensor

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$ ,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

**Def. 61** Tensor ( $=$ Multilineare $(p, q)$-Form) ist die Abbildung

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p \text{ Stuck}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q \text{ Stuck}} \to \mathbb{K},$$ die linear bzgl. jedes Argumentes ist:

$$T(\cdots, \lambda v + \mu u, \cdots) = \lambda \cdot T(\cdots, v, \cdots) + \mu \cdot T(\cdots, u, \cdots).$$

**Bsp.** $\phi \in V^*$ ist ein $(0, 1)-$Tensor .

**Bsp.** Eine Bilinearform ist ein $(0, 2)-$Tensor

**Wiederholung – Def. 39 Vorl. 17** Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: $V^*$) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

**Wiederholung – Def. 52** Bilinearform auf $V$ ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,

$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$ ,

$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

**Def. 61** Tensor ( = Multilineare $(p, q)$-Form) ist die Abbildung

$T : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{p \text{ Stuck}} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{q \text{ Stuck}} \to \mathbb{K}$, die linear bzgl. jedes Argumentes ist:

$$T(\cdots, \lambda v + \mu u, \cdots) = \lambda \cdot T(\cdots, v, \cdots) + \mu \cdot T(\cdots, u, \cdots).$$

**Bsp.** $\phi \in V^*$ ist ein $(0, 1)-$Tensor .

**Bsp.** Eine Bilinearform ist ein $(0, 2)-$Tensor .

## Wicht. Bsp.

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:

$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:

$$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}, \; T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*})$$

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:

$$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}, \; T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$$

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung)

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17**

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:

$$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}, \quad T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v) \text{ (Auswertung).}$$

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:

$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$.

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:

$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{array} \right.$ .

Da $V, V^*$, $(V^*)^*$ gleichdimensional sind

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{array} \right.$.

Da $V, V^*, (V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29)

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$.

Da $V, V^*$, $(V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*})$

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{array} \right.$.

Da $V, V^*$, $(V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ ein Isomorphismus ist

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{array} \right.$.

Da $V, V^*$, $(V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ ein Isomorphismus ist, genügend es zu zeigen, dass sie Basis auf Basis abbildet.

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{array} \right.$.

Da $V, V^*$, $(V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ ein Isomorphismus ist, genügend es zu zeigen, dass sie Basis auf Basis abbildet.

Für jedes $e_j$ ist $T_{e_j}(e_i^*) = e_i^*(e_j)$

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$.

Da $V, V^*$, $(V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ ein Isomorphismus ist, genügend es zu zeigen, dass sie Basis auf Basis abbildet.

Für jedes $e_j$ ist $T_{e_j}(e_i^*) = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{array} \right.$.

Da $V, V^*$, $(V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ ein Isomorphismus ist, genügend es zu zeigen, dass sie Basis auf Basis abbildet.

Für jedes $e_j$ ist $T_{e_j}(e_i^*) = e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{array} \right.$. Also, $T_{e_j} = (e_j^*)^*$

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{array} \right.$ .

Da $V, V^*$, $(V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ ein Isomorphismus ist, genügend es zu zeigen, dass sie Basis auf Basis abbildet.

Für jedes $e_j$ ist $T_{e_j}(e_i^*) = e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{array} \right.$ . Also, $T_{e_j} = (e_j^*)^*$.
Dann ist die Abbildung $v \mapsto T_v$ ein Isomorphismus

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{array} \right.$.

Da $V, V^*$, $(V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ ein Isomorphismus ist, genügend es zu zeigen, dass sie Basis auf Basis abbildet.

Für jedes $e_j$ ist $T_{e_j}(e_i^*) = e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{array} \right.$. Also, $T_{e_j} = (e_j^*)^*$. Dann ist die Abbildung $v \mapsto T_v$ ein Isomorphismus.

**Rechnenregeln**

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$.

Da $V, V^*, (V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ ein Isomorphismus ist, genügend es zu zeigen, dass sie Basis auf Basis abbildet.

Für jedes $e_j$ ist $T_{e_j}(e_i^*) = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$. Also, $T_{e_j} = (e_j^*)^*$.
Dann ist die Abbildung $v \mapsto T_v$ ein Isomorphismus.

**Rechnenregeln:** Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektoren von $v \in V$ bzw. $\xi \in V^*$ bzgl. Basis $(e_1, ..., e_n)$ bzw. $(e_1^*, ..., e_n^*)$

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$.

Da $V, V^*, (V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ ein Isomorphismus ist, genügend es zu zeigen, dass sie Basis auf Basis abbildet.

Für jedes $e_j$ ist $T_{e_j}(e_i^*) = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$. Also, $T_{e_j} = (e_j^*)^*$.
Dann ist die Abbildung $v \mapsto T_v$ ein Isomorphismus.

**Rechnenregeln:** Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektoren von $v \in V$ bzw. $\xi \in V^*$ bzgl. Basis $(e_1, ..., e_n)$ bzw. $(e_1^*, ..., e_n^*)$.
Dann gilt

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$.

Da $V, V^*, (V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ ein Isomorphismus ist, genügend es zu zeigen, dass sie Basis auf Basis abbildet.

Für jedes $e_j$ ist $T_{e_j}(e_i^*) = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$. Also, $T_{e_j} = (e_j^*)^*$.
Dann ist die Abbildung $v \mapsto T_v$ ein Isomorphismus.

**Rechnenregeln:** Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektoren von $v \in V$ bzw. $\xi \in V^*$ bzgl. Basis $(e_1, ..., e_n)$ bzw. $(e_1^*, ..., e_n^*)$.
Dann gilt: $e_i^*(v) = x_i$, $e_j(\xi) = y_j$

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$.

Da $V, V^*, (V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ ein Isomorphismus ist, genügend es zu zeigen, dass sie Basis auf Basis abbildet.

Für jedes $e_j$ ist $T_{e_j}(e_i^*) = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$. Also, $T_{e_j} = (e_j^*)^*$.
Dann ist die Abbildung $v \mapsto T_v$ ein Isomorphismus.

**Rechnenregeln:** Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektoren von $v \in V$ bzw. $\xi \in V^*$ bzgl. Basis $(e_1, ..., e_n)$ bzw. $(e_1^*, ..., e_n^*)$.
Dann gilt: $e_i^*(v) = x_i$, $e_j(\xi) = y_j$, $v(\xi) = \xi(v) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

**Wicht. Bsp.** Wir identifizieren $V$ mit $(1,0)$-Tensoren wie folgt:
$\underbrace{v}_{\in V} \mapsto \underbrace{T_v}_{\in (V^*)^*}$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ (Auswertung).

Das ist eine Abbildung von $V$ nach $(V^*)^*$.

Aus Vorl. 17, sieh Folgerung aus Lemma 29, folgt, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, falls $V$ Endlichdimensional ist:

**Wiederholung — Vorl. 17** Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis in $V$. Dann die Dulabasis $(e_1^*, ..., e_n^*)$ in $V^*$ ist definiert durch $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$.

Da $V, V^*, (V^*)^*$ gleichdimensional sind (Lemma 29), um zu zeigen, dass die $v \mapsto T_v$, $T_v(\underbrace{\xi}_{\in V^*}) := \xi(v)$ ein Isomorphismus ist, genügend es zu zeigen, dass sie Basis auf Basis abbildet.

Für jedes $e_j$ ist $T_{e_j}(e_i^*) = e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$. Also, $T_{e_j} = (e_j^*)^*$.
Dann ist die Abbildung $v \mapsto T_v$ ein Isomorphismus.

**Rechnenregeln:** Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektoren von $v \in V$ bzw. $\xi \in V^*$ bzgl. Basis $(e_1, ..., e_n)$ bzw. $(e_1^*, ..., e_n^*)$.
Dann gilt: $e_i^*(v) = x_i$, $e_j(\xi) = y_j$, $v(\xi) = \xi(v) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

# Operationen auf der Menge von $(p, q)-$ Tensoren

# Operationen auf der Menge von $(p, q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt

# Operationen auf der Menge von $(p, q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren

# Operationen auf der Menge von $(p,q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T+P)(\underbrace{\xi_1,...,\xi_p}_{\in V^*},\underbrace{v_1,...,v_q}_{\in V})$$

# Operationen auf der Menge von $(p, q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T + P)(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}$$

# Operationen auf der Menge von $(p,q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T+P)(\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, \dots, v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, \dots, v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_p}_{\in V^*}$$

# Operationen auf der Menge von $(p, q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T+P)(\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, \dots, v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, \dots, v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, \dots, v_q}_{\in V})$$

# Operationen auf der Menge von $(p, q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T + P)(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V});$$

$$(\lambda \bullet T)(\underbrace{\xi_1, ... \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V})$$

# Operationen auf der Menge von $(p, q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T+P)(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V});$$

$$(\lambda \bullet T)(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) := \lambda \cdot T(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V})$$

# Operationen auf der Menge von $(p, q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T+P)(\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, \dots, v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, \dots, v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, \dots, v_q}_{\in V});$$

$$(\lambda \bullet T)(\underbrace{\xi_1, \dots \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, \dots, v_q}_{\in V}) := \lambda \cdot T(\underbrace{\xi_1, \dots \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, \dots, v_q}_{\in V}).$$

Seien jetzt $T$ ein $(p, q)-$ und $S$ ein $(p', q')-$Tensor.

# Operationen auf der Menge von $(p,q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T+P)(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V});$$

$$(\lambda \bullet T)(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) := \lambda \cdot T(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}).$$

Seien jetzt $T$ ein $(p,q)-$ und $S$ ein $(p',q')-$Tensor.
Wir definieren $T \otimes S$ wie folgt

# Operationen auf der Menge von $(p,q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T+P)(\underbrace{\xi_1,...,\xi_p}_{\in V^*},\underbrace{v_1,...,v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1,...,\xi_p}_{\in V^*},\underbrace{v_1,...,v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1,...,\xi_p}_{\in V^*},\underbrace{v_1,...,v_q}_{\in V});$$

$$(\lambda \bullet T)(\underbrace{\xi_1,...\xi_p}_{\in V^*},\underbrace{v_1,...,v_q}_{\in V}) := \lambda \cdot T(\underbrace{\xi_1,...\xi_p}_{\in V^*},\underbrace{v_1,...,v_q}_{\in V}).$$

Seien jetzt $T$ ein $(p,q)-$ und $S$ ein $(p',q')-$Tensor.
Wir definieren $T \otimes S$ wie folgt: das ist ein $(p+p',q+q')-$Tensor

# Operationen auf der Menge von $(p, q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T+P)(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V});$$

$$(\lambda \bullet T)(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) := \lambda \cdot T(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}).$$

Seien jetzt $T$ ein $(p, q)-$ und $S$ ein $(p', q')-$Tensor.
Wir definieren $T \otimes S$ wie folgt: das ist ein $(p+p', q+q')-$Tensor mit

# Operationen auf der Menge von $(p, q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T+P)(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V});$$

$$(\lambda \bullet T)(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) := \lambda \cdot T(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}).$$

Seien jetzt $T$ ein $(p, q)-$ und $S$ ein $(p', q')-$Tensor.

Wir definieren $T \otimes S$ wie folgt: das ist ein $(p+p', q+q')-$Tensor mit

$$T \otimes S({\color{blue}\xi_1, ..., \xi_p}, \xi_{p+1}, ..., \xi_{p+p'}, {\color{blue}v_1, ..., , v_q}, v_{q+1}, .., v_{q+q'})$$

# Operationen auf der Menge von $(p, q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T+P)(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V});$$

$$(\lambda \bullet T)(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) := \lambda \cdot T(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}).$$

Seien jetzt $T$ ein $(p, q)-$ und $S$ ein $(p', q')-$Tensor.
Wir definieren $T \otimes S$ wie folgt: das ist ein $(p + p', q + q')-$Tensor mit

$$T \otimes S(\xi_1, ..., \xi_p, \xi_{p+1}, ..., \xi_{p+p'}, v_1, ..., , v_q, v_{q+1}, .., v_{q+q'}) :=$$

$$\underbrace{T(\xi_1, ..., \xi_p, v_1, ..., v_q)}_{\in \mathbb{K}} \cdot \underbrace{S(\xi_{p+1}, ..., \xi_{p+p'}, v_{q+1}, ..., v_{q+q'})}_{\in \mathbb{K}}.$$

**Bemerkung:** Die Operation „$\otimes$“ ist Assoziativ

$$T \otimes (S \otimes R)(\xi_1, ..., \xi_{q+q'+q''}, v_1, ..., v_{p+p'+p''})$$

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T + P)(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V});$$

$$(\lambda \bullet T)(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) := \lambda \cdot T(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}).$$

Seien jetzt $T$ ein $(p, q)-$ und $S$ ein $(p', q')-$Tensor.
Wir definieren $T \otimes S$ wie folgt: das ist ein $(p + p', q + q')-$Tensor mit

$$T \otimes S(\xi_1, ..., \xi_p, \xi_{p+1}, ..., \xi_{p+p'}, v_1, ..., , v_q, v_{q+1}, .., v_{q+q'}) :=$$

$$\underbrace{T(\xi_1, ..., \xi_p, v_1, ..., v_q)}_{\in \mathbb{K}} \cdot \underbrace{S(\xi_{p+1}, ..., \xi_{p+p'}, v_{q+1}, ..., v_{q+q'})}_{\in \mathbb{K}}.$$

**Bemerkung:** Die Operation „$\otimes$“ ist Assoziativ

$$T \otimes (S \otimes R)(\xi_1, ..., \xi_{q+q'+q''}, v_1, ..., v_{p+p'+p''}) =$$

$$T(\xi_1, ..., \xi_q, v_1, ..., v_p) \cdot S(\xi_{q+1}, ..., \xi_{q+q'}, v_{p+1}, ..., v_{p+p'}) \cdot$$

$$R(\xi_{q+q'+1}, ..., \xi_{q+q'+q''}, v_{p+p'+1}, ..., v_{p+p'+p''})$$

# Operationen auf der Menge von $(p, q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T+P)(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1, ..., \xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V});$$

$$(\lambda \bullet T)(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}) := \lambda \cdot T(\underbrace{\xi_1, ...\xi_p}_{\in V^*}, \underbrace{v_1, ..., v_q}_{\in V}).$$

Seien jetzt $T$ ein $(p, q)-$ und $S$ ein $(p', q')-$Tensor.

Wir definieren $T \otimes S$ wie folgt: das ist ein $(p+p', q+q')-$Tensor mit

$$T \otimes S(\xi_1, ..., \xi_p, \xi_{p+1}, ..., \xi_{p+p'}, v_1, ..., , v_q, v_{q+1}, .., v_{q+q'}) :=$$

$$\underbrace{T(\xi_1, ..., \xi_p, v_1, ..., v_q)}_{\in \mathbb{K}} \cdot \underbrace{S(\xi_{p+1}, ..., \xi_{p+p'}, v_{q+1}, ..., v_{q+q'})}_{\in \mathbb{K}}.$$

**Bemerkung:** Die Operation „$\otimes$“ ist Assoziativ

$$T \otimes (S \otimes R)(\xi_1, ..., \xi_{q+q'+q''}, v_1, ..., v_{p+p'+p''}) =$$

$$T(\xi_1, ..., \xi_q, v_1, ..., v_p) \cdot S(\xi_{q+1}, ..., \xi_{q+q'}, v_{p+1}, ..., v_{p+p'}) \cdot$$

$$R(\xi_{q+q'+1}, ..., \xi_{q+q'+q''}, v_{p+p'+1}, ..., v_{p+p'+p''}) =$$

$$(T \otimes S) \otimes R(\xi_1, ..., \xi_{q+q'+q''}, v_1, ..., v_{p+p'+p''})$$

# Operationen auf der Menge von $(p,q)-$ Tensoren

$p, q$ seien fest gewählt. Wir definieren Addition und Multiplikation mit Skalaren:

$$(T+P)(\underbrace{\xi_1,...,\xi_p}_{\in V^*},\underbrace{v_1,...,v_q}_{\in V}) :=$$

$$T(\underbrace{\xi_1,...,\xi_p}_{\in V^*},\underbrace{v_1,...,v_q}_{\in V}) + P(\underbrace{\xi_1,...,\xi_p}_{\in V^*},\underbrace{v_1,...,v_q}_{\in V});$$

$$(\lambda \bullet T)(\underbrace{\xi_1,...\xi_p}_{\in V^*},\underbrace{v_1,...,v_q}_{\in V}) := \lambda \cdot T(\underbrace{\xi_1,...\xi_p}_{\in V^*},\underbrace{v_1,...,v_q}_{\in V}).$$

Seien jetzt $T$ ein $(p,q)-$ und $S$ ein $(p',q')-$Tensor.

Wir definieren $T \otimes S$ wie folgt: das ist ein $(p+p', q+q')-$Tensor mit

$$T \otimes S(\xi_1,...,\xi_p,\xi_{p+1},...,\xi_{p+p'},v_1,...,,v_q,v_{q+1},..,v_{q+q'}) :=$$

$$\underbrace{T(\xi_1,...,\xi_p,v_1,...,v_q)}_{\in\mathbb{K}} \cdot \underbrace{S(\xi_{p+1},...,\xi_{p+p'},v_{q+1},...,v_{q+q'})}_{\in\mathbb{K}}.$$

**Bemerkung:** Die Operation „$\otimes$" ist Assoziativ

$$T \otimes (S \otimes R)(\xi_1,...,\xi_{q+q'+q''},v_1,...,v_{p+p'+p''}) =$$
$$T(\xi_1,...,\xi_q,v_1,...,v_p) \cdot S(\xi_{q+1},...,\xi_{q+q'},v_{p+1},...,v_{p+p'}) \cdot$$
$$R(\xi_{q+q'+1},...,\xi_{q+q'+q''},v_{p+p'+1},...,v_{p+p'+p''}) =$$
$$(T \otimes S) \otimes R(\xi_1,...,\xi_{q+q'+q''},v_1,...,v_{p+p'+p''})$$

und (in der Regel) nichtkommutativ

## Bsp.

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2)$

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0$

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0.$

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0.$ $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}})$

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73**

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p,q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p,q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p,q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.
**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p,q)-$Tensoren werden wir

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p,q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.

**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p,q)-$Tensoren werden wir

$$\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes {V^*}^{\otimes q}$$

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p,q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.

**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p,q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.**

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.

**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p, q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.** Es ist eine einfache Übung, die definierte Eigenschaften $(V1 - -V4)$ eines Vektorraum nachzuweisen

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.
**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p, q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{* \otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.** Es ist eine einfache Übung, die definierte Eigenschaften $(V1 - -V4)$ eines Vektorraum nachzuweisen. Wir zeigen, dass die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ (i) linearunabhängig

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.
**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p, q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.** Es ist eine einfache Übung, die definierte Eigenschaften $(V1 - -V4)$ eines Vektorraum nachzuweisen. Wir zeigen, dass die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ (i) linearunabhängig und (ii) erzeugend sind

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.
**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p, q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.** Es ist eine einfache Übung, die definierte Eigenschaften $(V1 - -V4)$ eines Vektorraum nachzuweisen. Wir zeigen, dass die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ (i) linearunabhängig und (ii) erzeugend sind.
Angenommen $\sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.
**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p, q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.** Es ist eine einfache Übung, die definierte Eigenschaften $(V1 - -V4)$ eines Vektorraum nachzuweisen. Wir zeigen, dass die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ (i) linearunabhängig und (ii) erzeugend sind.
Angenommen $\sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^* = 0$

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.

**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p, q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.** Es ist eine einfache Übung, die definierte Eigenschaften $(V1 - -V4)$ eines Vektorraum nachzuweisen. Wir zeigen, dass die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ (i) linearunabhängig und (ii) erzeugend sind.

Angenommen $\sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^* = 0$. Dann ist

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.
**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p, q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.** Es ist eine einfache Übung, die definierte Eigenschaften $(V1 - -V4)$ eines Vektorraum nachzuweisen. Wir zeigen, dass die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{j_q}^*$ (i) linearunabhängig und (ii) erzeugend sind.
Angenommen $\sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \lambda_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{j_q}^* = 0$. Dann ist

$$0 = \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \lambda_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{j_q}^*(e_1^*, \ldots, e_p^*, e_1, \ldots, e_q)$$

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.
**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p, q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.** Es ist eine einfache Übung, die definierte Eigenschaften $(V1 - -V4)$ eines Vektorraum nachzuweisen. Wir zeigen, dass die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ (i) linearunabhängig und (ii) erzeugend sind.

Angenommen $\sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^* = 0$. Dann ist

$$0 = \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^* (e_1^*, ..., e_p^*, e_1, ..., e_q) \overset{\text{Nur eine Summante ist } \neq 0}{=} \lambda_{1...q}^{1...p} \cdot 1.$$

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.

**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p, q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.** Es ist eine einfache Übung, die definierte Eigenschaften $(V1 - -V4)$ eines Vektorraum nachzuweisen. Wir zeigen, dass die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ (i) linearunabhängig und (ii) erzeugend sind.

Angenommen $\sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^* = 0$. Dann ist

$$0 = \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*(e_1^*, ..., e_p^*, e_1, ..., e_q) \overset{\text{Nur eine Summante ist } \neq 0}{=} \lambda_{1...q}^{1...p} \cdot 1.$$ Also

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.
**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p, q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.** Es ist eine einfache Übung, die definierte Eigenschaften $(V1 - -V4)$ eines Vektorraum nachzuweisen. Wir zeigen, dass die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ (i) linearunabhängig und (ii) erzeugend sind.
Angenommen $\sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^* = 0$. Dann ist

$$0 = \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*(e_1^*, ..., e_p^*, e_1, ..., e_q)$$

$$\overset{\text{Nur eine Summante ist } \neq 0}{=} \lambda_{1...q}^{1...p} \cdot 1. \text{ Also, } \lambda_{1...q}^{1...p} = 0$$

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p,q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.
**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p,q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.** Es ist eine einfache Übung, die definierte Eigenschaften $(V1 - -V4)$ eines Vektorraum nachzuweisen. Wir zeigen, dass die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ (i) linearunabhängig und (ii) erzeugend sind.

Angenommen $\sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^* = 0$. Dann ist

$$0 = \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*(e_1^*, ..., e_p^*, e_1, ..., e_q)$$

$\overset{\text{Nur eine Summante ist } \neq 0}{=} \lambda^{1...p}_{1...q} \cdot 1$. Also, $\lambda^{1...p}_{1...q} = 0$. Analog zeigt man

**Bsp.** $e_1 \otimes e_1^*(e_1^*, e_2) = 1 \cdot 0 = 0$. $e_1 \otimes e_2^*(\underbrace{\xi}_{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}, \underbrace{v}_{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}) = y_1 x_2$.

**Satz 73** Die Menge von $(p, q)-$ Tensoren ist ein Vektorraum bzgl. oben definierten Addition und Multiplikation mit Skalaren. Die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ bilden eine Basis in diesem Vektorraum.

(daraus folgt, dass die Dimension dieses Vektorraums ist $n^{p+q}$.

**Bezeichnung** Den Vektorraum von $(p, q)-$Tensoren werden wir $\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{p \text{ Stuck}} \otimes \underbrace{V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q \text{ Stuck}} = V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ bezeichnen.

**Beweis.** Es ist eine einfache Übung, die definierte Eigenschaften $(V1 - -V4)$ eines Vektorraum nachzuweisen. Wir zeigen, dass die Elemente der Form $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*$ (i) linearunabhängig und (ii) erzeugend sind.

Angenommen $\sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^* = 0$. Dann ist

$$0 = \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda_{j_1...j_q}^{i_1...i_p} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes ... \otimes e_{j_q}^*(e_1^*, ..., e_p^*, e_1, ..., e_q)$$

$\overset{\text{Nur eine Summante ist } \neq 0}{=} \lambda_{1...q}^{1...p} \cdot 1$. Also, $\lambda_{1...q}^{1...p} = 0$. Analog zeigt man, dass alle $\lambda_{j_1...j_q}^{i_1...i_p}$ sind $= 0$.

(ii) Wir zeigen

(ii) Wir zeigen: die Menge
$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q \in \{1,\ldots,n\}}$ ist erzeugend

(ii) Wir zeigen: die Menge $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q \in \{1,\ldots,n\}}$ ist erzeugend. Sei $T \in V^{\otimes p} \otimes {V^*}^{\otimes q}$

(ii) Wir zeigen: die Menge $\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q \in \{1,\dots,n\}}$ ist erzeugend. Sei $T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$

(ii) Wir zeigen: die Menge $\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q \in \{1,\dots,n\}}$ ist erzeugend. Sei $T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$

(ii) Wir zeigen: die Menge $\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q \in \{1,\ldots,n\}}$ ist erzeugend. Sei $T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$ und

(ii) Wir zeigen: die Menge $\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q \in \{1,\ldots,n\}}$ ist erzeugend. Sei $T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$ und $T_0 := T - \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \lambda^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}$

(ii) Wir zeigen: die Menge
$\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q \in \{1,\ldots,n\}}$ ist erzeugend. Sei
$T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$ und
$T_0 := T - \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \lambda^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}$.
Wir zeigen: der Tensor $T_0$ nimmt den Wert 0 auf
$(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) \in V^{*p} \times V^q$

(ii) Wir zeigen: die Menge
$\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q \in \{1,\ldots,n\}}$ ist erzeugend. Sei $T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$ und $T_0 := T - \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \lambda^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}$.
Wir zeigen: der Tensor $T_0$ nimmt den Wert 0 auf
$(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) \in V^{*p} \times V^q$:
$T_0(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q})$

(ii) Wir zeigen: die Menge $\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q \in \{1,\ldots,n\}}$ ist erzeugend. Sei $T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$ und $T_0 := T - \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \lambda^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}$.
Wir zeigen: der Tensor $T_0$ nimmt den Wert 0 auf $(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) \in V^{*p} \times V^q$:
$T_0(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) = T(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p} \otimes e_{j_1}, ..., e_{j_q}) -$
$\sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \lambda^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q})$

(ii) Wir zeigen: die Menge
$\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q \in \{1,...,n\}}$ ist erzeugend. Sei
$T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$ und
$T_0 := T - \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}$.
Wir zeigen: der Tensor $T_0$ nimmt den Wert 0 auf
$(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) \in V^{*p} \times V^q$:
$T_0(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) = T(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p} \otimes e_{j_1}, ..., e_{j_q}) -$
$\sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q})$
$\underset{\text{Weil nur ein Term} \neq 0 \text{ ist}}{=}$

(ii) Wir zeigen: die Menge $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q \in \{1,\ldots,n\}}$ ist erzeugend. Sei $T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T(e^*_1, \ldots, e^*_p, e_1, \ldots, e_q)$ und $T_0 := T - \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \lambda^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} e^*_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q}$.

Wir zeigen: der Tensor $T_0$ nimmt den Wert 0 auf $(e^*_{i_1}, \ldots, e^*_{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}) \in V^{*p} \times V^q$:

$$T_0(e^*_{i_1}, \ldots, e^*_{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}) = T(e^*_{i_1}, \ldots, e^*_{i_p} \otimes e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}) - \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} \lambda^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{j_q}(e^*_{i_1}, \ldots, e^*_{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q})$$

$$\overset{\text{Weil nur ein Term } \neq 0 \text{ ist}}{=} \lambda^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} - \lambda^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$$

(ii) Wir zeigen: die Menge $\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q \in \{1,...,n\}}$ ist erzeugend. Sei $T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$ und $T_0 := T - \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}$.
Wir zeigen: der Tensor $T_0$ nimmt den Wert 0 auf $(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) \in V^{*p} \times V^q$:

$$T_0(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) = T(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p} \otimes e_{j_1}, ..., e_{j_q}) - \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) \overset{\text{Weil nur ein Term} \neq 0 \text{ ist}}{=} \lambda^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \lambda^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = 0.$$

(ii) Wir zeigen: die Menge $\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q \in \{1,\dots,n\}}$ ist erzeugend. Sei $T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$ und $T_0 := T - \sum_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} \lambda^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}$.
Wir zeigen: der Tensor $T_0$ nimmt den Wert 0 auf $(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) \in V^{*p} \times V^q$:
$T_0(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) = T(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p} \otimes e_{j_1}, ..., e_{j_q}) -$
$\sum_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} \lambda^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q})$
$\overset{\text{Weil nur ein Term} \neq 0 \text{ ist}}{=} \lambda^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} - \lambda^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = 0.$
Da $T_0(\xi_1, ..., \xi_p, v_1, ..., v_q)$ wegen Multilinearität eine Linearkombination von $T_0(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q})$ ist

(ii) Wir zeigen: die Menge $\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q \in \{1,...,n\}}$ ist erzeugend. Sei $T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$ und $T_0 := T - \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}$.
Wir zeigen: der Tensor $T_0$ nimmt den Wert 0 auf $(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) \in V^{*p} \times V^q$:

$$T_0(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) = T(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p} \otimes e_{j_1}, ..., e_{j_q}) - \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) \overset{\text{Weil nur ein Term } \neq 0 \text{ ist}}{=} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} - \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = 0.$$

Da $T_0(\xi_1, ..., \xi_p, v_1, ..., v_q)$ wegen Multilinearität eine Linearkombination von $T_0(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q})$ ist (falls nicht offensichtlich, sieh Beweis von Satz 59

(ii) Wir zeigen: die Menge $\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q \in \{1,...,n\}}$ ist erzeugend. Sei $T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$ und $T_0 := T - \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}$.
Wir zeigen: der Tensor $T_0$ nimmt den Wert 0 auf $(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) \in V^{*p} \times V^q$:
$T_0(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) = T(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p} \otimes e_{j_1}, ..., e_{j_q}) -$
$\sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q})$
$\overset{\text{Weil nur ein Term} \neq 0 \text{ ist}}{=} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} - \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = 0.$
Da $T_0(\xi_1, ..., \xi_p, v_1, ..., v_q)$ wegen Multilinearität eine Linearkombination von $T_0(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q})$ ist (falls nicht offensichtlich, sieh Beweis von Satz 59), ist deswegen $T_0 \equiv 0$

(ii) Wir zeigen: die Menge
$\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}\}_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q \in \{1,...,n\}}$ ist erzeugend. Sei
$T \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Setze $\lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = T(e^*_1, ..., e^*_p, e_1, ..., e_q)$ und
$T_0 := T - \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}$.
Wir zeigen: der Tensor $T_0$ nimmt den Wert 0 auf
$(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) \in V^{*p} \times V^q$:
$T_0(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q}) = T(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p} \otimes e_{j_1}, ..., e_{j_q}) -$
$\sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q})$
$\overset{\text{Weil nur ein Term} \neq 0 \text{ ist}}{=} \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} - \lambda^{i_1...i_p}_{j_1...j_q} = 0.$
Da $T_0(\xi_1, ..., \xi_p, v_1, ..., v_q)$ wegen Multilinearität eine Linearkombination von $T_0(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_q})$ ist (falls nicht offensichtlich, sieh Beweis von Satz 59), ist deswegen $T_0 \equiv 0$, $\square$

**Bsp.**

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:
Den Endomorphismus $f : V \to V$ identifizieren wir mit dem $(1,1)-$Tensor $T_f : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:
Den Endomorphismus $f : V \to V$ identifizieren wir mit dem $(1,1)-$Tensor $T_f : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$, $T_f(\xi, v)$

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:
Den Endomorphismus $f : V \to V$ identifizieren wir mit dem $(1,1)-$Tensor $T_f : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$, $T_f(\xi, v) = \xi(f(v))$.

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:
Den Endomorphismus $f : V \to V$ identifizieren wir mit dem $(1,1)-$Tensor $T_f : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$, $T_f(\xi, v) = \xi(f(v))$.
Die Abbildung $f \mapsto T_f$ ist ein Vektorraumisomorphismus

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:
Den Endomorphismus $f : V \to V$ identifizieren wir mit dem $(1,1)-$Tensor $T_f : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$, $T_f(\xi, v) = \xi(f(v))$.
Die Abbildung $f \mapsto T_f$ ist ein Vektorraumisomorphismus: da $dim(Mat(n,n)) = dim(V \otimes V^*) = n^2$

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:
Den Endomorphismus $f : V \to V$ identifizieren wir mit dem $(1,1)-$Tensor $T_f : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$, $T_f(\xi, v) = \xi(f(v))$.
Die Abbildung $f \mapsto T_f$ ist ein Vektorraumisomorphismus: da $dim(Mat(n,n)) = dim(V \otimes V^*) = n^2$, nach 1ste Dimensionsformel genugend es zu zeigen

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:
Den Endomorphismus $f : V \to V$ identifizieren wir mit dem $(1,1)-$Tensor $T_f : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$, $T_f(\xi, v) = \xi(f(v))$.
Die Abbildung $f \mapsto T_f$ ist ein Vektorraumisomorphismus: da $dim(Mat(n,n)) = dim(V \otimes V^*) = n^2$, nach 1ste Dimensionsformel genugend es zu zeigen, dass nur $\mathbf{0}-$Endomorphismus auf $0-$Element des Raums $V \otimes V^*$ abgebildet wird

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:
Den Endomorphismus $f : V \to V$ identifizieren wir mit dem $(1,1)-$Tensor $T_f : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$, $T_f(\xi, v) = \xi(f(v))$.
Die Abbildung $f \mapsto T_f$ ist ein Vektorraumisomorphismus: da $dim(Mat(n,n)) = dim(V \otimes V^*) = n^2$, nach 1ste Dimensionsformel genugend es zu zeigen, dass nur $\mathbf{0}-$Endomorphismus auf $0-$Element des Raums $V \otimes V^*$ abgebildet wird.
Sei $f(v) \neq 0$. Dann existiert ein $\xi \in V^*$ mit $\xi(v) \neq 0$

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:
Den Endomorphismus $f : V \to V$ identifizieren wir mit dem $(1,1)-$Tensor $T_f : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$, $T_f(\xi, v) = \xi(f(v))$.
Die Abbildung $f \mapsto T_f$ ist ein Vektorraumisomorphismus: da $dim(Mat(n,n)) = dim(V \otimes V^*) = n^2$, nach 1ste Dimensionsformel genugend es zu zeigen, dass nur $\mathbf{0}-$Endomorphismus auf $0-$Element des Raums $V \otimes V^*$ abgebildet wird.
Sei $f(v) \neq 0$. Dann existiert ein $\xi \in V^*$ mit $\xi(v) \neq 0$. Dann ist $T_f(\xi, v) = \xi(v)$

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:
Den Endomorphismus $f : V \to V$ identifizieren wir mit dem $(1,1)-$Tensor $T_f : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$, $T_f(\xi, v) = \xi(f(v))$.
Die Abbildung $f \mapsto T_f$ ist ein Vektorraumisomorphismus: da $dim(Mat(n,n)) = dim(V \otimes V^*) = n^2$, nach 1ste Dimensionsformel genugend es zu zeigen, dass nur $\mathbf{0}-$Endomorphismus auf 0−Element des Raums $V \otimes V^*$ abgebildet wird.
Sei $f(v) \neq 0$. Dann existiert ein $\xi \in V^*$ mit $\xi(v) \neq 0$. Dann ist $T_f(\xi, v) = \xi(v) \neq 0$

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:
Den Endomorphismus $f : V \to V$ identifizieren wir mit dem $(1,1)-$Tensor $T_f : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$, $T_f(\xi, v) = \xi(f(v))$.
Die Abbildung $f \mapsto T_f$ ist ein Vektorraumisomorphismus: da $dim(Mat(n,n)) = dim(V \otimes V^*) = n^2$, nach 1ste Dimensionsformel genugend es zu zeigen, dass nur $\mathbf{0}-$Endomorphismus auf $0-$Element des Raums $V \otimes V^*$ abgebildet wird.
Sei $f(v) \neq 0$. Dann existiert ein $\xi \in V^*$ mit $\xi(v) \neq 0$. Dann ist $T_f(\xi, v) = \xi(v) \neq 0$

**Bsp.** Wir werden Endomorphismen $V \to V$ mit $(1,1)-$Tensoren identifizieren:
Den Endomorphismus $f : V \to V$ identifizieren wir mit dem $(1,1)-$Tensor $T_f : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$, $T_f(\xi, v) = \xi(f(v))$.
Die Abbildung $f \mapsto T_f$ ist ein Vektorraumisomorphismus: da $dim(Mat(n,n)) = dim(V \otimes V^*) = n^2$, nach 1ste Dimensionsformel genugend es zu zeigen, dass nur $\mathbf{0}-$Endomorphismus auf $0-$Element des Raums $V \otimes V^*$ abgebildet wird.
Sei $f(v) \neq 0$. Dann existiert ein $\xi \in V^*$ mit $\xi(v) \neq 0$. Dann ist $T_f(\xi, v) = \xi(v) \neq 0$, $\square$

# Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

# Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

**Bezeichnung**.

# Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

**Bezeichnung**. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis in $V$

# Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

**Bezeichnung**. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis in $V$. Dann nach Satz 73 bilden die Elemente $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ eine Basis in $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$

# Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

**Bezeichnung**. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis in $V$. Dann nach Satz 73 bilden die Elemente $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ eine Basis in $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Die Koordinaten des Tensors $T$ in der Basis werden

# Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

**Bezeichnung**. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis in $V$. Dann nach Satz 73 bilden die Elemente $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ eine Basis in $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Die Koordinaten des Tensors $T$ in der Basis werden $T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q}$ bezeichnet:

# Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

**Bezeichnung**. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis in $V$. Dann nach Satz 73 bilden die Elemente $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ eine Basis in $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Die Koordinaten des Tensors $T$ in der Basis werden $T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q}$ bezeichnet:
$T = \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$

# Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

**Bezeichnung**. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis in $V$. Dann nach Satz 73 bilden die Elemente $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ eine Basis in $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Die Koordinaten des Tensors $T$ in der Basis werden $T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q}$ bezeichnet:
$T = \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$.
Operationen mit Tensoren in Koordinaten

# Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

**Bezeichnung**. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis in $V$. Dann nach Satz 73 bilden die Elemente $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ eine Basis in $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Die Koordinaten des Tensors $T$ in der Basis werden $T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q}$ bezeichnet:
$T = \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$.
Operationen mit Tensoren in Koordinaten:
$(\lambda T + \mu S)^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q}$

# Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

**Bezeichnung**. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis in $V$. Dann nach Satz 73 bilden die Elemente $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ eine Basis in $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Die Koordinaten des Tensors $T$ in der Basis werden $T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}$ bezeichnet:
$T = \sum_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$.
Operationen mit Tensoren in Koordinaten:
$(\lambda T + \mu S)^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} = \lambda T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} + \mu S^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}$

# Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

**Bezeichnung**. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis in $V$. Dann nach Satz 73 bilden die Elemente $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ eine Basis in $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Die Koordinaten des Tensors $T$ in der Basis werden $T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$ bezeichnet:
$T = \sum_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$.
Operationen mit Tensoren in Koordinaten:
$(\lambda T + \mu S)^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = \lambda T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} + \mu S^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$ (Weil Koordinatenabbildung linear ist

## Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

**Bezeichnung**. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis in $V$. Dann nach Satz 73 bilden die Elemente $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ eine Basis in $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Die Koordinaten des Tensors $T$ in der Basis werden $T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$ bezeichnet:
$T = \sum_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$.
Operationen mit Tensoren in Koordinaten:
$(\lambda T + \mu S)^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = \lambda T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} + \mu S^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$ (Weil Koordinatenabbildung linear ist (Lemma 18)).
$(T \otimes S)^{i_1,\dots,i_{p+p'}}_{j_1,\dots,j_{q+q'}}$

**Bezeichnung**. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis in $V$. Dann nach Satz 73 bilden die Elemente $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ eine Basis in $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Die Koordinaten des Tensors $T$ in der Basis werden $T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$ bezeichnet:
$T = \sum_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$.
Operationen mit Tensoren in Koordinaten:
$(\lambda T + \mu S)^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = \lambda T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} + \mu S^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$ (Weil Koordinatenabbildung linear ist (Lemma 18)).
$(T \otimes S)^{i_1,\dots,i_{p+p'}}_{j_1,\dots,j_{q+q'}} = T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \cdot S^{i_{p+1},\dots,i_{p+p'}}_{j_{q+1},\dots,j_{q+q'}}$.

# Schreibweise für Koordinaten von Tensoren

**Bezeichnung**. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis in $V$. Dann nach Satz 73 bilden die Elemente $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$ eine Basis in $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Die Koordinaten des Tensors $T$ in der Basis werden $T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q}$ bezeichnet:
$T = \sum_{i_1,...,i_p,j_1,...,j_q} T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^*_{j_1} \otimes ... \otimes e^*_{j_q}$.
Operationen mit Tensoren in Koordinaten:
$(\lambda T + \mu S)^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} = \lambda T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} + \mu S^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q}$ (Weil Koordinatenabbildung linear ist (Lemma 18)).
$(T \otimes S)^{i_1,...,i_{p+p'}}_{j_1,...,j_{q+q'}} = T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} \cdot S^{i_{p+1},...,i_{p+p'}}_{j_{q+1},...,j_{q+q'}}$.

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62**

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:**

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q$

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q =$

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} =$

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist}$

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.**

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0,2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0, 2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$\mathcal{S}_2 =$

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0, 2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

**Def. 62** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, \ldots, v_q) = T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,\ldots,q\}} = \{\sigma : \{1,\ldots,q\} \to \{1,\ldots,q\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0,2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0,2)-$Tensors $b$ bedeutet

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1,...,q\} \to \{1,...,q\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0,2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0,2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1, v_2)$

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0, 2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0, 2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$$b(v_1, v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$$

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0, 2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0, 2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1, v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1, v_2) =$

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0, 2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0, 2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1, v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1, v_2) = b(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)})$

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1,...,q\} \to \{1,...,q\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0,2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0,2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1, v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1, v_2) = b(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)}) \overset{\text{Def. von symmetrischen Bilinearformen}}{=}$

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0,2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0,2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1, v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1, v_2) = b(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)}) \overset{\text{Def. von symmetrischen Bilinearformen}}{=} b(v_2, v_1)$.

In Koordinaten

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0, 2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},}_{\sigma_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},}_{\sigma_2} \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0, 2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1, v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1, v_2) = b(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)}) \overset{\text{Def. von symmetrischen Bilinearformen}}{=} b(v_2, v_1)$.

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. symmetrisch

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0, 2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},}_{\sigma_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},}_{\sigma_2} \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0, 2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1, v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1, v_2) = b(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)}) \overset{\text{Def. von symmetrischen Bilinearformen}}{=} b(v_2, v_1)$.

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. symmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q$

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1,...,v_q) = T(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1,...,q\} \to \{1,...,q\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0,2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0,2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1,v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1,v_2) = b(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)}) \overset{\text{Def. von symmetrischen Bilinearformen}}{=} b(v_2, v_1)$.

In Koordinaten: Ein $(0,q)$-Tensor $T$ ist g.d. symmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q$

$T_{i_1,\dots,i_q} = T_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(q)}}$

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0, 2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0, 2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1, v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1, v_2) = b(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)}) \overset{\text{Def. von symmetrischen Bilinearformen}}{=} b(v_2, v_1)$.

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. symmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q$ $T_{i_1,...,i_q} = T_{i_{\sigma(1)},...,i_{\sigma(q)}}$.

**Lemma 41**

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0, 2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},}_{\sigma_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},}_{\sigma_2} \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0, 2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1, v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1, v_2) = b(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)}) \overset{\text{Def. von symmetrischen Bilinearformen}}{=} b(v_2, v_1)$.

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. symmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q$ $T_{i_1,...,i_q} = T_{i_{\sigma(1)},...,i_{\sigma(q)}}$.

**Lemma 41** Symmetrische $(0, q)-$Tensoren bilden einen Untervektorraum im Raum von $(0, q)-$Tensoren.

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0, 2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0, 2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1, v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1, v_2) = b(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)}) \overset{\text{Def. von symmetrischen Bilinearformen}}{=} b(v_2, v_1)$.

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. symmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q$ $T_{i_1,...,i_q} = T_{i_{\sigma(1)},...,i_{\sigma(q)}}$.

**Lemma 41** Symmetrische $(0, q)-$Tensoren bilden einen Untervektorraum im Raum von $(0, q)-$Tensoren.

**Beweis.**

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0, 2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0, 2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1, v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1, v_2) = b(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)}) \overset{\text{Def. von symmetrischen Bilinearformen}}{=} b(v_2, v_1)$.

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. symmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q$ $T_{i_1,...,i_q} = T_{i_{\sigma(1)},...,i_{\sigma(q)}}$.

**Lemma 41** Symmetrische $(0, q)-$Tensoren bilden einen Untervektorraum im Raum von $(0, q)-$Tensoren.

**Beweis.** Nachweisen, dass jede Linearkombination von symmetrischen Tensoren ein symmetrischer Tensor ist

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1,\dots,v_q) = T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,\dots,q\}} = \{\sigma : \{1,\dots,q\} \to \{1,\dots,q\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0,2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0,2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1,v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1,v_2) = b(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)}) \overset{\text{Def. von symmetrischen Bilinearformen}}{=} b(v_2, v_1)$.

In Koordinaten: Ein $(0,q)$-Tensor $T$ ist g.d. symmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q$ $T_{i_1,\dots,i_q} = T_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(q)}}$.

**Lemma 41** Symmetrische $(0,q)-$Tensoren bilden einen Untervektorraum im Raum von $(0,q)-$Tensoren.

**Beweis.** Nachweisen, dass jede Linearkombination von symmetrischen Tensoren ein symmetrischer Tensor ist – einfache Übung

# Wichtige Klassen von Tensoren

**Def. 62** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt symmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\{1,...,q\}} = \{\sigma : \{1, ..., q\} \to \{1, ..., q\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

**Bsp.** $(0,2)-$Tensoren sind nach Definition Bilinearformen.

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}.$$

Also, Symmetrie des $(0,2)-$Tensors $b$ bedeutet, dass

$b(v_1, v_2) \overset{\text{Immer erfüllt}}{=} b(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)})$ und

$b(v_1, v_2) = b(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)}) \overset{\text{Def. von symmetrischen Bilinearformen}}{=} b(v_2, v_1)$.

In Koordinaten: Ein $(0,q)$-Tensor $T$ ist g.d. symmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q$ $T_{i_1,...,i_q} = T_{i_{\sigma(1)},...,i_{\sigma(q)}}$.

**Lemma 41** Symmetrische $(0,q)-$Tensoren bilden einen Untervektorraum im Raum von $(0,q)-$Tensoren.

**Beweis.** Nachweisen, dass jede Linearkombination von symmetrischen Tensoren ein symmetrischer Tensor ist – einfache Übung. □

## Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\ldots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\ldots,j_q)})$ wie folgt

## Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:

$S(T)(v_1, \dots, v_q)$

# Symmetrisieren von $(0,q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0,q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1,\dots,v_q) := \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(q)})$

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.

In Koordinaten:

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.

In Koordinaten: $S(T)_{j_1,\dots,j_q}$

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.
In Koordinaten: $S(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}$

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.
In Koordinaten: $S(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}$ .

**Lemma 42**

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.

In Koordinaten: $S(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}$ .

**Lemma 42** $S(T)$ ist symmetrisch

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.

In Koordinaten: $S(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}$ .

**Lemma 42** $S(T)$ ist symmetrisch .

**Beweis.**

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.
In Koordinaten: $S(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T_{j_{\sigma(1)},\cdots,j_{\sigma(q)}}$ .

**Lemma 42** $S(T)$ ist symmetrisch .

**Beweis.** $S(T)(v_{\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma_0(q)}) \overset{\text{Nach Definition}}{=}$
$\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma \circ \sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma \circ \sigma_0(q)})$ $(*)$

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.

In Koordinaten: $S(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}$ .

**Lemma 42** $S(T)$ ist symmetrisch .

**Beweis.** $S(T)(v_{\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma_0(q)}) \overset{\text{Nach Definition}}{=}$
$\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T(v_{\sigma\circ\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma\circ\sigma_0(q)}) \qquad (*)$ .

Aber die Menge $\{\sigma\circ\sigma_0 \mid \sigma\in\mathcal{S}_q\} = \mathcal{S}_q$

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.
In Koordinaten: $S(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}$ .

**Lemma 42** $S(T)$ ist symmetrisch .

**Beweis.** $S(T)(v_{\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma_0(q)}) \overset{\text{Nach Definition}}{=}$
$\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma \circ \sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma \circ \sigma_0(q)}) \qquad (*)$ .
Aber die Menge $\{\sigma \circ \sigma_0 \mid \sigma \in \mathcal{S}_q\} = \mathcal{S}_q$. Dann ist die Summe $(*)$ gleich $\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.

In Koordinaten: $S(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}$ .

**Lemma 42** $S(T)$ ist symmetrisch .

**Beweis.** $S(T)(v_{\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma_0(q)}) \overset{\text{Nach Definition}}{=}$
$\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma \circ \sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma \circ \sigma_0(q)}) \qquad (*)$ .
Aber die Menge $\{\sigma \circ \sigma_0 \mid \sigma \in \mathcal{S}_q\} = \mathcal{S}_q$. Dann ist die Summe $(*)$ gleich $\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$, $\square$

**Bsp**

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.

In Koordinaten: $S(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}$ .

**Lemma 42** $S(T)$ ist symmetrisch .

**Beweis.** $S(T)(v_{\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma_0(q)}) \overset{\text{Nach Definition}}{=}$
$\frac{1}{q!} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T(v_{\sigma\circ\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma\circ\sigma_0(q)}) \qquad (*)$ .
Aber die Menge $\{\sigma \circ \sigma_0 \mid \sigma \in \mathcal{S}_q\} = \mathcal{S}_q$. Dann ist die Summe $(*)$ gleich $\frac{1}{q!} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$, $\square$

**Bsp .** Sei $b$ eine Bilinearform, d.h., ein $(0, 2)-$Tensor

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.
In Koordinaten: $S(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T_{j_{\sigma(1)},\cdots,j_{\sigma(q)}}$ .

**Lemma 42** $S(T)$ ist symmetrisch .

**Beweis.** $S(T)(v_{\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma_0(q)}) \overset{\text{Nach Definition}}{=}$
$\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T(v_{\sigma\circ\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma\circ\sigma_0(q)}) \qquad (*)$ .
Aber die Menge $\{\sigma\circ\sigma_0 \mid \sigma\in\mathcal{S}_q\} = \mathcal{S}_q$. Dann ist die Summe $(*)$ gleich $\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$, □

**Bsp .** Sei $b$ eine Bilinearform, d.h., ein $(0, 2)-$Tensor. Dann ist $S(b)(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(b(v_1, v_2) + b(v_2, v_1))$

# Symmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\ldots,j_q})$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $S(T) := (T_{(j_1,\ldots,j_q)})$ wie folgt:
$S(T)(v_1, \ldots, v_q) := \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)})$.

In Koordinaten: $S(T)_{j_1,\ldots,j_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T_{j_{\sigma(1)},\cdots,j_{\sigma(q)}}$ .

**Lemma 42** $S(T)$ ist symmetrisch .

**Beweis.** $S(T)(v_{\sigma_0(1)}, \ldots, v_{\sigma_0(q)}) \overset{\text{Nach Definition}}{=}$
$\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T(v_{\sigma\circ\sigma_0(1)}, \ldots, v_{\sigma\circ\sigma_0(q)}) \qquad (*)$ .
Aber die Menge $\{\sigma\circ\sigma_0 \mid \sigma\in\mathcal{S}_q\} = \mathcal{S}_q$. Dann ist die Summe $(*)$ gleich $\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)})$, $\square$

**Bsp .** Sei $b$ eine Bilinearform, d.h., ein $(0, 2)-$Tensor. Dann ist $S(b)(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(b(v_1, v_2) + b(v_2, v_1))$ .

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63**

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) =$

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:**

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert :

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen:

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten:

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q$

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \;\; T_{i_1,...,i_q} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{\sigma(i_1),...,\sigma(i_q)}$.

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \;\; T_{i_1, \dots, i_q} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_q)}$.

**Bsp.**

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \;\; T_{i_1,\dots,i_q} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_q)}$.

**Bsp.** Man definiere $e_1^* \wedge e_2^* \in V^* \otimes V^*$ wie folgt

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \;\; T_{i_1,...,i_q} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{\sigma(i_1),...,\sigma(i_q)}$.

**Bsp.** Man definiere $e_1^* \wedge e_2^* \in V^* \otimes V^*$ wie folgt :

$e_1^* \wedge e_2(v, v')$

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0,q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \;\; T_{i_1,...,i_q} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{\sigma(i_1),...,\sigma(i_q)}$.

**Bsp.** Man definiere $e_1^* \wedge e_2^* \in V^* \otimes V^*$ wie folgt :

$$e_1^* \wedge e_2(v, v') = x_1 x_2' - x_2 x_1'$$

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0,q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \;\; T_{i_1,\dots,i_q} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_q)}$.

**Bsp.** Man definiere $e_1^* \wedge e_2^* \in V^* \otimes V^*$ wie folgt :

$$e_1^* \wedge e_2(v, v') = x_1 x_2' - x_2 x_1' = det\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix}$$

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \;\; T_{i_1,...,i_q} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{\sigma(i_1),...,\sigma(i_q)}$.

**Bsp.** Man definiere $e_1^* \wedge e_2^* \in V^* \otimes V^*$ wie folgt :

$e_1^* \wedge e_2(v, v') = x_1 x_2' - x_2 x_1' = det\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ der

Koordinatenvektoren von $v, v'$ sind

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1,...,v_q) = \mathrm{sign}(\sigma)T(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0,q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \;\; T_{i_1,...,i_q} = \mathrm{sign}(\sigma)T_{\sigma(i_1),...,\sigma(i_q)}$.

**Bsp.** Man definiere $e_1^* \wedge e_2^* \in V^* \otimes V^*$ wie folgt :

$e_1^* \wedge e_2(v,v') = x_1x_2' - x_2x_1' = det\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektoren von $v, v'$ sind.

$e_1^* \wedge e_2^*$

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0, q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0, q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \ \ T_{i_1, \dots, i_q} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_q)}$.

**Bsp.** Man definiere $e_1^* \wedge e_2^* \in V^* \otimes V^*$ wie folgt :

$e_1^* \wedge e_2(v, v') = x_1 x_2' - x_2 x_1' = det\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ der

Koordinatenvektoren von $v, v'$ sind.

$e_1^* \wedge e_2^*$ ist ein antisimmetrischer $(0, 2)-$Tensor

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1,...,v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0,q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \ \ T_{i_1,...,i_q} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{\sigma(i_1),...,\sigma(i_q)}$.

**Bsp.** Man definiere $e_1^* \wedge e_2^* \in V^* \otimes V^*$ wie folgt :

$e_1^* \wedge e_2(v,v') = x_1x_2' - x_2x_1' = det\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektoren von $v, v'$ sind.

$e_1^* \wedge e_2^*$ ist ein antisimmetrischer $(0,2)-$Tensor: Tatsächlich,

$e_1^* \wedge e_2^*(v', v)$

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0,q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \ \ T_{i_1,\dots,i_q} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_q)}$.

**Bsp.** Man definiere $e_1^* \wedge e_2^* \in V^* \otimes V^*$ wie folgt :

$e_1^* \wedge e_2(v, v') = x_1 x_2' - x_2 x_1' = det\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektoren von $v, v'$ sind.

$e_1^* \wedge e_2^*$ ist ein antisimmetrischer $(0,2)-$Tensor: Tatsächlich,

$e_1^* \wedge e_2^*(v', v) = det\begin{pmatrix} x_1' & x_1 \\ x_2' & x_2 \end{pmatrix}$

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0,q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \;\; T_{i_1,\dots,i_q} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{\sigma(i_1),\dots,\sigma(i_q)}$.

**Bsp.** Man definiere $e_1^* \wedge e_2^* \in V^* \otimes V^*$ wie folgt :

$e_1^* \wedge e_2(v, v') = x_1 x_2' - x_2 x_1' = det\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektoren von $v, v'$ sind.

$e_1^* \wedge e_2^*$ ist ein antisimmetrischer $(0,2)-$Tensor: Tatsächlich,

$e_1^* \wedge e_2^*(v', v) = det\begin{pmatrix} x_1' & x_1 \\ x_2' & x_2 \end{pmatrix} \overset{(D5)'}{=}$

# Antisymmetrische Tensoren

**Def. 63** Ein $(0,q)$ Tensor $T$ heißt antisymmetrisch, falls für jeder $\sigma \in \mathcal{S}_q$ gilt: $T(v_1, ..., v_q) = \operatorname{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.

**Wiederholung:** In Vorl. 6 haben wir die Abbildung $\operatorname{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$ definiert : Zerlege $P$ in Produkt von Transpositionen: $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze $\operatorname{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$

In Koordinaten: Ein $(0,q)$-Tensor $T$ ist g.d. antisymmetrisch, falls $\forall \sigma \in \mathcal{S}_q \;\; T_{i_1,...,i_q} = \operatorname{sign}(\sigma) T_{\sigma(i_1),...,\sigma(i_q)}$.

**Bsp.** Man definiere $e_1^* \wedge e_2^* \in V^* \otimes V^*$ wie folgt :

$e_1^* \wedge e_2(v, v') = x_1 x_2' - x_2 x_1' = det\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ der

Koordinatenvektoren von $v, v'$ sind.

$e_1^* \wedge e_2^*$ ist ein antisimmetrischer $(0,2)-$Tensor: Tatsächlich,

$e_1^* \wedge e_2^*(v', v) = det\begin{pmatrix} x_1' & x_1 \\ x_2' & x_2 \end{pmatrix} \overset{(D5)'}{=} - det\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix}$.

**Bsp.**

**Bsp.** Man definiere $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_q}^* \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$

**Bsp.** Man definiere $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_q}^* \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ wie folgt:

$e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_q}^*(v_1, ..., v_q) =$

**Bsp.** Man definiere $e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q} \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ wie folgt:

$e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q}(v_1, ..., v_q) = det \begin{pmatrix} x^1_{i_1} & \cdots & x^q_{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x^1_{i_q} & \cdots & x^q_{i_2} \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x^1_i \\ \vdots \\ x^n_i \end{pmatrix}$

**Bsp.** Man definiere $e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q} \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ wie folgt:

$e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q}(v_1, ..., v_q) = det \begin{pmatrix} x^1_{i_1} & \cdots & x^q_{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x^1_{i_q} & \cdots & x^q_{i_2} \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x^1_i \\ \vdots \\ x^n_i \end{pmatrix}$ die

Koordinatenvektor von $v_i$ ist.

**Lemma 43**

**Bsp.** Man definiere $e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q} \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ wie folgt:

$e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q}(v_1, ..., v_q) = det \begin{pmatrix} x^1_{i_1} & \cdots & x^q_{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x^1_{i_q} & \cdots & x^q_{i_2} \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x^1_i \\ \vdots \\ x^n_i \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektor von $v_i$ ist.

**Lemma 43** Antisymmetrische $(0, q)-$Tensoren bilden einen Untervektorraum im Raum von $(0, q)-$Tensoren.

**Bsp.** Man definiere $e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q} \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ wie folgt:

$e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q}(v_1, ..., v_q) = det \begin{pmatrix} x^1_{i_1} & \cdots & x^q_{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x^1_{i_q} & \cdots & x^q_{i_2} \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x^1_i \\ \vdots \\ x^n_i \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektor von $v_i$ ist.

**Lemma 43** Antisymmetrische $(0, q)-$Tensoren bilden einen Untervektorraum im Raum von $(0, q)-$Tensoren. Die Elemente $e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q}$, $i_1 < ... < i_q$

**Bsp.** Man definiere $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_q}^* \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ wie folgt:

$e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_q}^*(v_1, ..., v_q) = det \begin{pmatrix} x_{i_1}^1 & \cdots & x_{i_1}^q \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i_q}^1 & \cdots & x_{i_2}^q \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^n \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektor von $v_i$ ist.

**Lemma 43** Antisymmetrische $(0, q)-$Tensoren bilden einen Untervektorraum im Raum von $(0, q)-$Tensoren. Die Elemente $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_q}^*$, $i_1 < ... < i_q$ bilden eine Basis.

**Beweis.**

**Bsp.** Man definiere $e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q} \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ wie folgt:
$e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q}(v_1, ..., v_q) = det \begin{pmatrix} x^1_{i_1} & \cdots & x^q_{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x^1_{i_q} & \cdots & x^q_{i_2} \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x^1_i \\ \vdots \\ x^n_i \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektor von $v_i$ ist.

**Lemma 43** Antisymmetrische $(0, q)-$Tensoren bilden einen Untervektorraum im Raum von $(0, q)-$Tensoren. Die Elemente $e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q}$, $i_1 < ... < i_q$ bilden eine Basis.

**Beweis.** Wie Lemma 41/Satz 73

**Bsp.** Man definiere $e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q} \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ wie folgt:
$e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q}(v_1, ..., v_q) = det \begin{pmatrix} x^1_{i_1} & \cdots & x^q_{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x^1_{i_q} & \cdots & x^q_{i_2} \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} x^1_i \\ \vdots \\ x^n_i \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektor von $v_i$ ist.

**Lemma 43** Antisymmetrische $(0, q)-$Tensoren bilden einen Untervektorraum im Raum von $(0, q)-$Tensoren. Die Elemente $e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_q}$, $i_1 < ... < i_q$ bilden eine Basis.

**Beweis.** Wie Lemma 41/Satz 73. $\square$

# Antisymmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q}$ ein $(0, q)$-Tensor

# Antisymmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q}$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $A(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt

# Antisymmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\ldots,j_q}$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor
$A(T) := (T_{(j_1,\ldots,j_q)})$ wie folgt :
$A(T)(v_1, \ldots, v_q)$

# Antisymmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,...,j_q}$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $A(T) := (T_{(j_1,...,j_q)})$ wie folgt :
$A(T)(v_1, ..., v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$

# Antisymmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\ldots,j_q}$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $A(T) := (T_{(j_1,\ldots,j_q)})$ wie folgt :
$A(T)(v_1, \ldots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)})$.

# Antisymmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\ldots,j_q}$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $A(T) := (T_{(j_1,\ldots,j_q)})$ wie folgt :
$A(T)(v_1, \ldots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)})$.

In Koordinaten

# Antisymmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q}$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $A(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt :
$A(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.

In Koordinaten: $A(T)_{j_1,\dots,j_q}$

# Antisymmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q}$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $A(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt :
$A(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.
In Koordinaten: $A(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}$.

# Antisymmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\ldots,j_q}$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $A(T) := (T_{(j_1,\ldots,j_q)})$ wie folgt :
$A(T)(v_1, \ldots, v_q) := \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)})$.
In Koordinaten: $A(T)_{j_1,\ldots,j_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T_{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(q)}}$.

**Lemma 44**

# Antisymmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q}$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $A(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt :
$A(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.

In Koordinaten: $A(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}$.

**Lemma 44** $A(T)$ ist antisymmetrisch.

# Antisymmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,...,j_q}$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $A(T) := (T_{(j_1,...,j_q)})$ wie folgt :
$A(T)(v_1, ..., v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(q)})$.
In Koordinaten: $A(T)_{j_1,...,j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T_{j_{\sigma(1)},...,j_{\sigma(q)}}$.

**Lemma 44** $A(T)$ ist antisymmetrisch.

# Antisymmetrisieren von $(0, q)-$ Tensoren

Sei $T = (T_{j_1,\dots,j_q}$ ein $(0, q)$-Tensor. Man definiere den Tensor $A(T) := (T_{(j_1,\dots,j_q)})$ wie folgt :
$A(T)(v_1, \dots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$.

In Koordinaten: $A(T)_{j_1,\dots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma) T_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(q)}}$.

**Lemma 44** $A(T)$ ist antisymmetrisch.

**Beweis.** Wie von Lemma 42.

# Kontraktion von Tensoren

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.**

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1, 1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.**

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1, 1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1, 1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis)

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:**

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?

**Antwort:**

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?

**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?

**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.

Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1, 1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1, 1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.

Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes {V^*}^{\otimes q}$

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1, 1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1, 1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.
Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Man definiere den $V^{*\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1}$

Tensor

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.
Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Man definiere den $V^{*\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1}$

Tensor (in Koordinaten

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.
Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Man definiere den $V^{*\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1}$ Tensor (in Koordinaten) $(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}})$

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.
Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Man definiere den $V^{*\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1}$ Tensor (in Koordinaten) $(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}})$ wie folgt:
$(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}})$

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.
Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Man definiere den $V^{*\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1}$ Tensor (in Koordinaten) $(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}})$ wie folgt:
$(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}}) = \sum_{\alpha=1}^n (T^{i_1,\dots,i_{p-1},\alpha}_{j_1,\dots,j_{q-1},\alpha})$

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.
Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Man definiere den $V^{*\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1}$ Tensor (in Koordinaten) $(T^{i_1,\ldots,i_{p-1}}_{j_1,\ldots,j_{q-1}})$ wie folgt:
$(T^{i_1,\ldots,i_{p-1}}_{j_1,\ldots,j_{q-1}}) = \sum_{\alpha=1}^n (T^{i_1,\ldots,i_{p-1},\alpha}_{j_1,\ldots,j_{q-1},\alpha})$.

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.
Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Man definiere den $V^{*\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1}$ Tensor (in Koordinaten) $(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}})$ wie folgt:
$(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}}) = \sum_{\alpha=1}^n (T^{i_1,\dots,i_{p-1},\alpha}_{j_1,\dots,j_{q-1},\alpha})$.
Koordinatenfreie Bezeichnung

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.
Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Man definiere den $V^{*\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1}$ Tensor (in Koordinaten) $(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}})$ wie folgt:
$(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}}) = \sum_{\alpha=1}^n (T^{i_1,\dots,i_{p-1},\alpha}_{j_1,\dots,j_{q-1},\alpha})$.
Koordinatenfreie Bezeichnung: Für jedes Tupel
$(\xi_1, \dots, \dots\xi_{p-1}, v_1, \dots, v_{q-1}$

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.
Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Man definiere den $V^{*\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1}$ Tensor (in Koordinaten) $(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}})$ wie folgt:
$(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}}) = \sum_{\alpha=1}^n (T^{i_1,\dots,i_{p-1},\alpha}_{j_1,\dots,j_{q-1},\alpha})$.
Koordinatenfreie Bezeichnung: Für jedes Tupel $(\xi_1, ..., ...\xi_{p-1}, v_1, ..., v_{q-1})$ definieren wir einen $(1,1)$-Tensor $A$ wie folgt p: $A(\xi, v) = T(\xi_1, ..., ...\xi_{p-1}, \xi, v_1, ..., v_{q-1}, v$

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.

Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Man definiere den $V^{*\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1}$ Tensor (in Koordinaten) $(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}})$ wie folgt:
$(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}}) = \sum_{\alpha=1}^n (T^{i_1,\dots,i_{p-1},\alpha}_{j_1,\dots,j_{q-1},\alpha})$.
Koordinatenfreie Bezeichnung: Für jedes Tupel $(\xi_1, \dots, \dots\xi_{p-1}, v_1, \dots, v_{q-1})$ definieren wir einen $(1,1)$-Tensor $A$ wie folgt p: $A(\xi, v) = T(\xi_1, \dots, \dots\xi_{p-1}, \xi, v_1, \dots, v_{q-1}, v)$.

Dann setzen wir

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.
Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Man definiere den $V^{*\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1}$ Tensor (in Koordinaten) $(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}})$ wie folgt:
$(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}}) = \sum_{\alpha=1}^n (T^{i_1,\dots,i_{p-1},\alpha}_{j_1,\dots,j_{q-1},\alpha})$.
Koordinatenfreie Bezeichnung: Für jedes Tupel $(\xi_1, \dots, \dots\xi_{p-1}, v_1, \dots, v_{q-1})$ definieren wir einen $(1,1)$-Tensor $A$ wie folgt p: $A(\xi, v) = T(\xi_1, \dots, \dots\xi_{p-1}, \xi, v_1, \dots, v_{q-1}, v)$.
Dann setzen wir $(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}})(\xi_1, \dots, \dots\xi_{p-1}, v_1, \dots, v_{q-1})$

# Kontraktion von Tensoren

**Wiederholung 1.** Wir haben Endomorphismen von $V$ mit $(1,1)$ Tensoren identifiziert.

**Wiederholung 2.** Spur der Matrix eines Endomophismus hängt nicht von der Basis ab; man kann also Spur der Endomorphismus definieren als Spur dessen Matrix (bzgl. einer Basis).

**Frage:** Was ist Spur eines $(1,1)$-Tensors $T = (T^i_j)$?
**Antwort:** $tr(T^i_j) = \sum_{i=1}^n T^i_i$.
Wir werden dies für alle Tensoren verallgemeinern.
Sei $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Man definiere den $V^{*\otimes p-1} \otimes V^{\otimes q-1}$ Tensor (in Koordinaten) $(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}})$ wie folgt:
$(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}}) = \sum_{\alpha=1}^n (T^{i_1,\dots,i_{p-1},\alpha}_{j_1,\dots,j_{q-1},\alpha})$.
Koordinatenfreie Bezeichnung: Für jedes Tupel $(\xi_1, \dots, \dots\xi_{p-1}, v_1, \dots, v_{q-1})$ definieren wir einen $(1,1)$-Tensor $A$ wie folgt p: $A(\xi, v) = T(\xi_1, \dots, \dots\xi_{p-1}, \xi, v_1, \dots, v_{q-1}, v)$.
Dann setzen wir $(T^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}})(\xi_1, \dots, \dots\xi_{p-1}, v_1, \dots, v_{q-1}) = tr(A)$.