Abschnitt: Quadriken

Abschnitt: Quadriken

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt und Standartkoorinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Abschnitt: Quadriken

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt und Standartkoorinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Def. 59

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt und Standartkoorinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Def. 59 Die Lösungsmenge der Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0}$$

heißt Quadrik

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt und Standartkoorinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Def. 59 Die Lösungsmenge der Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0}$$

heißt Quadrik. ($a_{ij}, a_i, a \in \mathbb{R}$. $A = (a_{ij})$ wird $\neq \mathbf{0}$ vorausgesetzt.)

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt und Standartkoorinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Def. 59 Die Lösungsmenge der Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0}$$

heißt Quadrik. ($a_{ij}, a_i, a \in \mathbb{R}$. $A = (a_{ij})$ wird $\neq \mathbf{0}$ vorausgesetzt.)

Fragen:

Abschnitt: Quadriken

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt und Standartkoorinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Def. 59 Die Lösungsmenge der Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0}$$

heißt Quadrik. ($a_{ij}, a_i, a \in \mathbb{R}$. $A = (a_{ij})$ wird $\neq \mathbf{0}$ vorausgesetzt.)

Fragen:

- In welche „beste“ Form kann man die Gleichung der Quadrik mit Hilfe einer Isometrie bzw. $\underbrace{\text{affiner Transformation}}_{\text{wird heute erklärt}}$ bringen?

Abschnitt: Quadriken

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt und Standartkoorinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Def. 59 Die Lösungsmenge der Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0}$$

heißt Quadrik. ($a_{ij}, a_i, a \in \mathbb{R}$. $A = (a_{ij})$ wird $\neq \mathbf{0}$ vorausgesetzt.)

Fragen:

- In welche „beste“ Form kann man die Gleichung der Quadrik mit Hilfe einer Isometrie bzw. $\underbrace{\text{affiner Transformation}}_{\text{wird heute erklärt}}$ bringen?
- Gegeben eine Quadrik, wie kann man die Form der Quadrik finden, onhe die Transformation explizit einzugeben?

Abschnitt: Quadriken

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt und Standartkoorinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Def. 59 Die Lösungsmenge der Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0}$$

heißt Quadrik. ($a_{ij}, a_i, a \in \mathbb{R}$. $A = (a_{ij})$ wird $\neq \mathbf{0}$ vorausgesetzt.)

Fragen:

- In welche „beste“ Form kann man die Gleichung der Quadrik mit Hilfe einer Isometrie bzw. $\underbrace{\text{affiner Transformation}}_{\text{wird heute erklärt}}$ bringen?
- Gegeben eine Quadrik, wie kann man die Form der Quadrik finden, onhe die Transformation explizit einzugeben?

Gleichung der Quadrik in Matrix-Form

Gleichung der Quadrik in Matrix-Form

Die Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0}$$

kann man in der „Matrix-Form“

$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$ schreiben.

Gleichung der Quadrik in Matrix-Form

Die Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = 0}$$

kann man in der „Matrix-Form“

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$ schreiben.

In den Fall kann mann immer Voraussetzen, dass die Matrix $A := (a_{ij})$ symmetrisch ist.

Gleichung der Quadrik in Matrix-Form

Die Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = 0}$$

kann man in der „Matrix-Form“

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$ schreiben.

In den Fall kann mann immer Voraussetzen, dass die Matrix $A := (a_{ij})$ symmetrisch ist. Tatsächlich, wenn wir die Matrix A mit der Matrix $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ersetzen

Gleichung der Quadrik in Matrix-Form

Die Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0}$$

kann man in der „Matrix-Form“

$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$ schreiben.

In den Fall kann mann immer Voraussetzen, dass die Matrix $A := (a_{ij})$ symmetrisch ist. Tatsächlich, wenn wir die Matrix A mit der Matrix $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ersetzen (die offensichtlich symmetrisch ist),

Gleichung der Quadrik in Matrix-Form

Die Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0}$$

kann man in der „Matrix-Form“

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$ schreiben.

In den Fall kann mann immer Voraussetzen, dass die Matrix $A := (a_{ij})$ symmetrisch ist. Tatsächlich, wenn wir die Matrix A mit der Matrix $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ersetzen (die offensichtlich symmetrisch ist), wird die Gleichung und deswegen die Lösungsmenge nicht geändert:

Gleichung der Quadrik in Matrix-Form

Die Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = 0}$$

kann man in der „Matrix-Form“
$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$ schreiben.
In den Fall kann mann immer Voraussetzen, dass die Matrix $A := (a_{ij})$ symmetrisch ist. Tatsächlich, wenn wir die Matrix A mit der Matrix $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ersetzen (die offensichtlich symmetrisch ist), wird die Gleichung und deswegen die Lösungsmenge nicht geändert:
$x^tAx \overset{\text{Das ist } 1\times 1 \text{ Matrix}}{=}$

Gleichung der Quadrik in Matrix-Form

Die Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = 0}$$

kann man in der „Matrix-Form“

$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$ schreiben.

In den Fall kann mann immer Voraussetzen, dass die Matrix $A := (a_{ij})$ symmetrisch ist. Tatsächlich, wenn wir die Matrix A mit der Matrix $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ersetzen (die offensichtlich symmetrisch ist), wird die Gleichung und deswegen die Lösungsmenge nicht geändert:

$x^tAx \overset{\text{Das ist } 1\times 1 \text{ Matrix}}{=} (x^tAx)^t \overset{\text{Rechenregeln}}{=}$

Gleichung der Quadrik in Matrix-Form

Die Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0}$$

kann man in der „Matrix-Form“

$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$ schreiben.

In den Fall kann mann immer Voraussetzen, dass die Matrix $A := (a_{ij})$ symmetrisch ist. Tatsächlich, wenn wir die Matrix A mit der Matrix $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ersetzen (die offensichtlich symmetrisch ist), wird die Gleichung und deswegen die Lösungsmenge nicht geändert:

$x^t A x \overset{\text{Das ist } 1 \times 1 \text{ Matrix}}{=} (x^t A x)^t \overset{\text{Rechenregeln}}{=} x^t A^t x,$

Gleichung der Quadrik in Matrix-Form

Die Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = 0}$$

kann man in der „Matrix-Form“
$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$ schreiben.
In den Fall kann mann immer Voraussetzen, dass die Matrix $A := (a_{ij})$ symmetrisch ist. Tatsächlich, wenn wir die Matrix A mit der Matrix $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ersetzen (die offensichtlich symmetrisch ist), wird die Gleichung und deswegen die Lösungsmenge nicht geändert:
$x^tAx \overset{\text{Das ist } 1 \times 1 \text{ Matrix}}{=} (x^tAx)^t \overset{\text{Rechenregeln}}{=} x^tA^tx$, und deswegen die ursprüngliche Gleichung is dieselbe wie

Gleichung der Quadrik in Matrix-Form

Die Gleichung

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = 0}$$

kann man in der „Matrix-Form“

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$ schreiben.

In den Fall kann mann immer Voraussetzen, dass die Matrix $A := (a_{ij})$ symmetrisch ist. Tatsächlich, wenn wir die Matrix A mit der Matrix $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ersetzen (die offensichtlich symmetrisch ist), wird die Gleichung und deswegen die Lösungsmenge nicht geändert:
$x^tAx \overset{\text{Das ist } 1\times 1 \text{ Matrix}}{=} (x^tAx)^t \overset{\text{Rechenregeln}}{=} x^tA^tx$, und deswegen die ursprüngliche Gleichung is dieselbe wie

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{t} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Erweiterte Matrix der Gleichung

Erweiterte Matrix der Gleichung

Man kann die Gleichung der Quadrik auch in der Form

Erweiterte Matrix der Gleichung

Man kann die Gleichung der Quadrik auch in der Form

$$(x_1 \ \cdots \ x_n \ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_1/2 \\ \vdots \\ a_n/2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1/2 & \cdots & a_n/2 \end{matrix}} & a_0 \end{pmatrix}}_{\text{Erweiterte (symmetrische) Matrix } Erw_Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Erweiterte Matrix der Gleichung

Man kann die Gleichung der Quadrik auch in der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_1/2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_n/2 \\ a_1/2 & \cdots & a_n/2 & a_0 \end{pmatrix}}_{\text{Erweiterte (symmetrische) Matrix } Erw_Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Beweis:

Erweiterte Matrix der Gleichung

Man kann die Gleichung der Quadrik auch in der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_1/2 \\ \vdots \\ a_n/2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1/2 & \cdots & a_n/2 \end{matrix}} & a_0 \end{pmatrix}}_{\text{Erweiterte (symmetrische) Matrix } Erw_Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Beweis: Einfach nachrechnen und die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$ bekommen.

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung

$x^2 + y^2 + 1 = 0$

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \iff (x\ y) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0 \iff (x\ y\ 1) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung
$x^2 + y^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x\ y) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x\ y\ 1) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\binom{1}{2}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0.$

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung

$x^2+y^2+1=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} +1=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} =0.$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\binom{1}{2}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2+(y-2)^2=0$. Und diese Gleichung ist
$x^2+y^2-2x-4y+5=0$

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung
$x^2+y^2+1=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+1=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0.$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\binom{1}{2}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2+(y-2)^2=0$. Und diese Gleichung ist
$x^2+y^2-2x-4y+5=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(-2\ \ -4)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+5=0$

$\iff$

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\emptyset$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung

$x^2+y^2+1=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+1=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\binom{1}{2}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2+(y-2)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$x^2+y^2-2x-4y+5=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(-2\ \ -4)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+5=0$

$\iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -2\\-1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung
$x^2 + y^2 + 1 = 0 \iff (x\ y) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0 \iff (x\ y\ 1) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\binom{1}{2}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$. Und diese Gleichung ist
$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0 \iff (x\ y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-2\ \ -4) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 5 = 0$
$\iff (x\ y\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Gerade ist eine Quadrik:

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung

$x^2+y^2+1=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+1=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\binom{1}{2}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2+(y-2)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$x^2+y^2-2x-4y+5=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(-2\ \ -4)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+5=0$

$\iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -2\\-1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

Gerade ist eine Quadrik: Z.B. ist die Gerade $\left\{\binom{x}{y} \text{ sodass } x=y\right\}$

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung

$x^2 + y^2 + 1 = 0 \iff (x\ y) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0 \iff (x\ y\ 1) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\binom{1}{2}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$. Und diese Gleichung ist

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0 \iff (x\ y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-2\ \ -4) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 5 = 0$

$\iff (x\ y\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Gerade ist eine Quadrik: Z.B. ist die Gerade $\left\{ \binom{x}{y} \text{ sodass } x = y \right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)^2 = 0$.

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung

$x^2+y^2+1=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+1=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0.$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\binom{1}{2}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2+(y-2)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$x^2+y^2-2x-4y+5=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(-2\ \ -4)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+5=0$

$\iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0.$

Gerade ist eine Quadrik: Z.B. ist die Gerade $\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ sodass } x=y\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$x^2-2xy+y^2=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}$

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung

$x^2+y^2+1=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+1=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\binom{1}{2}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2+(y-2)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$x^2+y^2-2x-4y+5=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(-2\ \ -4)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+5=0$

$\iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

Gerade ist eine Quadrik: Z.B. ist die Gerade $\left\{\binom{x}{y} \text{ sodass } x=y\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$x^2-2xy+y^2=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

(Vereinigung von) Zwei Geraden ist eine Quadrik:

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung
$x^2+y^2+1=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+1=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\binom{1}{2}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2+(y-2)^2=0$. Und diese Gleichung ist
$x^2+y^2-2x-4y+5=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(-2\ \ -4)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+5=0$
$\iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

Gerade ist eine Quadrik: Z.B. ist die Gerade $\left\{\binom{x}{y} \text{ sodass } x=y\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)^2=0$. Und diese Gleichung ist
$x^2-2xy+y^2=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$

(Vereinigung von) Zwei Geraden ist eine Quadrik: z.B. ist die $\left\{\binom{x}{y} \text{ sodass x=y}\right\} \cup \left\{\binom{x}{y} \text{ sodass x=-y}\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)(x+y)=0$.

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung

$x^2+y^2+1=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+1=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0.$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\binom{1}{2}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2+(y-2)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$x^2+y^2-2x-4y+5=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(-2\ \ -4)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+5=0$

$\iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0.$

Gerade ist eine Quadrik: Z.B. ist die Gerade $\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ sodass } x=y\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$x^2-2xy+y^2=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0.$

(Vereinigung von) Zwei Geraden ist eine Quadrik: z.B. ist die $\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ sodass x=y}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ sodass x=-y}\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)(x+y)=0$. Und diese Gleichung ist

$x^2-y^2=0$

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung

$$x^2+y^2+1=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+1=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0.$$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2+(y-2)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$$x^2+y^2-2x-4y+5=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(-2\ \ -4)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+5=0$$

$$\iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0.$$

Gerade ist eine Quadrik: Z.B. ist die Gerade $\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ sodass } x=y\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$$x^2-2xy+y^2=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0.$$

(Vereinigung von) Zwei Geraden ist eine Quadrik: z.B. ist die $\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ sodass x=y}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ sodass x=-y}\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)(x+y)=0$. Und diese Gleichung ist

$$x^2-y^2=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$$

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung

$$x^2+y^2+1=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+1=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2+(y-2)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$$x^2+y^2-2x-4y+5=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(-2\ \ -4)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+5=0$$

$$\iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$$

Gerade ist eine Quadrik: Z.B. ist die Gerade $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ sodass } x=y\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$$x^2-2xy+y^2=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$$

(Vereinigung von) Zwei Geraden ist eine Quadrik: z.B. ist die $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ sodass x=y}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ sodass x=-y}\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)(x+y)=0$. Und diese Gleichung ist

$$x^2-y^2=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$$

Beispiele in dim 2: Ausgeartete Quadriken:

$\varnothing$ ist eine Quadrik: die entsprechende Gleichung

$$x^2+y^2+1=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+1=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$$

Ein Punkt is eine Quadrik: z.B. $\binom{1}{2}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x-1)^2+(y-2)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$$x^2+y^2-2x-4y+5=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(-2\ \ -4)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+5=0$$

$$\iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$$

Gerade ist eine Quadrik: Z.B. ist die Gerade $\left\{\binom{x}{y} \text{ sodass } x=y\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)^2=0$. Und diese Gleichung ist

$$x^2-2xy+y^2=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$$

(Vereinigung von) Zwei Geraden ist eine Quadrik: z.B. ist die $\left\{\binom{x}{y} \text{ sodass x=y}\right\} \cup \left\{\binom{x}{y} \text{ sodass x=-y}\right\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $(x-y)(x+y)=0$. Und diese Gleichung ist

$$x^2-y^2=0 \iff (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$$

Nichtausgeartete Quadriken in dim 2

Nichtausgeartete Quadriken in dim 2

Ellipse: $ax^2 + by^2 = c$,

Nichtausgeartete Quadriken in dim 2

Ellipse: $ax^2 + by^2 = c$, wobei $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0$

Nichtausgeartete Quadriken in dim 2

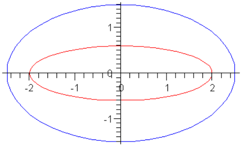
Ellipse: $ax^2 + by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nichtausgeartete Quadriken in dim 2

Ellipse: $ax^2 + by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

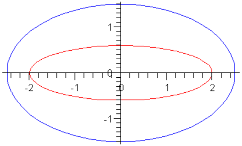
$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



Nichtausgeartete Quadriken in dim 2

Ellipse: $ax^2 + by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

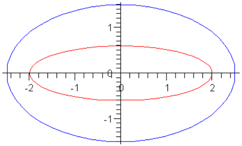


Hyperbel: $ax^2 - by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0\ c \neq 0.$

Nichtausgeartete Quadriken in dim 2

Ellipse: $ax^2 + by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$



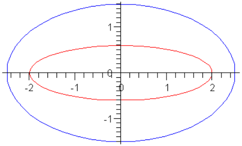
Hyperbel: $ax^2 - by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0\ c \neq 0.$

$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Nichtausgeartete Quadriken in dim 2

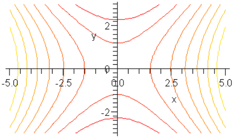
Ellipse: $ax^2 + by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



Hyperbel: $ax^2 - by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0\ c \neq 0$.

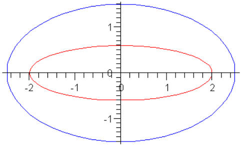
$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



Nichtausgeartete Quadriken in dim 2

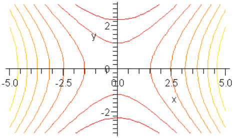
Ellipse: $ax^2 + by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



Hyperbel: $ax^2 - by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0\ c \neq 0$.

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

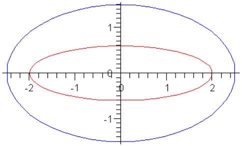


Parabel: $ax^2 + by = 0$, wobei $a \neq 0,\ b \neq 0$.

Nichtausgeartete Quadriken in dim 2

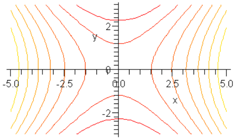
Ellipse: $ax^2 + by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



Hyperbel: $ax^2 - by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0\ c \neq 0$.

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



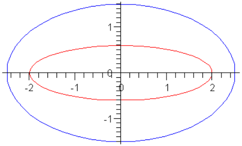
Parabel: $ax^2 + by = 0$, wobei $a \neq 0,\ b \neq 0$.

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + by = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b/2 \\ 0 & b/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Nichtausgeartete Quadriken in dim 2

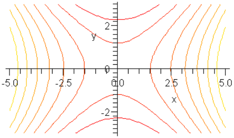
Ellipse: $ax^2 + by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



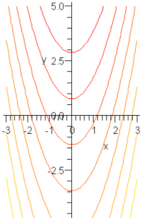
Hyperbel: $ax^2 - by^2 = c$, wobei $a > 0,\ b > 0\ c \neq 0.$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - c = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



Parabel: $ax^2 + by = 0$, wobei $a \neq 0,\ b \neq 0.$

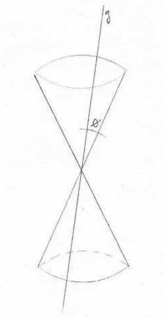
$$(x\ y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + by = 0 \iff (x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b/2 \\ 0 & b/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$



Quadriken als Kegelschnitte

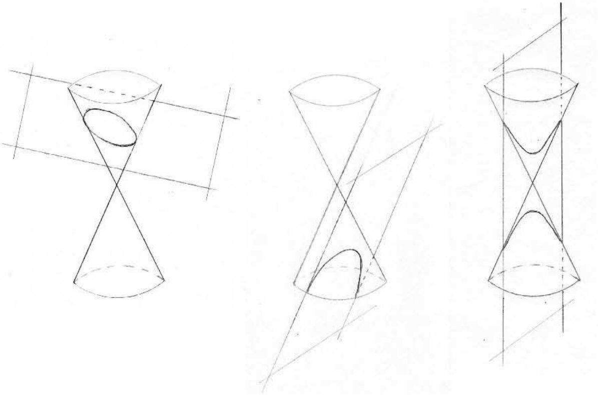
Quadriken als Kegelschnitte

Klassische Definition: (Menaechmus IV Jh.v.Chr.)
(Doppel-)Kegel im 3-dimensionalen Raum, mit Achse g besteht aus den Punkten auf den Geraden, die einen festen Winkel θ mit g bilden.



Kegelschnitt = Schnitt eines Kegels mit einer Ebene.

Kegelschnitt = Schnitt eines Kegels mit einer Ebene.



Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2(\theta)z^2 = 0$.

Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2(\theta) z^2 = 0$.
Die Schnittmenge des Kegels mit der Ebene
$$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z_0 + sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2(\theta) z^2 = 0$. Die Schnittmenge des Kegels mit der Ebene $\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z_0 + sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \binom{s}{t} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ist (als Punktmenge auf der Ebene in Koordinaten s, t)

Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2(\theta)z^2 = 0$.
Die Schnittmenge des Kegels mit der Ebene
$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z_0 + sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \binom{s}{t} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ist (als Punktmenge auf der Ebene in Koordinaten s, t) die Menge
$(x_0 + sx_1 + tx_2)^2 + (y + sy_1 + ty_2)^2 - \tan^2(\theta)(z_0 + sz_1 + tz_2)^2 =$
$(x_1^2 + y_1^2 - \tan^2(\theta)z_1^2)$

Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2(\theta)z^2 = 0$.
Die Schnittmenge des Kegels mit der Ebene
$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z_0 + sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ist (als Punktmenge auf der Ebene in Koordinaten s, t) die Menge
$(x_0 + sx_1 + tx_2)^2 + (y + sy_1 + ty_2)^2 - \tan^2(\theta)(z_0 + sz_1 + tz_2)^2 =$
$\underbrace{\left(x_1^2 + y_1^2 - \tan^2(\theta)z_1^2\right)}_{a_{11}} t^2 + 2\left(x_1x_2 + y_1y_2 - \tan^2(\theta)z_1z_2\right)$

Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2(\theta)z^2 = 0$.
Die Schnittmenge des Kegels mit der Ebene
$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z_0 + sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \binom{s}{t} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ist (als Punktmenge auf der Ebene in Koordinaten s, t) die Menge
$(x_0 + sx_1 + tx_2)^2 + (y + sy_1 + ty_2)^2 - \tan^2(\theta)(z_0 + sz_1 + tz_2)^2 =$
$\underbrace{\left(x_1^2 + y_1^2 - \tan^2(\theta)z_1^2\right)}_{a_{11}} t^2 + 2\underbrace{\left(x_1x_2 + y_1y_2 - \tan^2(\theta)z_1z_2\right)}_{a_{12}=a_{21}} ts +$
$(x_2^2 + y_2^2 - \tan^2(\theta)z_2^2)$

Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2(\theta)z^2 = 0$.
Die Schnittmenge des Kegels mit der Ebene
$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z_0 + sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \binom{s}{t} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ist (als Punktmenge auf der Ebene in Koordinaten s, t) die Menge

$$(x_0 + sx_1 + tx_2)^2 + (y + sy_1 + ty_2)^2 - \tan^2(\theta)(z_0 + sz_1 + tz_2)^2 =$$
$$\underbrace{\left(x_1^2 + y_1^2 - \tan^2(\theta)z_1^2\right)}_{a_{11}} t^2 + 2\underbrace{\left(x_1x_2 + y_1y_2 - \tan^2(\theta)z_1z_2\right)}_{a_{12}=a_{21}} ts +$$
$$\underbrace{\left(x_2^2 + y_2^2 - \tan^2(\theta)z_2^2\right)}_{a_{22}} s^2 + 2\left(x_1x_0 + y_1y_0 - \tan^2(\theta)z_1z_0\right)$$

Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2(\theta)z^2 = 0$.
Die Schnittmenge des Kegels mit der Ebene
$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z_0 + sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ist (als Punktmenge auf der Ebene in Koordinaten s, t) die Menge

$$(x_0 + sx_1 + tx_2)^2 + (y + sy_1 + ty_2)^2 - \tan^2(\theta)(z_0 + sz_1 + tz_2)^2 =$$
$$\underbrace{(x_1^2 + y_1^2 - \tan^2(\theta)z_1^2)}_{a_{11}} t^2 + 2\underbrace{(x_1x_2 + y_1y_2 - \tan^2(\theta)z_1z_2)}_{a_{12}=a_{21}} ts +$$
$$\underbrace{(x_2^2 + y_2^2 - \tan^2(\theta)z_2^2)}_{a_{22}} s^2 + \underbrace{2\left(x_1x_0 + y_1y_0 - \tan^2(\theta)z_1z_0\right)}_{a_1} t +$$
$$2\left(x_2x_0 + y_2y_0 - \tan^2(\theta)z_2z_0\right)$$

Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2(\theta) z^2 = 0$.
Die Schnittmenge des Kegels mit der Ebene
$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z_0 + sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ist (als Punktmenge auf der Ebene in Koordinaten s, t) die Menge

$$(x_0 + sx_1 + tx_2)^2 + (y + sy_1 + ty_2)^2 - \tan^2(\theta)(z_0 + sz_1 + tz_2)^2 =$$
$$\underbrace{\left(x_1^2 + y_1^2 - \tan^2(\theta) z_1^2\right)}_{a_{11}} t^2 + 2 \underbrace{\left(x_1 x_2 + y_1 y_2 - \tan^2(\theta) z_1 z_2\right)}_{a_{12} = a_{21}} ts +$$
$$\underbrace{\left(x_2^2 + y_2^2 - \tan^2(\theta) z_2^2\right)}_{a_{22}} s^2 + \underbrace{2 \left(x_1 x_0 + y_1 y_0 - \tan^2(\theta) z_1 z_0\right)}_{a_1} t +$$
$$\underbrace{2 \left(x_2 x_0 + y_2 y_0 - \tan^2(\theta) z_2 z_0\right)}_{a_2} s + (x_0^2 + y_0^2 - \tan^2(\theta) z_0^2$$

Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2(\theta)z^2 = 0$.
Die Schnittmenge des Kegels mit der Ebene
$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z_0 + sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ist (als Punktmenge auf der Ebene in Koordinaten s, t) die Menge

$$(x_0 + sx_1 + tx_2)^2 + (y + sy_1 + ty_2)^2 - \tan^2(\theta)(z_0 + sz_1 + tz_2)^2 =$$
$$\underbrace{\left(x_1^2 + y_1^2 - \tan^2(\theta)z_1^2\right)}_{a_{11}} t^2 + 2\underbrace{\left(x_1x_2 + y_1y_2 - \tan^2(\theta)z_1z_2\right)}_{a_{12}=a_{21}} ts +$$
$$\underbrace{\left(x_2^2 + y_2^2 - \tan^2(\theta)z_2^2\right)}_{a_{22}} s^2 + \underbrace{2\left(x_1x_0 + y_1y_0 - \tan^2(\theta)z_1z_0\right)}_{a_1} t +$$
$$\underbrace{2\left(x_2x_0 + y_2y_0 - \tan^2(\theta)z_2z_0\right)}_{a_2} s + \underbrace{\left(x_0^2 + y_0^2 - \tan^2(\theta)z_0^2\right)}_{a_0} = 0$$

Wir sehen, dass die Menge eine Quadrik ist. p
Hausaufgabe:

Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2(\theta)z^2 = 0$.
Die Schnittmenge des Kegels mit der Ebene
$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z_0 + sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ist (als Punktmenge auf der Ebene in Koordinaten s, t) die Menge

$$(x_0 + sx_1 + tx_2)^2 + (y + sy_1 + ty_2)^2 - \tan^2(\theta)(z_0 + sz_1 + tz_2)^2 =$$
$$\underbrace{\left(x_1^2 + y_1^2 - \tan^2(\theta)z_1^2\right)}_{a_{11}} t^2 + 2\underbrace{\left(x_1x_2 + y_1y_2 - \tan^2(\theta)z_1z_2\right)}_{a_{12}=a_{21}} ts +$$
$$\underbrace{\left(x_2^2 + y_2^2 - \tan^2(\theta)z_2^2\right)}_{a_{22}} s^2 + \underbrace{2\left(x_1x_0 + y_1y_0 - \tan^2(\theta)z_1z_0\right)}_{a_1} t +$$
$$\underbrace{2\left(x_2x_0 + y_2y_0 - \tan^2(\theta)z_2z_0\right)}_{a_2} s + \underbrace{\left(x_0^2 + y_0^2 - \tan^2(\theta)z_0^2\right)}_{a_0} = 0$$

Wir sehen, dass die Menge eine Quadrik ist. p
Hausaufgabe: Man zeige, dass man kann jede Quadrik bekommen, in dem man geeignete Ebene (also, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$) wählt.

Doppel-Kegel ist eine Quadrik mit der Gleichung $x^2 + y^2 - \tan^2(\theta)z^2 = 0$.
Die Schnittmenge des Kegels mit der Ebene
$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + sx_1 + tx_2 \\ y_0 + sy_1 + ty_2 \\ z_0 + sz_1 + tz_2 \end{pmatrix} \text{ sodass } \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ ist (als Punktmenge auf der Ebene in Koordinaten s, t) die Menge

$$(x_0 + sx_1 + tx_2)^2 + (y + sy_1 + ty_2)^2 - \tan^2(\theta)(z_0 + sz_1 + tz_2)^2 =$$
$$\underbrace{\left(x_1^2 + y_1^2 - \tan^2(\theta)z_1^2\right)}_{a_{11}} t^2 + 2\underbrace{\left(x_1x_2 + y_1y_2 - \tan^2(\theta)z_1z_2\right)}_{a_{12}=a_{21}} ts +$$
$$\underbrace{\left(x_2^2 + y_2^2 - \tan^2(\theta)z_2^2\right)}_{a_{22}} s^2 + \underbrace{2\left(x_1x_0 + y_1y_0 - \tan^2(\theta)z_1z_0\right)}_{a_1} t +$$
$$\underbrace{2\left(x_2x_0 + y_2y_0 - \tan^2(\theta)z_2z_0\right)}_{a_2} s + \underbrace{\left(x_0^2 + y_0^2 - \tan^2(\theta)z_0^2\right)}_{a_0} = 0$$

Wir sehen, dass die Menge eine Quadrik ist. p
Hausaufgabe: Man zeige, dass man kann jede Quadrik bekommen, in dem man geeignete Ebene (also, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$) wählt.

Warum sind Quadriken interessant

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren:

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen).

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen,

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen;

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen:

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen: Mehrdimensionale Tailor-Reihe (Ana II)

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen: Mehrdimensionale Tailor-Reihe (Ana II)

Satz (Tailorentwicklung, Ana II)

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen: Mehrdimensionale Tailor-Reihe (Ana II)

Satz (Tailorentwicklung, Ana II) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion*

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen: Mehrdimensionale Tailor-Reihe (Ana II)

Satz (Tailorentwicklung, Ana II) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (z.B. die* $\underbrace{\textit{dritte partielle Ableitungen}}_{\textit{mehrdimensionale verallgemeinerung von Ableitung; wird in Ana II erklärt}}$ *existieren und sind stetig).*

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen: Mehrdimensionale Tailor-Reihe (Ana II)

Satz (Tailorentwicklung, Ana II) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (z.B. die* $\underbrace{\textit{dritte partielle Ableitungen}}_{\textit{mehrdimensionale verallgemeinerung von Ableitung; wird in Ana II erklärt}}$ *existieren und sind stetig). Sei* $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ *ein Punkt.*

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen: Mehrdimensionale Tailor-Reihe (Ana II)

Satz (Tailorentwicklung, Ana II) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (z.B. die* $\underbrace{\mathit{dritte\ partielle\ Ableitungen}}_{\mathit{mehrdimensionale\ verallgemeinerung\ von\ Ableitung;\ wird\ in\ Ana\ II\ erkl\ddot{a}rt}}$ *existieren und sind stetig). Sei $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ ein Punkt. Dann gilt:*

$$f(x) := \underbrace{f(z)}_{a_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) \cdot (x_i - z_i)}_{a^t(x-z)} +$$

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen: Mehrdimensionale Tailor-Reihe (Ana II)

Satz (Tailorentwicklung, Ana II) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (z.B. die* $\underbrace{\textit{dritte partielle Ableitungen}}_{\textit{mehrdimensionale verallgemeinerung von Ableitung; wird in Ana II erklärt}}$ *existieren und sind stetig). Sei $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ ein Punkt. Dann gilt:*

$$f(x) := \underbrace{f(z)}_{a_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) \cdot (x_i - z_i)}_{a^t(x-z)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(z)(x_i - z_i)(x_j - z_j)}_{(x-z)^t A(x-z)}$$

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen: Mehrdimensionale Tailor-Reihe (Ana II)

Satz (Tailorentwicklung, Ana II) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (z.B. die* $\underbrace{\textit{dritte partielle Ableitungen}}_{\textit{mehrdimensionale verallgemeinerung von Ableitung; wird in Ana II erklärt}}$ *existieren und sind stetig). Sei $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ ein Punkt. Dann gilt:*

$$f(x) := \underbrace{f(z)}_{a_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) \cdot (x_i - z_i)}_{a^t(x-z)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(z)(x_i - z_i)(x_j - z_j)}_{(x-z)^t A(x-z)} + \underbrace{Rest(x-z)}_{\text{mit } \frac{Rest(x-z)}{|x-z|^2} \underset{\text{für } x \to z}{\longrightarrow} 0}$$

Also, bis zum $Rest(x - z)$

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen: Mehrdimensionale Tailor-Reihe (Ana II)

Satz (Tailorentwicklung, Ana II) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (z.B. die* $\underbrace{\textit{dritte partielle Ableitungen}}_{\textit{mehrdimensionale verallgemeinerung von Ableitung; wird in Ana II erklärt}}$ *existieren und sind stetig). Sei $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ ein Punkt. Dann gilt:*

$$f(x) := \underbrace{f(z)}_{a_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) \cdot (x_i - z_i)}_{a^t(x-z)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(z)(x_i - z_i)(x_j - z_j)}_{(x-z)^t A(x-z)} + \underbrace{Rest(x-z)}_{mit\ \frac{Rest(x-z)}{|x-z|^2}\ \text{für}\ x \to z \longrightarrow 0}$$

Also, bis zum $Rest(x - z)$ (das in der nähe von z klein ist),

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen: Mehrdimensionale Tailor-Reihe (Ana II)

Satz (Tailorentwicklung, Ana II) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (z.B. die* $\underbrace{\textit{dritte partielle Ableitungen}}_{\textit{mehrdimensionale verallgemeinerung von Ableitung; wird in Ana II erklärt}}$ *existieren und sind stetig). Sei $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ ein Punkt. Dann gilt:*

$$f(x) := \underbrace{f(z)}_{a_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) \cdot (x_i - z_i)}_{a^t(x-z)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(z)(x_i - z_i)(x_j - z_j)}_{(x-z)^t A(x-z)} + \underbrace{Rest(x-z)}_{\text{mit } \frac{Rest(x-z)}{|x-z|^2} \xrightarrow{\text{für } x \to z} 0}$$

Also, bis zum $Rest(x - z)$ (das in der nähe von z klein ist), ist jede Funktion eine quadratische Funktion von $y := x - z$

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen: Mehrdimensionale Tailor-Reihe (Ana II)

Satz (Tailorentwicklung, Ana II) *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (z.B. die* $\underbrace{\textit{dritte partielle Ableitungen}}_{\textit{mehrdimensionale verallgemeinerung von Ableitung; wird in Ana II erklärt}}$ *existieren und sind stetig). Sei $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ ein Punkt. Dann gilt:*

$$f(x) := \underbrace{f(z)}_{a_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) \cdot (x_i - z_i)}_{a^t(x-z)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(z)(x_i - z_i)(x_j - z_j)}_{(x-z)^t A(x-z)} + \underbrace{Rest(x - z)}_{\text{mit } \frac{Rest(x-z)}{|x-z|^2} \xrightarrow{\text{für } x \to z} 0}$$

Also, bis zum $Rest(x - z)$ (das in der nähe von z klein ist), ist jede Funktion eine quadratische Funktion von $y := x - z$ mit $a_0 = f(z)$, $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(z)$

Warum sind Quadriken interessant

1. Vor 100 Jahren: Nach Kepler'sche Gesetze sind die Bahnkurven von astronomischen Objekten Quadriken (z.B. Planetenorbiten sind Ellipsen). Um die Koordinaten seines Schiffs (im See) auszurechnen, kann Kapitän nur astronomische Objekten (+ präzise Uhr) benutzen; die Geometrie von Quadriken spielte deswegen große Rolle in Ausbildung der Kapitäne.
2. In Analysis von Funktionen von mehreren Variablen: Mehrdimensionale Tailor-Reihe (Ana II)

Satz (Tailorentwicklung, Ana II) *Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine glatte Funktion (z.B. die* $\underbrace{\textit{dritte partielle Ableitungen}}_{\textit{mehrdimensionale verallgemeinerung von Ableitung; wird in Ana II erklärt}}$ *existieren und sind stetig). Sei $z=\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_n\end{pmatrix}$ ein Punkt. Dann gilt:*

$$f(x) := \underbrace{f(z)}_{a_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\cdot(x_i-z_i)}_{a^t(x-z)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(z)(x_i-z_i)(x_j-z_j)}_{(x-z)^tA(x-z)} + \underbrace{Rest(x-z)}_{\text{mit } \frac{Rest(x-z)}{|x-z|^2}\ \underset{\longrightarrow}{\text{für } x\to z}\ 0}$$

Also, bis zum $Rest(x-z)$ (das in der nähe von z klein ist), ist jede Funktion eine quadratische Funktion von $y:=x-z$ mit $a_0=f(z)$, $a_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)$ und $A_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$.

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \longrightarrow V$ der Form

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \longrightarrow V$ der Form

$$(*) \qquad F(v) = T_b \circ f(v)$$

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \longrightarrow V$ der Form

$(*) \qquad F(v) = T_b \circ f(v) := f(v) + b$

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \longrightarrow V$ der Form

$(*) \qquad F(v) = T_b \circ f(v) := f(v) + b,$

wobei $f : V \longrightarrow V$ ein bjektiver Endomorohismus von V ist

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \to V$ der Form

$(*) \qquad F(v) = T_b \circ f(v) := f(v) + b,$

wobei $f : V \to V$ ein bjektiver Endomorohismus von V ist.

Bsp.

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \to V$ der Form

$(*)\qquad F(v) = T_b \circ f(v) := f(v) + b,$

wobei $f : V \to V$ ein bjektiver Endomorohismus von V ist.

Bsp. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \to V$ der Form

$$(*) \qquad F(v) = T_b \circ f(v) := f(v) + b,$$

wobei $f : V \to V$ ein bjektiver Endomorohismus von V ist.

Bsp. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Dann ist jede Isometrie ein affiner Isomorphismus

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \to V$ der Form

$(*) \qquad F(v) = T_b \circ f(v) := f(v) + b,$

wobei $f : V \to V$ ein bjektiver Endomorohismus von V ist.

Bsp. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Dann ist jede Isometrie ein affiner Isomorphismus. Tatsächlich, nach Satz 68 hat jede Isometrie die Form $(*)$

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \to V$ der Form
$(*) \qquad F(v) = T_b \circ f(v) := f(v) + b,$
wobei $f : V \to V$ ein bjektiver Endomorohismus von V ist.

Bsp. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Dann ist jede Isometrie ein affiner Isomorphismus. Tatsächlich, nach Satz 68 hat jede Isometrie die Form $(*)$, wobei f eine orthogonale Abbildung ist

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \to V$ der Form

$(*) \qquad F(v) = T_b \circ f(v) := f(v) + b,$

wobei $f : V \to V$ ein bjektiver Endomorohismus von V ist.

Bsp. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Dann ist jede Isometrie ein affiner Isomorphismus. Tatsächlich, nach Satz 68 hat jede Isometrie die Form $(*)$, wobei f eine orthogonale Abbildung ist.

Lemma 39 Es gilt:

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \to V$ der Form

$(*) \qquad F(v) = T_b \circ f(v) := f(v) + b,$

wobei $f : V \to V$ ein bjektiver Endomorohismus von V ist.

Bsp. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Dann ist jede Isometrie ein affiner Isomorphismus. Tatsächlich, nach Satz 68 hat jede Isometrie die Form $(*)$, wobei f eine orthogonale Abbildung ist.

Lemma 39 Es gilt:

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \to V$ der Form

$(*)\qquad F(v) = T_b \circ f(v) := f(v) + b,$

wobei $f : V \to V$ ein bjektiver Endomorohismus von V ist.

Bsp. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Dann ist jede Isometrie ein affiner Isomorphismus. Tatsächlich, nach Satz 68 hat jede Isometrie die Form $(*)$, wobei f eine orthogonale Abbildung ist.

Lemma 39 Es gilt:

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.

(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Affine Isomorphismen

Def. 60 Sei V ein Vektorraum. Ein affiner Isomorpismus ist eine Abbildung $F : V \to V$ der Form
(∗) $\qquad F(v) = T_b \circ f(v) := f(v) + b,$
wobei $f : V \to V$ ein bjektiver Endomorohismus von V ist.

Bsp. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Dann ist jede Isometrie ein affiner Isomorphismus. Tatsächlich, nach Satz 68 hat jede Isometrie die Form (∗), wobei f eine orthogonale Abbildung ist.

Lemma 39 Es gilt:

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.

(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Bemerkung. In LAAG II wird bewiesen, dass affine Isomophismen die Bijektionen sind, die Geraden in Geraden überführen.

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a)

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.

(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.

(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.

(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist.
F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.

(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist.
F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$.

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.

(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist. F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist.
F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.
(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.

(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist.
F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.
(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen,

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist.
F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.
(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist. F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.
(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i)

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist.
F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.
(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Z.z.: Die Verkettung $F_{f,b} \circ F_{g,a}$

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist.
F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.
(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Z.z.: Die Verkettung $F_{f,b} \circ F_{g,a}$, wobei
$F_{f,b}(v) := T_b \circ f(v) = f(v) + b$

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist.
F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.
(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Z.z.: Die Verkettung $F_{f,b} \circ F_{g,a}$, wobei $F_{f,b}(v) := T_b \circ f(v) = f(v) + b$ und $F_{g,a}(v) := T_a \circ g(v) = g(v) + a$ sind

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.

(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist.
F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.
(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Z.z.: Die Verkettung $F_{f,b} \circ F_{g,a}$, wobei
$F_{f,b}(v) := T_b \circ f(v) = f(v) + b$ und $F_{g,a}(v) := T_a \circ g(v) = g(v) + a$ sind, auch ein affiner Isomorphismus ist

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.

(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist. F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.

(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.

(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.

(i) Z.z.: Die Verkettung $F_{f,b} \circ F_{g,a}$, wobei $F_{f,b}(v) := T_b \circ f(v) = f(v) + b$ und $F_{g,a}(v) := T_a \circ g(v) = g(v) + a$ sind, auch ein affiner Isomorphismus ist.

$$F_{f,b} \circ F_{g,a}(v) = f\left(F_{g,a}(v)\right) + b = f\left(g(v) + a\right) + b \overset{\text{Linearität}}{=} \underbrace{f \circ g}_{f'}(v) + \underbrace{f(a) + b}_{b'} = F_{f',b'}.$$

(i) Z.z.: Die Umkehrabbildung ist auch ein affiner Isomorphismus

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist. F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.

(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.

(i) Z.z.: Die Verkettung $F_{f,b} \circ F_{g,a}$, wobei $F_{f,b}(v) := T_b \circ f(v) = f(v) + b$ und $F_{g,a}(v) := T_a \circ g(v) = g(v) + a$ sind, auch ein affiner Isomorphismus ist.

$$F_{f,b} \circ F_{g,a}(v) = f\left(F_{g,a}(v)\right) + b = f\left(g(v) + a\right) + b \overset{\text{Linearität}}{=} \underbrace{f \circ g}_{f'}(v) + \underbrace{f(a) + b}_{b'} = F_{f',b'}.$$

(i) Z.z.: Die Umkehrabbildung ist auch ein affiner Isomorphismus. Es genugend einen affinen Isomorphismus zu konstruieren, der die Umkehrabbildung ist

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.

(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist. F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.

(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.

(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.

(i) Z.z.: Die Verkettung $F_{f,b} \circ F_{g,a}$, wobei $F_{f,b}(v) := T_b \circ f(v) = f(v) + b$ und $F_{g,a}(v) := T_a \circ g(v) = g(v) + a$ sind, auch ein affiner Isomorphismus ist.

$$F_{f,b} \circ F_{g,a}(v) = f\left(F_{g,a}(v)\right) + b = f\left(g(v) + a\right) + b \overset{\text{Linearität}}{=} \underbrace{f \circ g}_{f'}(v) + \underbrace{f(a) + b}_{b'} = F_{f',b'}.$$

(i) Z.z.: Die Umkehrabbildung ist auch ein affiner Isomorphismus. Es genugend einen affinen Isomorphismus zu konstruieren, der die Umkehrabbildung ist.

$$F_{f^{(-1)},-f^{(-1)}(a)} \circ F_{f,a}$$

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist.
F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.
(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Z.z.: Die Verkettung $F_{f,b} \circ F_{g,a}$, wobei
$F_{f,b}(v) := T_b \circ f(v) = f(v) + b$ und $F_{g,a}(v) := T_a \circ g(v) = g(v) + a$
sind, auch ein affiner Isomorphismus ist.

$$F_{f,b} \circ F_{g,a}(v) = f\left(F_{g,a}(v)\right) + b = f\left(g(v) + a\right) + b \overset{\text{Linearität}}{=} \underbrace{f \circ g}_{f'}(v) + \underbrace{f(a) + b}_{b'} = F_{f',b'}.$$

(i) Z.z.: Die Umkehrabbildung ist auch ein affiner Isomorphismus. Es genugend einen affinen Isomorphismus zu konstruieren, der die Umkehrabbildung ist.

$$F_{f^{(-1)},-f^{(-1)}(a)} \circ F_{f,a} \overset{\text{Wie in (i)}}{=}$$

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist. F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.

(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.

(i) Z.z.: Die Verkettung $F_{f,b} \circ F_{g,a}$, wobei $F_{f,b}(v) := T_b \circ f(v) = f(v) + b$ und $F_{g,a}(v) := T_a \circ g(v) = g(v) + a$ sind, auch ein affiner Isomorphismus ist.

$$F_{f,b} \circ F_{g,a}(v) = f\left(F_{g,a}(v)\right) + b = f\left(g(v) + a\right) + b \overset{\text{Linearität}}{=} \underbrace{f \circ g}_{f'}(v) + \underbrace{f(a) + b}_{b'} = F_{f',b'}.$$

(i) Z.z.: Die Umkehrabbildung ist auch ein affiner Isomorphismus. Es genugend einen affinen Isomorphismus zu konstruieren, der die Umkehrabbildung ist.

$$F_{f^{(-1)},-f^{(-1)}(a)} \circ F_{f,a} \overset{\text{Wie in (i)}}{=} \underbrace{f^{(-1)} \circ f}_{Id}(v) + \underbrace{f^{(-1)}(a) - f^{(-1)}(a)}_{\vec{0}}$$

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist.
F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.
(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Z.z.: Die Verkettung $F_{f,b} \circ F_{g,a}$, wobei
$F_{f,b}(v) := T_b \circ f(v) = f(v) + b$ und $F_{g,a}(v) := T_a \circ g(v) = g(v) + a$ sind, auch ein affiner Isomorphismus ist.

$$F_{f,b} \circ F_{g,a}(v) = f\left(F_{g,a}(v)\right) + b = f\left(g(v) + a\right) + b \overset{\text{Linearität}}{=} \underbrace{f \circ g}_{f'}(v) + \underbrace{f(a) + b}_{b'} = F_{f',b'}.$$

(i) Z.z.: Die Umkehrabbildung ist auch ein affiner Isomorphismus. Es genugend einen affinen Isomorphismus zu konstruieren, der die Umkehrabbildung ist.

$$F_{f^{(-1)},-f^{(-1)}(a)} \circ F_{f,a} \overset{\text{Wie in (i)}}{=} \underbrace{f^{(-1)} \circ f}_{Id}(v) + \underbrace{f^{(-1)}(a) - f^{(-1)}(a)}_{\vec{0}} = Id$$

(a) Jeder affine Isomorphismus ist eine Bijektion.
(b) Affine Isomorphismen von V bilden eine Gruppe bzgl. der Verkettung.

Beweis. (a) F ist surjektiv: für jedes $w \in V$ die Gleichung $F(x) = w$ ist die Gleichung $f(x) = w - b$, und ist lösbar, weil f surjektiv ist. F ist injektiv: ist $F(x) = F(y)$, so ist $f(x) + b = f(y) + b$. Dann ist $f(x) = f(y)$ und deswegen $x = y$, weil f injektiv ist.

(b) Nach Satz 3 ist die Menge von allen Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass die Menge von affinen Isomorphismen abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.

(i) Z.z.: Die Verkettung $F_{f,b} \circ F_{g,a}$, wobei $F_{f,b}(v) := T_b \circ f(v) = f(v) + b$ und $F_{g,a}(v) := T_a \circ g(v) = g(v) + a$ sind, auch ein affiner Isomorphismus ist.

$$F_{f,b} \circ F_{g,a}(v) = f\left(F_{g,a}(v)\right) + b = f\left(g(v) + a\right) + b \overset{\text{Linearität}}{=} \underbrace{f \circ g}_{f'}(v) + \underbrace{f(a) + b}_{b'} = F_{f',b'}.$$

(i) Z.z.: Die Umkehrabbildung ist auch ein affiner Isomorphismus. Es genugend einen affinen Isomorphismus zu konstruieren, der die Umkehrabbildung ist.

$$F_{f^{(-1)},-f^{(-1)}(a)} \circ F_{f,a} \overset{\text{Wie in (i)}}{=} \underbrace{f^{(-1)} \circ f}_{Id}(v) + \underbrace{f^{(-1)}(a) - f^{(-1)}(a)}_{\vec{0}} = Id, \quad \square$$

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus,

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$)

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist $Bild_F(Q)$ einer Quadrik Q?*

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist* $Bild_F(Q)$ *einer Quadrik* Q*?*
Anwort (Lemma 40) *Es ist eine Quadrik.*

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist* $Bild_F(Q)$ *einer Quadrik* Q*?*
Anwort (Lemma 40) *Es ist eine Quadrik.*
Beweis. Nach Lemma 39 ist die Umkehrabbildung F^{-1} auch ein affine Isomophismus

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist* $Bild_F(Q)$ *einer Quadrik* Q*?*
Anwort (Lemma 40) *Es ist eine Quadrik.*
Beweis. Nach Lemma 39 ist die Umkehrabbildung F^{-1} auch ein affine Isomophismus, und hat deswegen die Form
$F^{-1}(x) = f_B(x) + b := Bx + b \qquad (*)$

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist $Bild_F(Q)$ einer Quadrik Q?*
Anwort (Lemma 40) *Es ist eine Quadrik.*
Beweis. Nach Lemma 39 ist die Umkehrabbildung F^{-1} auch ein affine Isomophismus, und hat deswegen die Form
$F^{-1}(x) = f_B(x) + b := Bx + b \qquad (*)$
für einen $b \in \mathbb{R}^n$ und eine nichtausgeartete $n \times n$ Matrix B

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist* $Bild_F(Q)$ *einer Quadrik* Q*?*
Anwort (Lemma 40) *Es ist eine Quadrik.*
Beweis. Nach Lemma 39 ist die Umkehrabbildung F^{-1} auch ein affine Isomophismus, und hat deswegen die Form
$F^{-1}(x) = f_B(x) + b := Bx + b \qquad (*)$
für einen $b \in \mathbb{R}^n$ und eine nichtausgeartete $n \times n$ Matrix B. Ist
$x \in Bilf_F(Q)$

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist $Bild_F(Q)$ einer Quadrik Q?*
Anwort (Lemma 40) *Es ist eine Quadrik.*
Beweis. Nach Lemma 39 ist die Umkehrabbildung F^{-1} auch ein affine Isomophismus, und hat deswegen die Form
$F^{-1}(x) = f_B(x) + b := Bx + b \qquad (*)$
für einen $b \in \mathbb{R}^n$ und eine nichtausgeartete $n \times n$ Matrix B. Ist $x \in Bilf_F(Q)$, so ist $F^{-1}(x) \in Q$

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist $Bild_F(Q)$ einer Quadrik Q?*
Anwort (Lemma 40) *Es ist eine Quadrik.*
Beweis. Nach Lemma 39 ist die Umkehrabbildung F^{-1} auch ein affine Isomophismus, und hat deswegen die Form
$F^{-1}(x) = f_B(x) + b := Bx + b \qquad (*)$
für einen $b \in \mathbb{R}^n$ und eine nichtausgeartete $n \times n$ Matrix B. Ist $x \in Bilf_F(Q)$, so ist $F^{-1}(x) \in Q$, also

$$\underbrace{\left((b_1 \ \cdots \ b_n) + (x_1 \ \cdots \ x_n)B^t\right)}_{(F^{-1}(x))^t=(Bx+b)^t} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \underbrace{\left(B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right)}_{F^{-1}(x)=Bx+b} +$$

$$(a_1 \ \cdots \ a_n) \underbrace{\left(B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right)}_{F^{-1}(x)=Bx+b} + a_0 = 0,$$

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist* $Bild_F(Q)$ *einer Quadrik* Q*?*
Anwort (Lemma 40) *Es ist eine Quadrik.*
Beweis. Nach Lemma 39 ist die Umkehrabbildung F^{-1} auch ein affine Isomophismus, und hat deswegen die Form
$F^{-1}(x) = f_B(x) + b := Bx + b$ $\qquad (*)$
für einen $b \in \mathbb{R}^n$ und eine nichtausgeartete $n \times n$ Matrix B. Ist $x \in Bilf_F(Q)$, so ist $F^{-1}(x) \in Q$, also

$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} B^t \right)}_{(F^{-1}(x))^t = (Bx+b)^t} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \underbrace{\left(B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right)}_{F^{-1}(x) = Bx+b} +$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \underbrace{\left(B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right)}_{F^{-1}(x) = Bx+b} + a_0 = 0,$$ und deswegen

$$x^t \underbrace{B^t A B}_{A'} x$$

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist* $\mathit{Bild}_F(Q)$ *einer Quadrik* Q*?*
Anwort (Lemma 40) *Es ist eine Quadrik.*
Beweis. Nach Lemma 39 ist die Umkehrabbildung F^{-1} auch ein affine Isomophismus, und hat deswegen die Form
$F^{-1}(x) = f_B(x) + b := Bx + b$ $\qquad (*)$
für einen $b \in \mathbb{R}^n$ und eine nichtausgeartete $n \times n$ Matrix B. Ist $x \in \mathit{Bilf}_F(Q)$, so ist $F^{-1}(x) \in Q$, also

$$\underbrace{\left((b_1 \ \cdots \ b_n) + (x_1 \ \cdots \ x_n)B^t\right)}_{(F^{-1}(x))^t=(Bx+b)^t} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \underbrace{\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)}_{F^{-1}(x)=Bx+b} +$$

$$(a_1 \ \cdots \ a_n) \underbrace{\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)}_{F^{-1}(x)=Bx+b} + a_0 = 0,$$ und deswegen

$$x^t \underbrace{B^tAB}_{A'} x + \underbrace{\left(2B^tAb + B^ta\right)^t}_{a'} x$$

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist $Bild_F(Q)$ einer Quadrik Q?*
Anwort (Lemma 40) *Es ist eine Quadrik.*
Beweis. Nach Lemma 39 ist die Umkehrabbildung F^{-1} auch ein affine Isomophismus, und hat deswegen die Form
$F^{-1}(x) = f_B(x) + b := Bx + b \qquad (*)$
für einen $b \in \mathbb{R}^n$ und eine nichtausgeartete $n \times n$ Matrix B. Ist $x \in Bilf_F(Q)$, so ist $F^{-1}(x) \in Q$, also

$$\underbrace{\left((b_1 \ \cdots \ b_n) + (x_1 \ \cdots \ x_n)B^t\right)}_{(F^{-1}(x))^t=(Bx+b)^t} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \underbrace{\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)}_{F^{-1}(x)=Bx+b} +$$

$$(a_1 \ \cdots \ a_n) \underbrace{\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)}_{F^{-1}(x)=Bx+b} + a_0 = 0,$$ und deswegen

$$x^t \underbrace{B^t A B}_{A'} x + \underbrace{\left(2B^t A b + B^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t b + b^t A b + a_0}_{a'_0} = 0$$

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist $Bild_F(Q)$ einer Quadrik Q?*
Anwort (Lemma 40) *Es ist eine Quadrik.*
Beweis. Nach Lemma 39 ist die Umkehrabbildung F^{-1} auch ein affine Isomophismus, und hat deswegen die Form
$F^{-1}(x) = f_B(x) + b := Bx + b \qquad (*)$
für einen $b \in \mathbb{R}^n$ und eine nichtausgeartete $n \times n$ Matrix B. Ist $x \in Bilf_F(Q)$, so ist $F^{-1}(x) \in Q$, also

$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} B^t\right)}_{(F^{-1}(x))^t=(Bx+b)^t} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \underbrace{\left(B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right)}_{F^{-1}(x)=Bx+b} +$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \underbrace{\left(B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right)}_{F^{-1}(x)=Bx+b} + a_0 = 0,$$ und deswegen

$$x^t \underbrace{B^t A B}_{A'} x + \underbrace{\left(2B^t A b + B^t a\right)}_{a'}{}^t x + \underbrace{a^t b + b^t A b + a_0}_{a'_0} = 0 \qquad (**)$$

Was machen affine Isomorphismen mit Quadriken?

Sei F eine affine Isomorphismus, sei Q eine Quadrik (in $\mathbb{R}^n$).
Frage *Was ist* $Bild_F(Q)$ *einer Quadrik* Q*?*
Anwort (Lemma 40) *Es ist eine Quadrik.*
Beweis. Nach Lemma 39 ist die Umkehrabbildung F^{-1} auch ein affine Isomophismus, und hat deswegen die Form
$F^{-1}(x) = f_B(x) + b := Bx + b \qquad (*)$
für einen $b \in \mathbb{R}^n$ und eine nichtausgeartete $n \times n$ Matrix B. Ist $x \in Bilf_F(Q)$, so ist $F^{-1}(x) \in Q$, also

$$\underbrace{\left((b_1 \ \cdots \ b_n) + (x_1 \ \cdots \ x_n)B^t\right)}_{(F^{-1}(x))^t = (Bx+b)^t} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \underbrace{\left(B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)}_{F^{-1}(x) = Bx+b} +$$

$$(a_1 \ \cdots \ a_n) \underbrace{\left(B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)}_{F^{-1}(x) = Bx+b} + a_0 = 0,$$ und deswegen

$$x^t \underbrace{B^t A B}_{A'} x + \underbrace{\left(2B^t A b + B^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t b + b^t A b + a_0}_{a'_0} = 0 \qquad (**),$$ $\square$

Bemerkung *Dies ist die Formel für die Gleichung der Quadrik* $Bild_F(Q)$.

Formel $(**)$ für erweiterte Matirzen

$$Erw_Q = \begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_1/2 \\ \vdots \\ a_n/2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1/2 & \cdots & a_n/2 \end{matrix}} & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{B} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis: Auszurechnen.

Satz 69

Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen)

Satz 69 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie*

Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen)

Satz 69 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

Satz 69 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen)

Satz 69 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +$$

Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen)

Satz 69 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \; a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen)

Satz 69 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \ a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

überführen sodass höchstens ein von $a_{k+1}, \ldots, a_n, a_0$ *ungleich* 0 *ist.*

Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen)

Satz 69 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

$$(x_1 \; \cdots \; x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \; a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

überführen sodass höchstens ein von $a_{k+1}, ..., a_n, a_0$ ungleich 0 ist.

Satz 69' Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der erweiterten Matrix rechts überführen. (Höchstens ein von $a_{k+1}, ..., a_n, a_0$ ist ungleich 0.)

$$Erw_Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & \lambda_k & & & & 0 \\ & & & 0 & & & \frac{a_{k+1}}{2} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & \frac{a_n}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{k+1}}{2} & \cdots & \frac{a_n}{2} & a_0 \end{pmatrix}$$

Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen)

Satz 69 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \ a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

überführen sodass höchstens ein von $a_{k+1}, \ldots, a_n, a_0$ ungleich 0 ist.

Satz 69' Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der erweiterten Matrix rechts überführen. (Höchstens ein von $a_{k+1}, \ldots, a_n, a_0$ ist ungleich 0.)

$$Erw_Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & \lambda_k & & & & 0 \\ & & & 0 & & & \frac{a_{k+1}}{2} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & \frac{a_n}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{k+1}}{2} & \cdots & \frac{a_n}{2} & a_0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen)

Satz 69 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

$$(x_1 \; \cdots \; x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \; a_{k+1} \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

überführen sodass höchstens ein von $a_{k+1}, ..., a_n, a_0$ *ungleich* 0 *ist.*

Satz 69' Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der erweiterten Matrix rechts überführen. (Höchstens ein von $a_{k+1}, ..., a_n, a_0$ ist ungleich 0.)

$$Erw_Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & \lambda_k & & & & 0 \\ & & & 0 & & & \frac{a_{k+1}}{2} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & \frac{a_n}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{k+1}}{2} & \cdots & \frac{a_n}{2} & a_0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung *Da die Gleichung* $f(x) = 0$ *und* $\lambda \cdot f(x) = 0$,

Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen)

Satz 69 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

$$(x_1 \ \cdots \ x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \ a_{k+1} \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

überführen sodass höchstens ein von $a_{k+1}, ..., a_n, a_0$ ungleich 0 ist.

Satz 69' Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der erweiterten Matrix rechts überführen. (Höchstens ein von $a_{k+1}, ..., a_n, a_0$ ist ungleich 0.)

$$Erw_Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & \lambda_k & & & & 0 \\ & & & 0 & & & \frac{a_{k+1}}{2} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & \frac{a_n}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{k+1}}{2} & \cdots & \frac{a_n}{2} & a_0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung *Da die Gleichung $f(x) = 0$ und $\lambda \cdot f(x) = 0$, wobei $\lambda \neq 0$, gleiche Lösungsmenge hat,*

Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen)

Satz 69 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \; a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

überführen sodass höchstens ein von $a_{k+1}, \ldots, a_n, a_0$ ungleich 0 ist.

Satz 69' Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der erweiterten Matrix rechts überführen. (Höchstens ein von $a_{k+1}, \ldots, a_n, a_0$ ist ungleich 0.)

$$Erw_Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & \lambda_k & & & & 0 \\ & & & 0 & & & \frac{a_{k+1}}{2} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & \frac{a_n}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{k+1}}{2} & \cdots & \frac{a_n}{2} & a_0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung *Da die Gleichung $f(x) = 0$ und $\lambda \cdot f(x) = 0$, wobei $\lambda \neq 0$, gleiche Lösungsmenge hat, kann man noch eine Zahl,*

Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen)

Satz 69 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der Gleichung*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k}\ a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

überführen sodass höchstens ein von $a_{k+1}, \ldots, a_n, a_0$ ungleich 0 ist.

Satz 69' Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer Isometrie in eine Quadrik mit der erweiterten Matrix rechts überführen. (Höchstens ein von $a_{k+1}, \ldots, a_n, a_0$ ist ungleich 0.)

$$Erw_Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & \lambda_k & & & & 0 \\ & & & 0 & & & \frac{a_{k+1}}{2} \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & \frac{a_n}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{k+1}}{2} & \cdots & \frac{a_n}{2} & a_0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung *Da die Gleichung $f(x) = 0$ und $\lambda \cdot f(x) = 0$, wobei $\lambda \neq 0$, gleiche Lösungsmenge hat, kann man noch eine Zahl, z.B. λ_1 gleich 1 setzen*

Folgerung

Folgerung *Bis zum einer Isometrie,*

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt)*

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$.

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$.

Beweis der Folgerung:

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$.

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$*.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$*.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$*.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \Longleftrightarrow \lambda x^2 + \mu y^2 = -c$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$*.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \Longleftrightarrow \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \left\{ \right.$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ & \end{cases}$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \Longleftrightarrow \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \\ & \end{cases}$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$.

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \Longleftrightarrow \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \Longleftrightarrow \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \Longleftrightarrow \lambda x^2 - \mu y^2 = -c$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$*.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \Bigg\{$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ & \\ & \end{cases}$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$.

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade} \end{cases}$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \Longleftrightarrow \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \Longleftrightarrow \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 = -c \quad \text{entspricht}$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$*.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \Longleftrightarrow \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \Longleftrightarrow \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \Longleftrightarrow \lambda x^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ & \end{cases}$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \end{cases}$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 = -c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Zwei parallele Gerade}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + (0\quad c)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 = -c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Zwei parallele Gerade}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + (0 \quad c)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 0 \iff$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Zwei parallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (0 \quad c)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda x^2 = -cy \quad \text{entspricht}$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Zwei parallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (0 \quad c)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda x^2 = -cy \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{eine Gerade} \end{cases}$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$.

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Zwei parallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + (0\quad c)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 0 \iff \lambda x^2 = -cy \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{eine Gerade} \\ c \neq 0 & \text{Parabel} \end{cases}$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt}\\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel}\\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 = -c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt}\\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Zwei parallele Gerade}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + (0\quad c)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0 \iff \lambda x^2 = -cy \quad \text{entspricht} \begin{cases} c = 0 & \text{eine Gerade}\\ c \neq 0 & \text{Parabel}\end{cases}$$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 = -c \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Zwei parallele Gerade} \end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (0\quad c)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda x^2 = -cy \quad \text{entspricht} \quad \begin{cases} c = 0 & \text{eine Gerade} \\ c \neq 0 & \text{Parabel} \end{cases} \qquad \square$$

Wiederholung (Vorlesung 23, Satz 67)

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$.

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+c=0 \iff \lambda x^2+\mu y^2=-c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c=0 & \text{Punkt} \\ c>0 & \varnothing \\ c<0 & \text{Ellipse}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+c=0 \iff \lambda x^2-\mu y^2=-c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c\neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c=0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+c=0 \iff \lambda x^2=-c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c=0 & \text{Punkt} \\ c>0 & \varnothing \\ c<0 & \text{Zwei parallele Gerade}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(0\quad c)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \iff \lambda x^2=-cy \quad \text{entspricht} \begin{cases} c=0 & \text{eine Gerade} \\ c\neq 0 & \text{Parabel}\end{cases}$$

$\square$

Wiederholung (Vorlesung 23, Satz 67) *Jede Isometrie von* $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{standard})$

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder $\varnothing$.*

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 + \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Ellipse}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 - \mu y^2 = -c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c \neq 0 & \text{Hyperbel} \\ c = 0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + c = 0 \iff \lambda x^2 = -c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c = 0 & \text{Punkt} \\ c > 0 & \varnothing \\ c < 0 & \text{Zwei parallele Gerade}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + (0\quad c)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 0 \iff \lambda x^2 = -cy \quad \text{entspricht} \begin{cases} c = 0 & \text{eine Gerade} \\ c \neq 0 & \text{Parabel}\end{cases}$$

$\square$

Wiederholung (Vorlesung 23, Satz 67) *Jede Isometrie von $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{standard})$ kann man in der Form $x \mapsto b + Ox$ darstellen, wobei O orthogonal ist.*

Folgerung *Bis zum einer Isometrie, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *(mit Standard-Skalarprodukt) Ellipse, Hyperbel, Parabel, Punkt, Gerade, Zwei Geraden, oder* $\varnothing$.

Beweis der Folgerung: Nach Satz 69 sieht die Gleichung einer Quadrik nach einer geeigneten Isometrie wie folgt aus ($\lambda > 0$, $\mu > 0$):

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+c=0 \iff \lambda x^2+\mu y^2=-c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c=0 & \text{Punkt}\\ c>0 & \varnothing \\ c<0 & \text{Ellipse}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+c=0 \iff \lambda x^2-\mu y^2=-c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c\neq 0 & \text{Hyperbel}\\ c=0 & \text{Zwei nichtparallele Gerade}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+c=0 \iff \lambda x^2=-c \quad \text{entspricht} \begin{cases} c=0 & \text{Punkt}\\ c>0 & \varnothing \\ c<0 & \text{Zwei parallele Gerade}\end{cases}$$

$$(x\ y)\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+(0\quad c)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0 \iff \lambda x^2=-cy \quad \text{entspricht} \begin{cases} c=0 & \text{eine Gerade}\\ c\neq 0 & \text{Parabel}\end{cases} \qquad \square$$

Wiederholung (Vorlesung 23, Satz 67) *Jede Isometrie von* $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle_{standard})$ *kann man in der Form* $x \mapsto b + Ox$ *darstellen, wobei* O *orthogonal ist. Jede Abbildung der Form ist eine Isometrie.*

Satz 70

Satz 70 *Man kann jede Quadrik*

Satz 70 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe eines affinen Isomorphismus*

Satz 70 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe eines affinen Isomorphismus in eine Quadrik der Form*

Satz 70 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe eines affinen Isomorphismus in eine Quadrik der Form*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \; a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

überführen,

Satz 70 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe eines affinen Isomorphismus in eine Quadrik der Form*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k}\ a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

überführen, sodass höchstens ein von $a_{k+1}, \dots, a_n, a_0$ ungleich 0 ist

Satz 70 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe eines affinen Isomorphismus in eine Quadrik der Form*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \ a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

überführen, sodass höchstens ein von $a_{k+1}, \ldots, a_n, a_0$ ungleich 0 ist (man kann es sogar ± 1 machen).

Satz 70 *Man kann jede Quadrik mit Hilfe eines affinen Isomorphismus in eine Quadrik der Form*

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \ a_{k+1} \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

überführen, sodass höchstens ein von $a_{k+1}, \ldots, a_n, a_0$ ungleich 0 ist (man kann es sogar ± 1 machen).

Man kann jede Quadrik mit Hilfe einer affinen Abbildung in eine Quadrik mit der rechst stehenden erweiterten Matrix überführen (Wobei höchstens ein von $a_{k+1} \ldots a_0$ ungleich 0 ist.)

$$Erw_Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & & & & \vdots \\ & & & -1 & & & & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & -1 & & & & 0 \\ & & & & & & 0 & & & \frac{a_{k+1}}{2} \\ & & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & 0 & \frac{a_n}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{a_{k+1}}{2} & \cdots & \frac{a_n}{2} & a_0 \end{pmatrix}$$

Folgerung

Folgerung *Bis zum einer affinen Abbildung, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ ein Kleis,*

Folgerung *Bis zum einer affinen Abbildung, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *ein Kleis, die Standard-Hyperbel* $x^2 - y^2 = 1$,

Folgerung *Bis zum einer affinen Abbildung, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *ein Kleis, die Standard-Hyperbel* $x^2 - y^2 = 1$, *die Standard-Parabel* $y = x^2$,

Folgerung *Bis zum einer affinen Abbildung, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ ein Kleis, die Standard-Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$, die Standard-Parabel $y = x^2$, Punkt,*

Folgerung *Bis zum einer affinen Abbildung, ist jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ ein Kleis, die Standard-Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$, die Standard-Parabel $y = x^2$, Punkt, Gerade,*

Folgerung *Bis zum einer affinen Abbildung, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *ein Kleis, die Standard-Hyperbel* $x^2 - y^2 = 1$*, die Standard-Parabel* $y = x^2$*, Punkt, Gerade, Zwei Geraden* $[(x - y)(x + y) = 0$

Folgerung *Bis zum einer affinen Abbildung, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *ein Kleis, die Standard-Hyperbel* $x^2 - y^2 = 1$, *die Standard-Parabel* $y = x^2$, *Punkt, Gerade, Zwei Geraden* [$(x - y)(x + y) = 0$ *oder* $x^2 = 1$],

Folgerung *Bis zum einer affinen Abbildung, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *ein Kleis, die Standard-Hyperbel* $x^2 - y^2 = 1$*, die Standard-Parabel* $y = x^2$*, Punkt, Gerade, Zwei Geraden [*$(x-y)(x+y) = 0$ *oder* $x^2 = 1$*], oder* $\varnothing$*.*

Folgerung *Bis zum einer affinen Abbildung, ist jede Quadrik in* $\mathbb{R}^2$ *ein Kleis, die Standard-Hyperbel* $x^2 - y^2 = 1$, *die Standard-Parabel* $y = x^2$, *Punkt, Gerade, Zwei Geraden* *[*$(x-y)(x+y) = 0$ *oder* $x^2 = 1$*], oder* $\varnothing$*.*
(Beweis wie von der Folgerung aus dem Satz 65)

Schema des Beweises von Satz 69:

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)
Beweis.

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)
Beweis. Man betrachte die Isometrie F,

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)
Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox$

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)
Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch
$F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)
Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)
Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist.

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik,

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen,

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a \end{pmatrix}^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist.

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a \end{pmatrix}^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie.

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^tAO}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^tA \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^ta\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^t \underbrace{O^tAO}_{A'} x + \underbrace{a^tO}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik,

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{Id^t A' Id}_{A'} x$$

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^tAO}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^tA\underbrace{b}_{\vec{0}} + O^ta\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^tAO}_{A'} x + \underbrace{a^tO}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{Id^tA'Id}_{A'} x + \underbrace{\left(2Id^tA'b + Id^ta'\right)^t}_{a''} x +$$

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t AO}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t AO}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{Id^t A' Id}_{A'} x + \underbrace{\left(2Id^t A' b + Id^t a'\right)^t}_{a''} x + \underbrace{(a')^t b + a_0}_{a'_0} = 0$$

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{Id^t A' Id}_{A'} x + \underbrace{\left(2Id^t A' b + Id^t a'\right)^t}_{a''} x + \underbrace{(a')^t b + a_0}_{a'_0} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^t A' x +$$

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{Id^t A' Id}_{A'} x + \underbrace{\left(2Id^t A' b + Id^t a'\right)^t}_{a''} x + \underbrace{(a')^t b + a_0}_{a'_0} = 0 \iff x^t A' x + \underbrace{\left(2A' b + (a')^t\right)^t}_{a''} x +$$

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^tA\underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{Id^t A' Id}_{A'} x + \underbrace{\left(2Id^t A' b + Id^t a'\right)^t}_{a''} x + \underbrace{(a')^t b + a_0}_{a'_0} = 0 \iff x^t A' x + \underbrace{\left(2A' b + (a')^t\right)^t}_{a''} x + \underbrace{a^t b + a_0}_{a'_0}$$

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{Id^t A' Id}_{A'} x + \underbrace{\left(2Id^t A' b + Id^t a'\right)^t}_{a''} x + \underbrace{(a')^t b + a_0}_{a'_0} = 0 \iff x^t A' x + \underbrace{\left(2A' b + (a')^t\right)^t}_{a''} x + \underbrace{a^t b + a_0}_{a'_0} = 0.$$

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{Id^t A' Id}_{A'} x + \underbrace{\left(2Id^t A' b + Id^t a'\right)^t}_{a''} x + \underbrace{(a')^t b + a_0}_{a'_0} = 0 \iff x^t A' x + \underbrace{\left(2A' b + (a')^t\right)^t}_{a''} x + \underbrace{a^t b + a_0}_{a'_0} = 0.$$

Da A' wie oben ist,

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^t A \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^t A O}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{Id^t A' Id}_{A'} x + \underbrace{\left(2Id^t A' b + Id^t a'\right)^t}_{a''} x + \underbrace{(a')^t b + a_0}_{a'_0} = 0 \iff x^t A' x + \underbrace{\left(2A' b + (a')^t\right)^t}_{a''} x + \underbrace{a^t b + a_0}_{a'_0} = 0.$$

Da A' wie oben ist, können wir b so wählen,

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^tAO}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^tA\underbrace{b}_{\vec{0}} + O^ta\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t\underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^tAO}_{A'} x + \underbrace{a^tO}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{Id^tA'Id}_{A'} x + \underbrace{\left(2Id^tA'b + Id^ta'\right)^t}_{a''} x + \underbrace{(a')^tb + a_0}_{a'_0} = 0 \iff x^tA'x + \underbrace{\left(2A'b + (a')^t\right)^t}_{a''} x + \underbrace{a^tb + a_0}_{a'_0} = 0.$$

Da A' wie oben ist, können wir b so wählen, dass

$$a'' = (\underbrace{0\cdots0}_{k}\, a_{k+1}\cdots a_n)$$

Schema des Beweises von Satz 69: Wir werden die Gleichung der Quadrik schrittweise verbessern (mit Hilfe von Isometrien)

Beweis. Man betrachte die Isometrie F, sodass F^{-1} durch $F^{-1}(x) = \vec{0} + Ox = Ox$ gegeben ist, wobei O orthogonal ist. Nach Lemma 40 ist $Q_1 := Bild_F(Q)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{O^tAO}_{A'} x + \underbrace{\left(2O^tA \underbrace{b}_{\vec{0}} + O^t a\right)^t}_{a'} x + \underbrace{a^t \underbrace{b}_{\vec{0}} + a_0}_{a_0} = 0 \iff x^t \underbrace{O^tAO}_{A'} x + \underbrace{a^t O}_{(a')^t} x + a_0 = 0 \text{ ist.}$$

Nach Satz 65 kann man O so wählen, dass

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann betrachte den affinen Isomorphismus F_1 sodass F_1^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = b + x$ ist. Er ist auch eine Isometrie. Nach Lemma 40 ist $Bild_{F_1}(Q_1)$ eine Quadrik, deren Gleichung

$$x^t \underbrace{Id^t A' Id}_{A'} x + \underbrace{\left(2Id^t A' b + Id^t a'\right)^t}_{a''} x + \underbrace{(a')^t b + a_0}_{a'_0} = 0 \iff x^t A' x + \underbrace{\left(2A' b + (a')^t\right)^t}_{a''} x + \underbrace{a^t b + a_0}_{a'_0} = 0.$$

Da A' wie oben ist, können wir b so wählen, dass

$a'' = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} a_{k+1} \cdots a_n)$ (für $i \leq k$ setze $b_i = -\frac{a_i}{2\lambda_i}$, sonst $b_i = 0$).

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$,

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist,

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k}

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Existenz:

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Existenz: Mit Gramm-Schmid'schen Verfaren

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Existenz: Mit Gramm-Schmid'schen Verfaren kann man eine

orthonormale Basis $(o_1, ..., o_{k+n})$ finden

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Existenz: Mit Gramm-Schmid'schen Verfaren kann man eine

orthonormale Basis $(o_1, ..., o_{k+n})$ finden sodass o_1 proportional zu

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$$

Existenz: Mit Gramm-Schmid'schen Verfaren kann man eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_{k+n})$ finden sodass o_1 proportional zu $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$ ist.

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Existenz: Mit Gramm-Schmid'schen Verfaren kann man eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_{k+n})$ finden sodass o_1 proportional zu $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ist. Dann ist Matrix O_{n-k} sodass $O_{n-k} e_i = o_i$

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Existenz: Mit Gramm-Schmid'schen Verfaren kann man eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_{k+n})$ finden sodass o_1 proportional zu $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ist. Dann ist Matrix O_{n-k} sodass $O_{n-k} e_i = o_i$ orthogonal

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Existenz: Mit Gramm-Schmid'schen Verfaren kann man eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_{k+n})$ finden sodass o_1 proportional zu $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ist. Dann ist Matrix O_{n-k} sodass $O_{n-k} e_i = o_i$ orthogonal (da die Basis orthonormal ist), und sie überführt ein vielfaches von e_1

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Existenz: Mit Gramm-Schmid'schen Verfaren kann man eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_{k+n})$ finden sodass o_1 proportional zu $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ist. Dann ist Matrix O_{n-k} sodass $O_{n-k} e_i = o_i$
orthogonal (da die Basis orthonormal ist), und sie überführt ein vielfaches von e_1 in einen Vektor, der zu $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ proprtional ist.

Ist $k = n$, oder $(a_{k+1}, ..., a_n) = (0 \cdots 0)$, so sind wir fertig.
Wenn $(a_{k+1}, ..., a_n) \neq (0 \cdots 0)$ ist, betrachte eien $(n-k) \times (n-k)$ orthogonale Matrix O_{n-k} sodass (für ein $\lambda \in \mathbb{R}$) gilt

$$O_{n-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Existenz: Mit Gramm-Schmid'schen Verfaren kann man eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_{k+n})$ finden sodass o_1 proportional zu $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ist. Dann ist Matrix O_{n-k} sodass $O_{n-k} e_i = o_i$
orthogonal (da die Basis orthonormal ist), und sie überführt ein vielfaches von e_1 in einen Vektor, der zu $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ proprtional ist.

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$F_2^{-1}(x) =$

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$$F_2^{-1}(x) = \vec{0} +$$

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$$F_2^{-1}(x) = \vec{0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix}}_{\text{Das ist eine orthgonale Matrix, z.B. } O} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$$F_2^{-1}(x) = \vec{0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix}}_{\text{Das ist eine orthgonale Matrix, z.B. } O} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nach Lemma 40 ist

$Q_2 := Bild_{F_2}(Q_1)$ eine Quadrik

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$$F_2^{-1}(x) = \vec{0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix}}_{\text{Das ist eine orthgonale Matrix, z.B. } O} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nach Lemma 40 ist

$Q_2 := Bild_{F_2}(Q_1)$ eine Quadrik mit der Gleichung

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$$F_2^{-1}(x) = \vec{0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix}}_{\text{Das ist eine orthgonale Matrix, z.B. } O} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ Nach Lemma 40 ist

$Q_2 := Bild_{F_2}(Q_1)$ eine Quadrik mit der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$$F_2^{-1}(x) = \vec{0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix}}_{\text{Das ist eine orthgonale Matrix, z.B. } O} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ Nach Lemma 40 ist

$Q_2 := Bild_{F_2}(Q_1)$ eine Quadrik mit der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 a_{n-k} \cdots a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x^t Oa}$$

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$$F_2^{-1}(x) = \vec{0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix}}_{\text{Das ist eine orthgonale Matrix, z.B. } O} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nach Lemma 40 ist

$Q_2 := Bild_{F_2}(Q_1)$ eine Quadrik mit der Gleichung

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{(0 \cdots 0 a_{n-k} \cdots a_n) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x^t O a = \lambda x^t e_{k+1}}$$

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$$F_2^{-1}(x) = \vec{0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix}}_{\text{Das ist eine orthgonale Matrix, z.B. } O} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ Nach Lemma 40 ist

$Q_2 := Bild_{F_2}(Q_1)$ eine Quadrik mit der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O^t_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{(0 \cdots 0 a_{n-k} \cdots a_n) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O^t_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x^t O a = \lambda x^t e_{k+1} = \lambda e^t_{k+1} x} + a_0' = 0$$

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$$F_2^{-1}(x) = \vec{0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix}}_{\text{Das ist eine orthgonale Matrix, z.B. } O} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ Nach Lemma 40 ist

$Q_2 := Bild_{F_2}(Q_1)$ eine Quadrik mit der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 a_{n-k} \cdots a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x^t Oa = \lambda x^t e_{k+1} = \lambda e_{k+1}^t x} + a_0' = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$$F_2^{-1}(x) = \vec{0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix}}_{\text{Das ist eine orthgonale Matrix, z.B. } O} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ Nach Lemma 40 ist

$Q_2 := Bild_{F_2}(Q_1)$ eine Quadrik mit der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 a_{n-k} \cdots a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x^t Oa = \lambda x^t e_{k+1} = \lambda e_{k+1}^t x} + a_0' = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \, \lambda \, \underbrace{0 \cdots 0}_{n-k-1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Man betrachte die Isometrie F_2 von $\mathbb{R}^n$ mit F_2^{-1} gegeben durch

$$F_2^{-1}(x) = \vec{0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix}}_{\text{Das ist eine orthgonale Matrix, z.B. } O} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ Nach Lemma 40 ist

$Q_2 := Bild_{F_2}(Q_1)$ eine Quadrik mit der Gleichung

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +$$

$$\underbrace{(0 \cdots 0 a_{n-k} \cdots a_n) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & O_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x^t Oa = \lambda x^t e_{k+1} = \lambda e_{k+1}^t x} + a_0' = 0 \iff$$

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \, \lambda \, \underbrace{0 \cdots 0}_{n-k-1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a_0' = 0.$$

Jetzt betrachte die Isometrie

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \bar{b} + x$

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \, \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$.

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik,

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \, \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung

$$x^t \underbrace{A'}_{Id^t A Id} x + a'^t x + \underbrace{a'^t \overline{b} + \underbrace{\overline{b}^t A' \overline{b}}_{\vec{0}} + a'_0}_{a''_0} = 0.$$

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k}\, \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung

$x^t \underbrace{A'}_{Id^t A Id} x + a'^t x + \underbrace{a'^t \overline{b} + \underbrace{\overline{b}^t A' \overline{b}}_{\vec{0}} + a'_0}_{a''_0} = 0$. Ist eine $a'_i \neq 0$,

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung $x^t \underbrace{A'}_{Id^t A Id} x + a'^t x + \underbrace{a'^t \overline{b} + \underbrace{\overline{b}^t A' \overline{b}}_{\vec{0}} + a'_0}_{a''_0} = 0$. Ist eine $a'_i \neq 0$, so können wir $\overline{b}$

so wählen,

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \, \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung

$x^t \underbrace{A'}_{Id^t A Id} x + a'^t x + \underbrace{a'^t \overline{b} + \underbrace{\overline{b}^t A' \overline{b}}_{\vec{0}} + a'_0}_{a''_0} = 0$. Ist eine $a'_i \neq 0$, so können wir $\overline{b}$

so wählen, dass $a''_0 = 0$.

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \, \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung

$x^t \underbrace{A'}_{Id^t A Id} x + a'^t x + \underbrace{a'^t \overline{b} + \underbrace{\overline{b}^t A' \overline{b}}_{\vec{0}} + a'_0}_{a''_0} = 0$. Ist eine $a'_i \neq 0$, so können wir $\overline{b}$

so wählen, dass $a''_0 = 0$. (Z.B. $\overline{b} = (0 \cdots 0 \quad \underbrace{\frac{-a_0}{\overline{b}_i}}_{i-\text{te Stelle}} \quad 0 \cdots 0))$.

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung
$x^t \underbrace{A'}_{Id^t A Id} x + a'^t x + \underbrace{a'^t \overline{b} + \underbrace{\overline{b}^t A' \overline{b}}_{\vec{0}} + a'_0}_{a''_0} = 0$. Ist eine $a'_i \neq 0$, so können wir $\overline{b}$

so wählen, dass $a''_0 = 0$. (Z.B. $\overline{b} = (0 \cdots 0 \underbrace{\frac{-a_0}{\overline{b}_i}}_{i-\text{te Stelle}} 0 \cdots 0)$).Satz 69 ist

bewiesen.

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung
$x^t \underbrace{A'}_{Id^t A Id} x + a'^t x + \underbrace{a'^t \overline{b} + \underbrace{\overline{b}^t A' \overline{b}}_{\vec{0}} + a'_0}_{a''_0} = 0$. Ist eine $a'_i \neq 0$, so können wir $\overline{b}$

so wählen, dass $a''_0 = 0$. (Z.B. $\overline{b} = (0 \cdots 0 \quad \underbrace{\frac{-a_0}{\overline{b}_i}}_{i-\text{te Stelle}} \quad 0 \cdots 0)$).Satz 69 ist

bewiesen. Um Satz 70 zu beweisen, müssen wir noch die passende

„Skalierung“

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung
$x^t \underbrace{A'}_{Id^t A Id} x + a'^t x + \underbrace{a'^t \overline{b} + \underbrace{\overline{b}^t A' \overline{b}}_{\vec{0}} + a'_0}_{a''_0} = 0$. Ist eine $a'_i \neq 0$, so können wir $\overline{b}$

so wählen, dass $a''_0 = 0$. (Z.B. $\overline{b} = (0 \cdots 0 \quad \underbrace{\frac{-a_0}{\overline{b}_i}}_{i-\text{te Stelle}} \quad 0 \cdots 0)$).Satz 69 ist

bewiesen. Um Satz 70 zu beweisen, müssen wir noch die passende

„Skalierung“ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ \mu_n \cdot x_n \end{pmatrix}$, Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k}\, \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung

$x^t \underbrace{A'}_{Id^t A Id} x + a'^t x + \underbrace{a'^t \overline{b} + \underbrace{\overline{b}^t A' \overline{b}}_{\vec{0}} + a'_0}_{a''_0} = 0$. Ist eine $a'_i \neq 0$, so können wir $\overline{b}$

so wählen, dass $a''_0 = 0$. (Z.B. $\overline{b} = (0 \cdots 0 \quad \underbrace{\frac{-a_0}{\overline{b}_i}}_{i-\text{te Stelle}} \quad 0 \cdots 0))$.Satz 69 ist

bewiesen. Um Satz 70 zu beweisen, müssen wir noch die passende

„Skalierung“ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ \mu_n \cdot x_n \end{pmatrix}$, die offensichtlich eine affine Abbildung ist,

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung
$x^t \underbrace{A'}_{Id^t A Id} x + a'^t x + \underbrace{a'^t \overline{b} + \underbrace{\overline{b}^t A' \overline{b}}_{\vec{0}} + a'_0}_{a''_0} = 0$. Ist eine $a'_i \neq 0$, so können wir $\overline{b}$

so wählen, dass $a''_0 = 0$. (Z.B. $\overline{b} = (0 \cdots 0 \quad \underbrace{\frac{-a_0}{\overline{b}_i}}_{i-\text{te Stelle}} \quad 0 \cdots 0)$).Satz 69 ist

bewiesen. Um Satz 70 zu beweisen, müssen wir noch die passende „Skalierung“ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ \mu_n \cdot x_n \end{pmatrix}$, die offensichtlich eine affine Abbildung ist, um die von Null verschiedene Koeffiziente gleich ± 1 zu machen.

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung

$$\color{orange}{x^t \underbrace{A'}_{Id^t A Id} x} + \color{blue}{a'^t x} + \underbrace{a'^t \overline{b} + \underbrace{\overline{b}^t A' \overline{b}}_{\vec{0}} + a'_0}_{a''_0} = 0.$$

Ist eine $a'_i \neq 0$, so können wir $\overline{b}$ so wählen, dass $a''_0 = 0$. (Z.B. $\overline{b} = (0 \cdots 0 \underbrace{\frac{-a_0}{\overline{b}_i}}_{i-\text{te Stelle}} 0 \cdots 0)$).Satz 69 ist bewiesen. Um Satz 70 zu beweisen, müssen wir noch die passende „Skalierung“ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ \mu_n \cdot x_n \end{pmatrix}$, die offensichtlich eine affine Abbildung ist, um die von Null verschiedene Koeffiziente gleich ± 1 zu machen. (Wie in Beweis von Folgerung zu Satz 65)

Jetzt betrachte die Isometrie F_3 sodass F_3^{-1} die Translation $F_1^{-1}(x) = \overline{b} + x$ ist mit $\overline{b} = (\underbrace{0 \cdots 0}_{k} \overline{b}_{k+1} \cdots \overline{b}_n)$. Nach Lemma 40 ist

$Bild_{F_3}(Q_2)$ eine Quadrik, mit der Gleichung

$x^t \underbrace{A'}_{Id^t A Id} x + a'^t x + \underbrace{a'^t \overline{b} + \underbrace{\overline{b}^t A' \overline{b}}_{\vec{0}} + a_0'}_{a_0''} = 0$. Ist eine $a_i' \neq 0$, so können wir $\overline{b}$ so wählen, dass $a_0'' = 0$. (Z.B. $\overline{b} = (0 \cdots 0 \quad \underbrace{\frac{-a_0}{\overline{b}_i}}_{i-\text{te Stelle}} \quad 0 \cdots 0)$).Satz 69 ist bewiesen. Um Satz 70 zu beweisen, müssen wir noch die passende „Skalierung“ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot x_1 \\ \vdots \\ \mu_n \cdot x_n \end{pmatrix}$, die offensichtlich eine affine Abbildung ist, um die von Null verschiedene Koeffiziente gleich ± 1 zu machen. (Wie in Beweis von Folgerung zu Satz 65)

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2:

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$,

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$,

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen,

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen* $S \geq 0$.

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

** ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$,*

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

* *ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$, dann ist die Quadrik eine Ellipse,*

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$(x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (a_1 \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

** ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$, dann ist die Quadrik eine Ellipse,*

** ist $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$,*

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

** ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$, dann ist die Quadrik eine Ellipse,*

** ist $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Hyperbel.*

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

** ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$, dann ist die Quadrik eine Ellipse,*

** ist $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Hyperbel.*

** ist $\delta = 0$ und $\Delta \neq 0$,*

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

* *ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$, dann ist die Quadrik eine Ellipse,*
* *ist $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Hyperbel.*
* *ist $\delta = 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Parabel.*

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

* *ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$, dann ist die Quadrik eine Ellipse,*
* *ist $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Hyperbel.*
* *ist $\delta = 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Parabel.*
* *ist $\delta = 0$ und $\Delta = 0$,*

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

** ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$, dann ist die Quadrik eine Ellipse,*

** ist $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Hyperbel.*

** ist $\delta = 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Parabel.*

** ist $\delta = 0$ und $\Delta = 0$, so ist die Quadrik ein paralleles Geradenpaar.*

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

* *ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$, dann ist die Quadrik eine Ellipse,*

* *ist $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Hyperbel.*

* *ist $\delta = 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Parabel.*

* *ist $\delta = 0$ und $\Delta = 0$, so ist die Quadrik ein paralleles Geradenpaar.*

* *ist $\Delta = 0$ und $\delta > 0$,*

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

* *ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$, dann ist die Quadrik eine Ellipse,*

* *ist $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Hyperbel.*

* *ist $\delta = 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Parabel.*

* *ist $\delta = 0$ und $\Delta = 0$, so ist die Quadrik ein paralleles Geradenpaar.*

* *ist $\Delta = 0$ und $\delta > 0$, so ist die Quadrik gleich $\varnothing$.*

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

* *ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$, dann ist die Quadrik eine Ellipse,*

* *ist $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Hyperbel.*

* *ist $\delta = 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Parabel.*

* *ist $\delta = 0$ und $\Delta = 0$, so ist die Quadrik ein paralleles Geradenpaar.*

* *ist $\Delta = 0$ und $\delta > 0$, so ist die Quadrik gleich $\varnothing$.*

* *ist $\Delta = 0$ und $\delta < 0$,*

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$(x_1 \; \cdots \; x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (a_1 \; \cdots \; a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

** ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$, dann ist die Quadrik eine Ellipse,*

** ist $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Hyperbel.*

** ist $\delta = 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Parabel.*

** ist $\delta = 0$ und $\Delta = 0$, so ist die Quadrik ein paralleles Geradenpaar.*

** ist $\Delta = 0$ und $\delta > 0$, so ist die Quadrik gleich $\varnothing$.*

** ist $\Delta = 0$ und $\delta < 0$, so ist die Quadrik ein Geradenpaar mit Schnittpunkt.*

Wie kann man die Normalform (bzgl Affinen Transformationen) bestimmen, ohne die affine Abbildung bzw. Isometrie zu finden?

Antwort in Dim 2: Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + a = 0.$$

Bezeichnung $\Delta = det(Erw_Q)$, $\delta = det(A)$, $S = spur(A)$.

Bemerkung Man kann S immer $S \geq 0$ machen, indem man die Gleichung der Quadrik mit -1 multipliziert.

Satz 71 *Angenommen $S \geq 0$. Es gilt:*

* *ist $\delta > 0$ und $\Delta < 0$, dann ist die Quadrik eine Ellipse,*
* *ist $\delta < 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Hyperbel.*
* *ist $\delta = 0$ und $\Delta \neq 0$, so ist die Quadrik eine Parabel.*
* *ist $\delta = 0$ und $\Delta = 0$, so ist die Quadrik ein paralleles Geradenpaar.*
* *ist $\Delta = 0$ und $\delta > 0$, so ist die Quadrik gleich $\varnothing$.*
* *ist $\Delta = 0$ und $\delta < 0$, so ist die Quadrik ein Geradenpaar mit Schnittpunkt.*

Bemerkung Nur die Vorzeichen von Δ und δ werden benutzt

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?
Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$.

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?
Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$.

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_1/2 \\ \vdots \\ a_n/2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1/2 & \cdots & a_n/2 \end{matrix}} & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_1/2 \\ \vdots \\ a_n/2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1/2 & \cdots & a_n/2 \end{matrix}} & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$.

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_1/2 \\ \vdots \\ a_n/2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1/2 & \cdots & a_n/2 \end{matrix}} & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$

$det(B^t_{Erw})det(Erw_Q)det(B_{Erw})$

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_1/2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_n/2 \\ a_1/2 & \cdots & a_n/2 & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B} & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$

$det(B^t_{Erw})det(Erw_Q)det(B_{Erw}) \overset{\text{Weil } det(C) = det(C^t)}{=}$

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_1/2 \\ \vdots \\ a_n/2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1/2 & \cdots & a_n/2 \end{matrix}} & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$

$$det(B^t_{Erw})det(Erw_Q)det(B_{Erw}) \overset{\text{Weil } det(C) = det(C^t)}{=} \underbrace{det(B_{Erw})^2}_{>0} \Delta.$$

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_1/2 \\ \vdots \\ a_n/2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1/2 & \cdots & a_n/2 \end{matrix}} & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$ $det(B^t_{Erw})det(Erw_Q)det(B_{Erw}) \overset{\text{Weil } det(C) = det(C^t)}{=} \underbrace{det(B_{Erw})^2}_{>0} \Delta$. Also,

Vorzeichen von Δ wird nicht geändert.

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} B^t & \vec{0} \\ b_1 \cdots b_n & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_1/2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_n/2 \\ a_1/2 & \cdots & a_n/2 & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} B & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$

$det(B^t_{Erw})det(Erw_Q)det(B_{Erw}) \overset{\text{Weil } det(C) = det(C^t)}{=} \underbrace{det(B_{Erw})^2}_{>0} \Delta$. Also,

Vorzeichen von Δ wird nicht geändert.

Ähnlich:

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_1/2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_n/2 \\ a_1/2 & \cdots & a_n/2 & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$

$$det(B^t_{Erw})det(Erw_Q)det(B_{Erw}) \overset{\text{Weil } det(C) = det(C^t)}{=} \underbrace{det(B_{Erw})^2}_{>0} \Delta.$$ Also,

Vorzeichen von Δ wird nicht geändert.

Ähnlich: weil $A_1 = B^t A B$ ist,

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_1/2 \\ \vdots \\ a_n/2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1/2 & \cdots & a_n/2 \end{matrix}} & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$
$det(B^t_{Erw}) det(Erw_Q) det(B_{Erw}) \overset{\text{Weil } det(C) = det(C^t)}{=} \underbrace{det(B_{Erw})^2}_{>0} \Delta$. Also,

Vorzeichen von Δ wird nicht geändert.

Ähnlich: weil $A_1 = B^t AB$ ist, ist $det(A_1) = \underbrace{det(B)^2}_{>0} \underbrace{\delta}_{det(A)}$.

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_1/2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_n/2 \\ a_1/2 & \cdots & a_n/2 & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B} & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$
$det(B^t_{Erw}) det(Erw_Q) det(B_{Erw}) \overset{\text{Weil } det(C) = det(C^t)}{=} \underbrace{det(B_{Erw})^2}_{>0} \Delta$. Also,

Vorzeichen von Δ wird nicht geändert.

Ähnlich: weil $A_1 = B^t A B$ ist, ist $det(A_1) = \underbrace{det(B)^2}_{>0} \underbrace{\delta}_{det(A)}$. Also,

Vorzeichen von δ wird nicht geändert.

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_1/2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_n/2 \\ a_1/2 & \cdots & a_n/2 & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B} & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$
$det(B^t_{Erw})det(Erw_Q)det(B_{Erw}) \overset{\text{Weil } det(C) = det(C^t)}{=} \underbrace{det(B_{Erw})^2}_{>0} \Delta$. Also,

Vorzeichen von Δ wird nicht geändert.

Ähnlich: weil $A_1 = B^t AB$ ist, ist $det(A_1) = \underbrace{det(B)^2}_{>0} \underbrace{\delta}_{det(A)}$. Also,

Vorzeichen von δ wird nicht geändert.

Dann genügt es,

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_1/2 \\ \vdots \\ a_n/2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1/2 & \cdots & a_n/2 \end{matrix}} & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$ $det(B^t_{Erw}) det(Erw_Q) det(B_{Erw}) \overset{\text{Weil } det(C) = det(C^t)}{=} \underbrace{det(B_{Erw})^2}_{>0} \Delta$. Also,

Vorzeichen von Δ wird nicht geändert.

Ähnlich: weil $A_1 = B^t A B$ ist, ist $det(A_1) = \underbrace{det(B)^2}_{>0} \underbrace{\delta}_{det(A)}$. Also,

Vorzeichen von δ wird nicht geändert.

Dann genügt es, Satz 71 nur für Gleichungen,

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} B^t & \vec{0} \\ b_1 \cdots b_n & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_1/2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_n/2 \\ a_1/2 & \cdots & a_n/2 & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} B & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$ $det(B^t_{Erw})det(Erw_Q)det(B_{Erw}) \overset{\text{Weil } det(C) = det(C^t)}{=} \underbrace{det(B_{Erw})^2}_{>0} \Delta$. Also,

Vorzeichen von Δ wird nicht geändert.

Ähnlich: weil $A_1 = B^t AB$ ist, ist $det(A_1) = \underbrace{det(B)^2}_{>0} \underbrace{\delta}_{det(A)}$. Also,

Vorzeichen von δ wird nicht geändert.

Dann genügt es, Satz 71 nur für Gleichungen, die bereits in Normal-Form stehen,

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} B^t & \vec{0} \\ b_1 \cdots b_n & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_1/2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_n/2 \\ a_1/2 & \cdots & a_n/2 & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} B & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$ $det(B^t_{Erw})det(Erw_Q)det(B_{Erw}) \overset{\text{Weil } det(C) = det(C^t)}{=} \underbrace{det(B_{Erw})^2}_{>0} \Delta$. Also,

Vorzeichen von Δ wird nicht geändert.

Ähnlich: weil $A_1 = B^t AB$ ist, ist $det(A_1) = \underbrace{det(B)^2}_{>0} \underbrace{\delta}_{det(A)}$. Also,

Vorzeichen von δ wird nicht geändert.

Dann genügt es, Satz 71 nur für Gleichungen, die bereits in Normal-Form stehen, zu beweisen

Frage $\Delta = det(Erw_Q)$ und mit $\delta = det(A)$ nach einem affinen Isomorphismus F?

Lemma 40: Sei $F^{-1} = b + Bx$. $Q_1 := Bild_F(Q)$. Dann ist $Erw_Q =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B^t} & \boxed{\vec{0}} \\ \boxed{b_1 \cdots b_n} & 1 \end{pmatrix}}_{B^t_{Erw}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_1/2 \\ \vdots \\ a_n/2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} a_1/2 & \cdots & a_n/2 \end{matrix}} & a_0 \end{pmatrix}}_{Erw_Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{B} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}} \\ \boxed{\vec{0}^t} & 1 \end{pmatrix}}_{B_{Erw}}$$

Also, $Erw_{Q_1} = B^t_{Erw} Erw_Q B_{Erw}$. Dann ist $det(Erw_{Q_1}) =$ $det(B^t_{Erw})det(Erw_Q)det(B_{Erw}) \overset{\text{Weil } det(C) = det(C^t)}{=} \underbrace{det(B_{Erw})^2}_{>0} \Delta$. Also,

Vorzeichen von Δ wird nicht geändert.

Ähnlich: weil $A_1 = B^t AB$ ist, ist $det(A_1) = \underbrace{det(B)^2}_{>0} \underbrace{\delta}_{det(A)}$. Also,

Vorzeichen von δ wird nicht geändert.

Dann genügt es, Satz 71 nur für Gleichungen, die bereits in Normal-Form stehen, zu beweisen

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse		

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,$

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Hyperbel		

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \mp\lambda\mu,\ \delta = -\lambda\mu$

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu$, $\delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \mp\lambda\mu$, $\delta = -\lambda\mu$

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \mp\lambda\mu,\ \delta = -\lambda\mu$
Parabel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda,\ \delta = 0$

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu$, $\delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \mp\lambda\mu$, $\delta = -\lambda\mu$
Parabel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda$, $\delta = 0$
paralleles Geradenpaar		

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu$, $\delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \mp\lambda\mu$, $\delta = -\lambda\mu$
Parabel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda$, $\delta = 0$
paralleles Geradenpaar	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \mp\lambda\mu,\ \delta = -\lambda\mu$
Parabel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda,\ \delta = 0$
paralleles Geradenpaar	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$\Delta = 0,\ \delta = 0$

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu$, $\delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \mp\lambda\mu$, $\delta = -\lambda\mu$
Parabel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda$, $\delta = 0$
paralleles Geradenpaar	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$\Delta = 0$, $\delta = 0$
$\varnothing$		

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \mp\lambda\mu,\ \delta = -\lambda\mu$
Parabel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda,\ \delta = 0$
paralleles Geradenpaar	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$\Delta = 0,\ \delta = 0$
$\emptyset$	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \mp\lambda\mu,\ \delta = -\lambda\mu$
Parabel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda,\ \delta = 0$
paralleles Geradenpaar	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$\Delta = 0,\ \delta = 0$
$\varnothing$	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \mp\lambda\mu,\ \delta = -\lambda\mu$
Parabel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda,\ \delta = 0$
paralleles Geradenpaar	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$\Delta = 0,\ \delta = 0$
$\varnothing$	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Geradenpaar mit einem Schnittpunkt		

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \mp\lambda\mu,\ \delta = -\lambda\mu$
Parabel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda,\ \delta = 0$
paralleles Geradenpaar	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$\Delta = 0,\ \delta = 0$
$\varnothing$	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Geradenpaar mit einem Schnittpunkt	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	

Quadrik	Erw_Q	Δ und δ
Ellipse	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & -1 \end{pmatrix}$	$\Delta = -\lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Hyperbel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \mp\lambda\mu,\ \delta = -\lambda\mu$
Parabel	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda,\ \delta = 0$
paralleles Geradenpaar	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$\Delta = 0,\ \delta = 0$
$\varnothing$	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\Delta = \lambda\mu,\ \delta = \lambda\mu$
Geradenpaar mit einem Schnittpunkt	$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & -\mu & \\ & & 0 \end{pmatrix}$	$\Delta = 0,\ \delta = -\lambda\mu$

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien* $X_1, ..., X_5$ *5 verschiedenen Punkten in* $\mathbb{R}^2$*.*

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien* $X_1, ..., X_5$ *5 verschiedenen Punkten in* $\mathbb{R}^2$. *Dann existiert genau eine Quadrik* Q

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien* $X_1, ..., X_5$ *5 verschiedenen Punkten in* $\mathbb{R}^2$*. Dann existiert genau eine Quadrik* Q *die diese 5 Punkte enthält.*

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien* $X_1, ..., X_5$ *5 verschiedenen Punkten in* $\mathbb{R}^2$. *Dann existiert genau eine Quadrik* Q *die diese 5 Punkte enthält.*
Beweis

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien* $X_1, ..., X_5$ *5 verschiedenen Punkten in* $\mathbb{R}^2$. *Dann existiert genau eine Quadrik* Q *die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz):

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0$$

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*
Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:
$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*
Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:
$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$
$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}$,... ,$\binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen,

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:

$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}$,... ,$\binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$$

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:

$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Nach Dimensionsformel ist

$$dim(Kern_C) = 6 - \underbrace{dim(Bild_C)}_{\leq 5}$$

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$$

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$ Nach Dimensionsformel ist

$$dim(Kern_C) = 6 - \underbrace{dim(Bild_C)}_{\leq 5} \geq 1,$$

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:
$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$
$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$ Nach Dimensionsformel ist

$dim(Kern_C) = 6 - \underbrace{dim(Bild_C)}_{\leq 5} \geq 1$, also es gibt eine Lösung.

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$$

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$ Nach Dimensionsformel ist

$$dim(Kern_C) = 6 - \underbrace{dim(Bild_C)}_{\leq 5} \geq 1,$$ also es gibt eine Lösung. □

(Idea des Beweises der Eindeutigkeit:

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:
$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$
$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:
$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}$. Nach Dimensionsformel ist
$dim(Kern_C) = 6 - \underbrace{dim(Bild_C)}_{\leq 5} \geq 1$, also es gibt eine Lösung. □

(Idea des Beweises der Eindeutigkeit: Man zeigt, dass die Matrix C Rank 5 hat

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus: $(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \Longleftrightarrow$ $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Nach Dimensionsformel ist

$dim(Kern_C) = 6 - \underbrace{dim(Bild_C)}_{\leq 5} \geq 1$, also es gibt eine Lösung. $\square$

(Idea des Beweises der Eindeutigkeit: Man zeigt, dass die Matrix C Rank 5 hat. Dann ist Kern $1-$ Dimensional,

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:
$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$
$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$ Nach Dimensionsformel ist

$dim(Kern_C) = 6 - \underbrace{dim(Bild_C)}_{\leq 5} \geq 1$, also es gibt eine Lösung. □

(Idea des Beweises der Eindeutigkeit: Man zeigt, dass die Matrix C Rank 5 hat. Dann ist Kern $1-$ Dimensional,also jede 2 Lösungen sind proportional,

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:

$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1 x + a_2 y + a_0 = 0 \iff$

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1 x + a_2 y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, ..., \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$ Nach Dimensionsformel ist

$dim(Kern_C) = 6 - \underbrace{dim(Bild_C)}_{\leq 5} \geq 1$, also es gibt eine Lösung. □

(Idea des Beweises der Eindeutigkeit: Man zeigt, dass die Matrix C Rank 5 hat. Dann ist Kern $1-$ Dimensional,also jede 2 Lösungen sind proportional, also Gleichungen von zwei Quadriken sind proportional.)

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus: $(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$ $a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Nach Dimensionsformel ist

$dim(Kern_C) = 6 - \underbrace{dim(Bild_C)}_{\leq 5} \geq 1$, also es gibt eine Lösung. □

(Idea des Beweises der Eindeutigkeit: Man zeigt, dass die Matrix C Rank 5 hat. Dann ist Kern $1-$ Dimensional,also jede 2 Lösungen sind proportional, also Gleichungen von zwei Quadriken sind proportional.)

Bemerkung *Daraus folgt insbesondere,*

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1 x + a_2 y + a_0 = 0 \iff$$

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1 x + a_2 y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$ Nach Dimensionsformel ist

$dim(Kern_C) = 6 - \underbrace{dim(Bild_C)}_{\leq 5} \geq 1$, also es gibt eine Lösung. □

(Idea des Beweises der Eindeutigkeit: Man zeigt, dass die Matrix C Rank 5 hat. Dann ist Kern $1-$ Dimensional,also jede 2 Lösungen sind proportional, also Gleichungen von zwei Quadriken sind proportional.)

Bemerkung *Daraus folgt insbesondere, dass eine Quadrik, die von einem Punkt und $\emptyset$ verschieden ist,*

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:

$$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$$

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$ Nach Dimensionsformel ist

$$dim(Kern_C) = 6 - \underbrace{dim(Bild_C)}_{\leq 5} \geq 1,$$ also es gibt eine Lösung. □

(Idea des Beweises der Eindeutigkeit: Man zeigt, dass die Matrix C Rank 5 hat. Dann ist Kern $1-$ Dimensional,also jede 2 Lösungen sind proportional, also Gleichungen von zwei Quadriken sind proportional.)

Bemerkung *Daraus folgt insbesondere, dass eine Quadrik, die von einem Punkt und $\varnothing$ verschieden ist, deren Gleihung eindeutig (bis zum Vielfachcheit) bestimmt.*

Die Gleichung der Quadrik durch 5 Punkte

Satz 72 *Seien $X_1, ..., X_5$ 5 verschiedenen Punkten in $\mathbb{R}^2$. Dann existiert genau eine Quadrik Q die diese 5 Punkte enthält.*

Beweis (nur Existenz): Die Gleichung der Quadrik sieht wie folgt aus:
$(x\ y)\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} + a_1x + a_2y + a_0 = 0 \iff$
$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$ Wenn die 5 Punkte $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ auf der Quadrik liegen, ist das folgende lineare Gleichungsystem erfüllt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$ Nach Dimensionsformel ist

$dim(Kern_C) = 6 - \underbrace{dim(Bild_C)}_{\leq 5} \geq 1$, also es gibt eine Lösung. □

(Idea des Beweises der Eindeutigkeit: Man zeigt, dass die Matrix C Rank 5 hat. Dann ist Kern $1-$ Dimensional,also jede 2 Lösungen sind proportional, also Gleichungen von zwei Quadriken sind proportional.)

Bemerkung *Daraus folgt insbesondere, dass eine Quadrik, die von einem Punkt und $\varnothing$ verschieden ist, deren Gleihung eindeutig (bis zum Vielfachcheit) bestimmt.*

Folgerung

Folgerung Seien $\binom{x_1}{y_1},\ldots,\binom{x_5}{y_5}$ verschiedene Punkte auf der Ebene.

Folgerung Seien $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_5}{y_5}$ verschiedene Punkte auf der Ebene. Dann ist die Gleichung der Quadrik, die diese 5 Punkte enthält,

Folgerung Seien $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ verschiedene Punkte auf der Ebene. Dann ist die Gleichung der Quadrik, die diese 5 Punkte enthält,

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Folgerung Seien $\binom{x_1}{y_1},\ldots,\binom{x_5}{y_5}$ verschiedene Punkte auf der Ebene. Dann ist die Gleichung der Quadrik, die diese 5 Punkte enthält,

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1\\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1\\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Folgerung Seien $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ verschiedene Punkte auf der Ebene. Dann ist die Gleichung der Quadrik, die diese 5 Punkte enthält,

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Beweis:

Folgerung Seien $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ verschiedene Punkte auf der Ebene. Dann ist die Gleichung der Quadrik, die diese 5 Punkte enthält,

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Beweis: Nach Laplace-Zeilenentwicklung bzgl. 1ten Zeile

Folgerung Seien $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_5}{y_5}$ verschiedene Punkte auf der Ebene. Dann ist die Gleichung der Quadrik, die diese 5 Punkte enthält,

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Beweis: Nach Laplace-Zeilenentwicklung bzgl. 1ten Zeile sieht man sofort, dass die Gleichung $(*)$ eine quadratische Gleichung ist

Folgerung Seien $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ verschiedene Punkte auf der Ebene. Dann ist die Gleichung der Quadrik, die diese 5 Punkte enthält,

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Beweis: Nach Laplace-Zeilenentwicklung bzgl. 1ten Zeile sieht man sofort, dass die Gleichung $(*)$ eine quadratische Gleichung ist Da diese Quadrik die Punkten

Folgerung Seien $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_5}{y_5}$ verschiedene Punkte auf der Ebene. Dann ist die Gleichung der Quadrik, die diese 5 Punkte enthält,

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Beweis: Nach Laplace-Zeilenentwicklung bzgl. 1ten Zeile sieht man sofort, dass die Gleichung $(*)$ eine quadratische Gleichung ist Da diese Quadrik die Punkten $\binom{x_1}{y_1}$,

Folgerung Seien $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_5}{y_5}$ verschiedene Punkte auf der Ebene. Dann ist die Gleichung der Quadrik, die diese 5 Punkte enthält,

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Beweis: Nach Laplace-Zeilenentwicklung bzgl. 1ten Zeile sieht man sofort, dass die Gleichung $(*)$ eine quadratische Gleichung ist Da diese Quadrik die Punkten $\binom{x_1}{y_1}$, ...

Folgerung Seien $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ verschiedene Punkte auf der Ebene. Dann ist die Gleichung der Quadrik, die diese 5 Punkte enthält,

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Beweis: Nach Laplace-Zeilenentwicklung bzgl. 1ten Zeile sieht man sofort, dass die Gleichung $(*)$ eine quadratische Gleichung ist Da diese Quadrik die Punkten $\binom{x_1}{y_1}, \dots, \binom{x_5}{y_5}$ enthält,

Folgerung Seien $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_5}{y_5}$ verschiedene Punkte auf der Ebene. Dann ist die Gleichung der Quadrik, die diese 5 Punkte enthält,

$$\det\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Beweis: Nach Laplace-Zeilenentwicklung bzgl. 1ten Zeile sieht man sofort, dass die Gleichung $(*)$ eine quadratische Gleichung ist Da diese Quadrik die Punkten $\binom{x_1}{y_1}, \ldots, \binom{x_5}{y_5}$ enthält, ist sie die gesuchte Quadrik.