Zusammenfassung

Ziel war

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21)

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach" ist.

Methode Umformulieren:

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$,

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^tAT$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Satz 65/ Folgerung geben die Antwort,

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Satz 65/ Folgerung geben die Antwort, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist: Man kann die Matrix A in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Satz 65/ Folgerung geben die Antwort, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist: Man kann die Matrix A in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „$+1$“ und s Stuck „-1“ steht

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Satz 65/ Folgerung geben die Antwort, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist: Man kann die Matrix A in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „$+1$“ und s Stuck „-1“ steht.
Frage: Kann man noch besser machen?

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^tAT$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Satz 65/ Folgerung geben die Antwort, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist: Man kann die Matrix A in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „$+1$“ und s Stuck „-1“ steht.
Frage: Kann man noch besser machen?
Antwort – Nein – Trägheitsatz von Silvester

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ,*

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V*

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis*

die Matrix von σ wie folgt ist:

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & {\color{blue}-1} & & & & & \\ & & & & {\color{blue}\ddots} & & & & \\ & & & & & {\color{blue}-1} & & & \\ & & & & & & {\color{red}0} & & \\ & & & & & & & {\color{red}\ddots} & \\ & & & & & & & & {\color{red}0} \end{pmatrix}$$

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:* $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ *, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht.*

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*
$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$
, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt.

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$r =$

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$r = max\{dim(W)\ s.d.\ W \subset V$

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$r = max\{dim(W)\ s.d.\ W \subset V\ Untervektorraum\ mit\ \sigma(w,w) > 0\ für\ alle\ w \in W,\ w \neq \vec{0}\ ist\},$

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$$r = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\}, \qquad (*)$$

$$s = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V$$

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1" und s Stuck „-1" steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$$r = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w,w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\}, \qquad (*)$$

$$s = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w,w) < 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\}.$$

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$$r = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\}, \qquad (*)$$

$$s = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) < 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\}. \qquad (**)$$

Beweis.

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$.

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x =$

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Idx = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$.

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\}$

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W)$ s.d. $W \subset V$ Untervektorraum mit $\sigma(w, w) > 0$ für alle $w \in W$, $w \neq \vec{0}$ ist$\} \geq r$.

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$,

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$.

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis).

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Idx = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $({b'}_1, ..., {b'}_{r'})$ in W,

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $(b'_1, ..., b'_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{b'_1, ..., b'_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$.

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W)$ s.d. $W \subset V$ Untervektorraum mit $\sigma(w, w) > 0$ für alle $w \in W$, $w \neq \vec{0}$ ist$\} \geq r$.

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $(b'_1, ..., b'_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{b'_1, ..., b'_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig.

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $(b'_1, ..., b'_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{b'_1, ..., b'_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$.

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $({b'}_1, ..., {b'}_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{{b'}_1, ..., {b'}_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist
$\underbrace{-{\lambda'}_1 {b'}_1 - ... - {\lambda'}_{r'} {b'}_{r'}}_{w \in W} =$

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W)$ s.d. $W \subset V$ Untervektorraum mit $\sigma(w, w) > 0$ für alle $w \in W$, $w \neq \vec{0}$ ist$\} \geq r$.

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $(b'_1, ..., b'_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{b'_1, ..., b'_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-\lambda'_1 b'_1 - ... - \lambda'_{r'} b'_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W)$ s.d. $W \subset V$ Untervektorraum mit $\sigma(w, w) > 0$ für alle $w \in W$, $w \neq \vec{0}$ ist$\} \geq r$.

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $({b'}_1, ..., {b'}_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{{b'}_1, ..., {b'}_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass

$\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$\underbrace{-{\lambda'}_1 {b'}_1 - ... - {\lambda'}_{r'} {b'}_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$

Ist ein $w \neq \vec{0}$,

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v,v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W)$ s.d. $W \subset V$ Untervektorraum mit $\sigma(w,w) > 0$ für alle $w \in W$, $w \neq \vec{0}$ ist$\} \geq r$.

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v,v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $({b'}_1, ..., {b'}_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{{b'}_1, ..., {b'}_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-{\lambda'}_1 {b'}_1 - ... - {\lambda'}_{r'} {b'}_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Ist ein $w \neq \vec{0}$, so ist $\sigma(w,w) > 0$.

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $(b'_1, ..., b'_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{b'_1, ..., b'_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-\lambda'_1 b'_1 - ... - \lambda'_{r'} b'_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Ist ein $w \neq \vec{0}$, so ist $\sigma(w, w) > 0$. Für v gilt:

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Idx = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r$.

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $({b'}_1, ..., {b'}_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{{b'}_1, ..., {b'}_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-{\lambda'}_1 {b'}_1 - ... - {\lambda'}_{r'} {b'}_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Ist ein $w \neq \vec{0}$, so ist $\sigma(w, w) > 0$. Für v gilt:

$$\sigma(v, v) = (\lambda_{r+1} \cdots \lambda_n) \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t I d x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $(b'_1, ..., b'_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{b'_1, ..., b'_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-\lambda'_1 b'_1 - ... - \lambda'_{r'} b'_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Ist ein $w \neq \vec{0}$, so ist $\sigma(w, w) > 0$. Für v gilt:

$$\sigma(v, v) = (\lambda_{r+1} \cdots \lambda_n) \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$-\lambda_{r+1}^2 - ... - \lambda_{r+s}^2 \leq 0.$$

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $(b'_1, ..., b'_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{b'_1, ..., b'_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-\lambda'_1 b'_1 - ... - \lambda'_{r'} b'_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Ist ein $w \neq \vec{0}$, so ist $\sigma(w, w) > 0$. Für v gilt:

$$\sigma(v, v) = (\lambda_{r+1} \cdots \lambda_n) \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$-\lambda_{r+1}^2 - ... - \lambda_{r+s}^2 \leq 0$. Also, $\sigma(w, w) > \sigma(v, v)$.

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $({b'}_1, ..., {b'}_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{{b'}_1, ..., {b'}_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-{\lambda'}_1 {b'}_1 - ... - {\lambda'}_{r'} {b'}_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Ist ein $w \neq \vec{0}$, so ist $\sigma(w, w) > 0$. Für v gilt:

$$\sigma(v, v) = (\lambda_{r+1} \cdots \lambda_n) \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$-\lambda_{r+1}^2 - ... - \lambda_{r+s}^2 \leq 0$. Also, $\sigma(w, w) > \sigma(v, v)$. Da $w = v$,

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $({b'}_1, ..., {b'}_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{{b'}_1, ..., {b'}_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-{\lambda'}_1 {b'}_1 - ... - {\lambda'}_{r'} {b'}_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Ist ein $w \neq \vec{0}$, so ist $\sigma(w, w) > 0$. Für v gilt:

$$\sigma(v, v) = (\lambda_{r+1} \cdots \lambda_n) \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$-\lambda_{r+1}^2 - ... - \lambda_{r+s}^2 \leq 0$. Also, $\sigma(w, w) > \sigma(v, v)$. Da $w = v$, bekommen wir ein Widerspruch.

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W)$ s.d. $W \subset V$ Untervektorraum mit $\sigma(w, w) > 0$ für alle $w \in W$, $w \neq \vec{0}$ ist$\} \geq r$.

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $(b'_1, ..., b'_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{b'_1, ..., b'_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-\lambda'_1 b'_1 - ... - \lambda'_{r'} b'_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Ist ein $w \neq \vec{0}$, so ist $\sigma(w, w) > 0$. Für v gilt:

$$\sigma(v, v) = (\lambda_{r+1} \cdots \lambda_n) \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$-\lambda_{r+1}^2 - ... - \lambda_{r+s}^2 \leq 0$. Also, $\sigma(w, w) > \sigma(v, v)$. Da $w = v$, bekommen wir ein Widerspruch. Also, die Zahl r ist eindeutig durch $(*)$ bestimmt.

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v,v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W)$ s.d. $W \subset V$ Untervektorraum mit $\sigma(w,w) > 0$ für alle $w \in W$, $w \neq \vec{0}$ ist$\} \geq r$.

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v,v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $(b'_1, ..., b'_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{b'_1, ..., b'_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-\lambda'_1 b'_1 - ... - \lambda'_{r'} b'_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Ist ein $w \neq \vec{0}$, so ist $\sigma(w,w) > 0$. Für v gilt:

$$\sigma(v,v) = (\lambda_{r+1} \cdots \lambda_n) \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$-\lambda_{r+1}^2 - ... - \lambda_{r+s}^2 \leq 0$. Also, $\sigma(w,w) > \sigma(v,v)$. Da $w = v$, bekommen wir ein Widerspruch. Also, die Zahl r ist eindeutig durch $(*)$ bestimmt. Analog ist s eindeutig durch $(**)$ bestimmt.

Beweis. Betrachte $V_+ = span(\{b_1, ..., b_r\})$. Für jedes $v \in V_+$, $v \neq \vec{0}$ mit der Koordinaten $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ ist $\sigma(v, v) = x^t Id x = x_1^2 + ... + x_r^2 > 0$. Also,

$max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq \vec{0} \text{ ist}\} \geq r.$

Angenommen, es gibt ein W s.d. $dim(W) = r' > r$ und s.d. für alle $v \in W$, $v \neq \vec{0}$, ist $\sigma(v, v) > 0$. (Widerspruchbeweis). Betrachte die Basis $({b'}_1, ..., {b'}_{r'})$ in W, und die Vereinugung $\{{b'}_1, ..., {b'}_{r'}, b_{r+1}, ..., b_n\}$. Diese Menge hat mehr als $n = dim(V)$ Elemeten und ist deswegen ist linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda'_1, ..., \lambda'_{r'}, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$ sodass $\lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_{r'} b'_{r'} + \lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n = \vec{0}$. Dann ist

$$\underbrace{-{\lambda'}_1 {b'}_1 - ... - {\lambda'}_{r'} {b'}_{r'}}_{w \in W} = \underbrace{\lambda_{r+1} b_{r+1} + ... + \lambda_n b_n}_{v}.$$

Ist ein $w \neq \vec{0}$, so ist $\sigma(w, w) > 0$. Für v gilt:

$$\sigma(v, v) = (\lambda_{r+1} \cdots \lambda_n) \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$-\lambda_{r+1}^2 - ... - \lambda_{r+s}^2 \leq 0$. Also, $\sigma(w, w) > \sigma(v, v)$. Da $w = v$, bekommen wir ein Widerspruch. Also, die Zahl r ist eindeutig durch $(*)$ bestimmt. Analog ist s eindeutig durch $(**)$ bestimmt. $\square$

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 65 kann man die Matrix eine Bilinearform mittels Basiswahl in die Form
$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 65 kann man die Matrix eine Bilinearform mittels Basiswahl in die Form $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „$+1$“ und s Stuck „-1“ steht.

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 65 kann man die Matrix eine Bilinearform mittels Basiswahl in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „$+1$“ und s Stuck „-1“ steht.

Nach Satz 66 sind die Zahlen r, s eindeutig bestimmt.

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 65 kann man die Matrix eine Bilinearform mittels Basiswahl in die Form
$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$
bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „$+1$“ und s Stuck „-1“ steht.
Nach Satz 66 sind die Zahlen r, s eindeutig bestimmt. Das Tripel $(r, s, n - r - s)$ heißt die Signatur der Bilinearform σ.

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 65 kann man die Matrix eine Bilinearform mittels Basiswahl in die Form
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht.

Nach Satz 66 sind die Zahlen r, s eindeutig bestimmt. Das Tripel $(r, s, n - r - s)$ heißt die Signatur der Bilinearform σ.

Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte.

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 65 kann man die Matrix eine Bilinearform mittels Basiswahl in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht.
Nach Satz 66 sind die Zahlen r, s eindeutig bestimmt. Das Tripel $(r, s, n - r - s)$ heißt die Signatur der Bilinearform σ.

Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte. OBdA sind $\lambda_1, ..., \lambda_{r'}$ positiv,

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 65 kann man die Matrix eine Bilinearform mittels Basiswahl in die Form $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „$+1$“ und s Stuck „-1“ steht.

Nach Satz 66 sind die Zahlen r, s eindeutig bestimmt. Das Tripel $(r, s, n-r-s)$ heißt die Signatur der Bilinearform σ.

Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte. OBdA sind $\lambda_1, ..., \lambda_{r'}$ positiv, $\lambda_{r'+1}, ..., \lambda_{r'+s'}$ sind negativ.

Folgerung.

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 65 kann man die Matrix eine Bilinearform mittels Basiswahl in die Form $\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$ bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht.

Nach Satz 66 sind die Zahlen r, s eindeutig bestimmt. Das Tripel $(r, s, n - r - s)$ heißt die Signatur der Bilinearform σ.

Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte. OBdA sind $\lambda_1, ..., \lambda_{r'}$ positiv, $\lambda_{r'+1}, ..., \lambda_{r'+s'}$ sind negativ.

Folgerung. Die Zahl r in der Signatur der Bilinearform σ_A ist gleich $alg_A(\lambda_1) + ... + alg_A(\lambda_{r'})$.

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 65 kann man die Matrix eine Bilinearform mittels Basiswahl in die Form $\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& -1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$ bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1" und s Stuck „-1" steht.

Nach Satz 66 sind die Zahlen r, s eindeutig bestimmt. Das Tripel $(r, s, n-r-s)$ heißt die Signatur der Bilinearform σ.

Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte. OBdA sind $\lambda_1, ..., \lambda_{r'}$ positiv, $\lambda_{r'+1}, ..., \lambda_{r'+s'}$ sind negativ.

Folgerung. Die Zahl r in der Signatur der Bilinearform σ_A ist gleich $alg_A(\lambda_1) + ... + alg_A(\lambda_{r'})$.

Die Zahl s in der Signatur der Bilinearform σ_A ist gleich $alg_A(\lambda_{r'+1}) + ... + alg_A(\lambda_{r'+s'})$.

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 65 kann man die Matrix eine Bilinearform mittels Basiswahl in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht.

Nach Satz 66 sind die Zahlen r, s eindeutig bestimmt. Das Tripel $(r, s, n-r-s)$ heißt die Signatur der Bilinearform σ.

Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte. OBdA sind $\lambda_1, ..., \lambda_{r'}$ positiv, $\lambda_{r'+1}, ..., \lambda_{r'+s'}$ sind negativ.

Folgerung. Die Zahl r in der Signatur der Bilinearform σ_A ist gleich $alg_A(\lambda_1) + ... + alg_A(\lambda_{r'})$.

Die Zahl s in der Signatur der Bilinearform σ_A ist gleich $alg_A(\lambda_{r'+1}) + ... + alg_A(\lambda_{r'+s'})$.

Beweis ist analog zum Beweis der Folgerung aus Satz 65.

Signatur der symmetrischen Bilinearform

Nach Satz 65 kann man die Matrix eine Bilinearform mittels Basiswahl in die Form
$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$
bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht.
Nach Satz 66 sind die Zahlen r, s eindeutig bestimmt. Das Tripel $(r, s, n-r-s)$ heißt die Signatur der Bilinearform σ.

Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte. OBdA sind $\lambda_1, ..., \lambda_{r'}$ positiv, $\lambda_{r'+1}, ..., \lambda_{r'+s'}$ sind negativ.
Folgerung. Die Zahl r in der Signatur der Bilinearform σ_A ist gleich $alg_A(\lambda_1) + ... + alg_A(\lambda_{r'})$.
Die Zahl s in der Signatur der Bilinearform σ_A ist gleich $alg_A(\lambda_{r'+1}) + ... + alg_A(\lambda_{r'+s'})$.
Beweis ist analog zum Beweis der Folgerung aus Satz 65.

Satz 67

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix.*

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1*

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*

Geometrische Deutung:

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*

Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderaufführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung),

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*
Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderaufführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung), einer Streckung,

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*

Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderauführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung), einer Streckung, und wieder einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung)

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*
Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderaufführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung), einer Streckung, und wieder einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung) .
Folgerung.

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*

Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderauführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung), einer Streckung, und wieder einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung) .

Folgerung. *Sei A eine $n \times n$- Matrix.*

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*

Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderaufführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung), einer Streckung, und wieder einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung) .

Folgerung. *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O*

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*
Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderaufführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung), einer Streckung, und wieder einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung) .
Folgerung. *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O und eine symmetrische Matrix S s.d. $A = OS$.*

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*
Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderaufführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung), einer Streckung, und wieder einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung) .
Folgerung. *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O und eine symmetrische Matrix S s.d. $A = OS$.*
Beweis der Folgerung:

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*
Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderaufführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung), einer Streckung, und wieder einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung) .
Folgerung. *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O und eine symmetrische Matrix S s.d. $A = OS$.*
Beweis der Folgerung:

A

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*

Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderaufführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung), einer Streckung, und wieder einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung) .

Folgerung. *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O und eine symmetrische Matrix S s.d. $A = OS$.*

Beweis der Folgerung:

$A \stackrel{\text{Satz 67}}{=} O_1 \Lambda O$

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*

Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderaufführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung), einer Streckung, und wieder einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung) .

Folgerung. *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O und eine symmetrische Matrix S s.d. $A = OS$.*

Beweis der Folgerung:

$$A \overset{\text{Satz 67}}{=} O_1 \Lambda O = O_1 \underbrace{OO^t}_{Id} \Lambda O =$$

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*

Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderaufführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung), einer Streckung, und wieder einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung) .

Folgerung. *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O und eine symmetrische Matrix S s.d. $A = OS$.*

Beweis der Folgerung:

$$A \overset{\text{Satz 67}}{=} O_1 \Lambda O = O_1 \underbrace{OO^t}_{Id} \Lambda O = \underbrace{O_1 O}_{\text{orthogonal}}$$

Satz 67 *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O, O_1 und eine diagonale Matrix Λ s.d. $A = O_1 \Lambda O$.*

Geometrische Deutung: Jede lineare Abbildung ist die Hintereinanderaufführung einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung), einer Streckung, und wieder einer Drehung (oder einer Drechung und einer Spiegelung) .

Folgerung. *Sei A eine $n \times n$- Matrix. Dann gibt es orthogonale Matrizen O und eine symmetrische Matrix S s.d. $A = OS$.*

Beweis der Folgerung:

$$A \overset{\text{Satz 67}}{=} O_1 \Lambda O = O_1 \underbrace{OO^t}_{Id} \Lambda O = \underbrace{O_1 O}_{\text{orthogonal}} \underbrace{O^t \Lambda O}_{\text{symmetrisch}},$$

$\square$

Beweis des Satzes 67.

Beweis des Satzes 67. Betrachte $A^t A$. Sie ist symmetrisch:

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t\,t} = A^tA$,

Beweis des Satzes 67. Betrachte $A^t A$. Sie ist symmetrisch: $(A^t A)^t = A^t A^{t\,t} = A^t A$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Beweis des Satzes 67. Betrachte $A^t A$. Sie ist symmetrisch: $(A^t A)^t = A^t A^{t^t} = A^t A$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^t A}(o_i, o_i) = \lambda_i$

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^t{A^t}^t = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$.

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t^t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$.

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^t{A^t}^t = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \stackrel{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t\,t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$.

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^t A^{t^t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt
$\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) =$

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^t{A^t}^t = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt
$\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j$

Beweis des Satzes 67. Betrachte $A^t A$. Sie ist symmetrisch: $(A^t A)^t = A^t A^{t^t} = A^t A$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^t A}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^t A}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^t A}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t (Ao_j)$

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t^t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt
$\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \right.$.

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^t A^{t^t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^tAo_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \right.$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t^t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \right.$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t^t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t (Ao_j) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \right.$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal.

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t\,t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \stackrel{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^tAo_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \right.$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen,

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^t{A^t}^t = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \right.$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen, und dann normieren:
$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|} Ao_1, ...,$

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t^t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t (Ao_j) = \begin{cases} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen, und dann normieren:
$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|} Ao_1, ..., b_m =$

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^t{A^t}^t = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{smallmatrix} \right.$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen, und dann normieren:
$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|}Ao_1, ..., b_m = \frac{1}{|Ao_m|}Ao_m,$

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t^t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{smallmatrix} \right.$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen, und dann normieren:
$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|}Ao_1, ..., b_m = \frac{1}{|Ao_m|}Ao_m, b_{m+1} = \frac{1}{|o'_{m+1}|}o'_{m+1}, ...,$

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t^t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \right.$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen, und dann normieren:
$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|}Ao_1, ..., b_m = \frac{1}{|Ao_m|}Ao_m, b_{m+1} = \frac{1}{|o'_{m+1}|}o'_{m+1}, ..., b_n = \frac{1}{|o'_n|}o'_n$.

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^t{A^t}^t = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t (Ao_j) = \begin{cases} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen, und dann normieren:
$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|} Ao_1, ..., b_m = \frac{1}{|Ao_m|} Ao_m, b_{m+1} = \frac{1}{|o'_{m+1}|} o'_{m+1}, ..., b_n = \frac{1}{|o'_n|} o'_n$.
Betrachte die Matrix B s.d. $Be_i = b_i$. Die Matrix ist orthogonal.
Nach Konstruktion ist

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^t {A^t}^t = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{smallmatrix} \right.$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen, und dann normieren:
$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|} Ao_1, ..., b_m = \frac{1}{|Ao_m|} Ao_m, b_{m+1} = \frac{1}{|o'_{m+1}|} o'_{m+1}, ..., b_n = \frac{1}{|o'_n|} o'_n$.
Betrachte die Matrix B s.d. $Be_i = b_i$. Die Matrix ist orthogonal.
Nach Konstruktion ist $Ao_i = \gamma_i b_i$.

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t^t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \stackrel{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \begin{cases} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen, und dann normieren:
$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|}Ao_1, ..., b_m = \frac{1}{|Ao_m|}Ao_m, b_{m+1} = \frac{1}{|o'_{m+1}|}o'_{m+1}, ..., b_n = \frac{1}{|o'_n|}o'_n.$
Betrachte die Matrix B s.d. $Be_i = b_i$. Die Matrix ist orthogonal. Nach Konstruktion ist $Ao_i = \gamma_i b_i$. Dann ist $AOe_i =$

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t^t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \begin{cases} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen, und dann normieren:
$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|}Ao_1, ..., b_m = \frac{1}{|Ao_m|}Ao_m, b_{m+1} = \frac{1}{|o'_{m+1}|}o'_{m+1}, ..., b_n = \frac{1}{|o'_n|}o'_n$.
Betrachte die Matrix B s.d. $Be_i = b_i$. Die Matrix ist orthogonal. Nach Konstruktion ist $Ao_i = \gamma_i b_i$. Dann ist $AOe_i = \gamma_i Be_i$

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^tA^{t\,t} = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^t A o_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \begin{cases} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen, und dann normieren:
$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|}Ao_1, ..., b_m = \frac{1}{|Ao_m|}Ao_m, b_{m+1} = \frac{1}{|o'_{m+1}|}o'_{m+1}, ..., b_n = \frac{1}{|o'_n|}o'_n$.
Betrachte die Matrix B s.d. $Be_i = b_i$. Die Matrix ist orthogonal.
Nach Konstruktion ist $Ao_i = \gamma_i b_i$. Dann ist $AOe_i = \gamma_i Be_i$ und deswegen

$B^tAO =$

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^t{A^t}^t = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^tA^tAo_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \begin{cases} \lambda_i & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen, und dann normieren:
$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|}Ao_1, ..., b_m = \frac{1}{|Ao_m|}Ao_m, b_{m+1} = \frac{1}{|o'_{m+1}|}o'_{m+1}, ..., b_n = \frac{1}{|o'_n|}o'_n$.
Betrachte die Matrix B s.d. $Be_i = b_i$. Die Matrix ist orthogonal.
Nach Konstruktion ist $Ao_i = \gamma_i b_i$. Dann ist $AOe_i = \gamma_i Be_i$ und deswegen

$$B^tAO = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_n \end{pmatrix},$$

Beweis des Satzes 67. Betrachte A^tA. Sie ist symmetrisch: $(A^tA)^t = A^t{A^t}^t = A^tA$, und deswegen (Satz 65) mit Hilfe einer orthogonalen Transformation diagonalisierbar.

Dann gibt es eine orthonormale Basis $(o_1, ..., o_n)$ sodass $\sigma_{A^tA}(o_i, o_i) = \lambda_i$ und $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) \overset{\text{für } j \neq i}{=} 0$. OBdA ist $\lambda_1, ..., \lambda_m \neq 0$ und $\lambda_{m+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Betrachte die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_n$. Für $i, j < m$ gilt $\sigma_{A^tA}(o_i, o_j) = o_i^t A^tA o_j = (Ao_i)^t(Ao_j) = \begin{cases} \lambda_i \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$. Also, die Vektoren $Ao_1, ..., Ao_m$ sind nicht $\vec{0}$ und sind zueinander orthogonal. Mit Gramm-Schmidt'schen Verfahren kann man $Ao_1, ..., Ao_m$ bis zur orthogonalen Basis $(Ao_1, ..., Ao_m, o'_{m+1}, ..., o'_n)$ ergänzen, und dann normieren:
$b_1 = \frac{1}{|Ao_1|}Ao_1, ..., b_m = \frac{1}{|Ao_m|}Ao_m, b_{m+1} = \frac{1}{|o'_{m+1}|}o'_{m+1}, ..., b_n = \frac{1}{|o'_n|}o'_n$.
Betrachte die Matrix B s.d. $Be_i = b_i$. Die Matrix ist orthogonal.
Nach Konstruktion ist $Ao_i = \gamma_i b_i$. Dann ist $AOe_i = \gamma_i Be_i$ und deswegen

$$B^tAO = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_n \end{pmatrix},$$

□

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge.

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik,

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\qquad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\qquad d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $\qquad d\,(x, y) = d(y, x),$

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\quad d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $\quad d\,(x, y) = d(y, x),$

(Dreiecksungleichung) $\quad d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $\quad d(x,y) = d(y,x),$

(Dreiecksungleichung) $\quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$

Die Nicht-Negativität $d(x,y) \geq 0$ haben wir als zusätzliches Eigenschaft angegeben,

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(Symmetrie) $d(x, y) = d(y, x)$,

(Dreiecksungleichung) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Die Nicht-Negativität $d(x, y) \geq 0$ haben wir als zusätzliches Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt,

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\quad d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $\quad d\,(x, y) = d(y, x),$

(Dreiecksungleichung) $\quad d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Die Nicht-Negativität $d\,(x, y) \geq 0$ haben wir als zusätzliches Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt, und ist daher überflüssig:

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\quad d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $\quad d\,(x, y) = d(y, x),$

(Dreiecksungleichung) $\quad d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Die Nicht-Negativität $d\,(x, y) \geq 0$ haben wir als zusätzliches Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt, und ist daher überflüssig:

$2d(x, y) = d(x, y) + d(x, y)$

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $d\,(x, y) = d(y, x),$

(Dreiecksungleichung) $d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Die Nicht-Negativität $d\,(x, y) \geq 0$ haben wir als zusätzliches Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt, und ist daher überflüssig:

$2d(x, y) = d(x, y) + d(x, y) \overset{\text{(Symmetrie)}}{=}$

$d(x, y) + d(y, x)$

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $\quad d(x, y) = d(y, x),$

(Dreiecksungleichung) $\quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Die Nicht-Negativität $d(x, y) \geq 0$ haben wir als zusätzliches Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt, und ist daher überflüssig:

$$2d(x, y) = d(x, y) + d(x, y) \overset{\text{(Symmetrie)}}{=}$$
$$d(x, y) + d(y, x) \overset{\text{(Dreiecksungleichung)}}{\geq} d(x, x)$$

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\quad d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $\quad d\,(x, y) = d(y, x),$

(Dreiecksungleichung) $\quad d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Die Nicht-Negativität $d\,(x, y) \geq 0$ haben wir als zusätzliches Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt, und ist daher überflüssig:

$$2d(x, y) = d(x, y) + d(x, y) \overset{\text{(Symmetrie)}}{=} d(x, y) + d(y, x) \overset{\text{(Dreiecksungleichung)}}{\geq} d(x, x) \overset{\text{(Definitheit)}}{=} 0$$

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\quad d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $\quad d\,(x, y) = d(y, x),$

(Dreiecksungleichung) $\quad d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Die Nicht-Negativität $d\,(x, y) \geq 0$ haben wir als zusätzliches Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt, und ist daher überflüssig:

$$2d(x, y) = d(x, y) + d(x, y) \overset{\text{(Symmetrie)}}{=}$$

$$d(x, y) + d(y, x) \overset{\text{(Dreiecksungleichung)}}{\geq} d(x, x) \overset{\text{(Definitheit)}}{=} 0 \quad \Rightarrow d(x, y) \geq 0.$$

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $d\,(x, y) = d(y, x),$

(Dreiecksungleichung) $d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Die Nicht-Negativität $d\,(x, y) \geq 0$ haben wir als zusätzliches Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt, und ist daher überflüssig:

$$2d(x, y) = d(x, y) + d(x, y) \overset{\text{(Symmetrie)}}{=} d(x, y) + d(y, x) \overset{\text{(Dreiecksungleichung)}}{\geq} d(x, x) \overset{\text{(Definitheit)}}{=} 0 \quad \Rightarrow d(x, y) \geq 0.$$

Das Paar (X, d) heißt ein metrischer Raum.

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $d\,(x, y) = d(y, x),$

(Dreiecksungleichung) $d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Die Nicht-Negativität $d\,(x, y) \geq 0$ haben wir als zusätzliches Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt, und ist daher überflüssig:

$$2d(x, y) = d(x, y) + d(x, y) \overset{\text{(Symmetrie)}}{=} d(x, y) + d(y, x) \overset{\text{(Dreiecksungleichung)}}{\geq} d(x, x) \overset{\text{(Definitheit)}}{=} 0 \quad \Rightarrow d(x, y) \geq 0.$$

Das Paar (X, d) heißt ein metrischer Raum.

Eine Abbildung I, welche die Metrik erhält,

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\quad d\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $\quad d\,(x, y) = d(y, x),$

(Dreiecksungleichung) $\quad d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Die Nicht-Negativität $d\,(x, y) \geq 0$ haben wir als zusätzliches Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt, und ist daher überflüssig:

$$2d(x, y) = d(x, y) + d(x, y) \overset{\text{(Symmetrie)}}{=} d(x, y) + d(y, x) \overset{\text{(Dreiecksungleichung)}}{\geq} d(x, x) \overset{\text{(Definitheit)}}{=} 0 \quad \Rightarrow d(x, y) \geq 0.$$

Das Paar (X, d) heißt ein metrischer Raum.

Eine Abbildung I, welche die Metrik erhält, d.h., $d(I(x), I(y)) = d(x, y)$, heißt Isometrie

Metrische Räume

Def. 58 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik, wenn $\forall x, y, z \in X$ die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(Definitheit) $\quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(Symmetrie) $\quad d(x, y) = d(y, x),$

(Dreiecksungleichung) $\quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Die Nicht-Negativität $d(x, y) \geq 0$ haben wir als zusätzliches Eigenschaft angegeben, obwohl sie aus den anderen Bedingungen folgt, und ist daher überflüssig:

$$2d(x, y) = d(x, y) + d(x, y) \overset{\text{(Symmetrie)}}{=} d(x, y) + d(y, x) \overset{\text{(Dreiecksungleichung)}}{\geq} d(x, x) \overset{\text{(Definitheit)}}{=} 0 \quad \Rightarrow d(x, y) \geq 0.$$

Das Paar (X, d) heißt ein metrischer Raum.

Eine Abbildung I, welche die Metrik erhält, d.h., $d(I(x), I(y)) = d(x, y)$, heißt Isometrie (oder Bewegung, Kongruenz).

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum.

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum.
Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}$,

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u, v) := |u - v| := \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$.

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u, v) := |u - v| := \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik $d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u, v) := |u - v| := \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit)

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u, v) := |u - v| := \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $\quad d\,(u - v, u - v) = 0$

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u,v) := |u-v| := \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d\,(u-v, u-v) = 0$
$$\overset{\text{Def. 52 – Positivdefinitheit}}{\iff} \quad u - v$$

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u, v) := |u - v| := \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d\,(u - v, u - v) = 0$

$$\overset{\text{Def. 52 – Positivdefinitheit}}{\iff} \quad u - v = \vec{0} \iff u = v,$$

(Symmetrie)

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u,v) := |u-v| := \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d\,(u-v, u-v) = 0 \overset{\text{Def. 52 – Positivdefinitheit}}{\iff} u - v = \vec{0} \iff u = v,$

(Symmetrie) $d(u,v) =$

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u,v) := |u - v| := \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d\,(u - v, u - v) = 0$
$$\overset{\text{Def. 52 – Positivdefinitheit}}{\iff} \quad u - v = \vec{0} \iff u = v,$$

(Symmetrie) $d(u,v) = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} =$

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik $d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u,v) := |u-v| := \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d\,(u-v, u-v) = 0$

$$\overset{\text{Def. 52 – Positivdefinitheit}}{\Longleftrightarrow} \quad u - v = \vec{0} \Longleftrightarrow u = v,$$

(Symmetrie) $d(u,v) = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle} =$

$$\sqrt{\langle -1\cdot(v-u), -1\cdot(v-u)\rangle}$$

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u,v) := |u - v| := \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d\,(u - v, u - v) = 0$
$$\overset{\text{Def. 52 – Positivdefinitheit}}{\iff} u - v = \vec{0} \iff u = v,$$

(Symmetrie) $d(u,v) = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} =$
$$\sqrt{\langle -1 \cdot (v - u), -1 \cdot (v - u)\rangle} \overset{\text{Bilinerität}}{=}$$

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u,v) := |u-v| := \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d\,(u-v, u-v) = 0$
$$\overset{\text{Def. 52 – Positivdefinitheit}}{\iff} u - v = \vec{0} \iff u = v,$$

(Symmetrie) $d(u,v) = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle} =$
$$\sqrt{\langle -1\cdot(v-u), -1\cdot(v-u)\rangle} \overset{\text{Bilinerität}}{=} \sqrt{\langle v-u, v-u\rangle}$$

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u,v) := |u - v| := \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d\,(u - v, u - v) = 0$

$$\overset{\text{Def. 52 – Positivdefinitheit}}{\iff} \quad u - v = \vec{0} \iff u = v,$$

(Symmetrie) $d(u,v) = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} =$

$$\sqrt{\langle -1 \cdot (v - u), -1 \cdot (v - u)\rangle} \overset{\text{Bilinerität}}{=} \sqrt{\langle v - u, v - u\rangle} = d(v,u).$$

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u,v) := |u-v| := \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d\,(u-v, u-v) = 0$
$$\overset{\text{Def. 52 – Positivdefinitheit}}{\iff} u - v = \vec{0} \iff u = v,$$

(Symmetrie) $d(u,v) = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle} =$
$$\sqrt{\langle -1\cdot(v-u), -1\cdot(v-u)\rangle} \overset{\text{Bilinerität}}{=} \sqrt{\langle v-u, v-u\rangle} = d(v,u).$$

(Dreiecksungleichung)

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u,v) := |u - v| := \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d\,(u - v, u - v) = 0 \overset{\text{Def. 52 – Positivdefinitheit}}{\Longleftrightarrow} u - v = \vec{0} \Longleftrightarrow u = v,$

(Symmetrie) $d(u,v) = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} = \sqrt{\langle -1 \cdot (v - u), -1 \cdot (v - u)\rangle} \overset{\text{Bilinerität}}{=} \sqrt{\langle v - u, v - u\rangle} = d(v,u).$

(Dreiecksungleichung) $d\,(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u, v) := |u - v| := \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d(u - v, u - v) = 0$
$\overset{\text{Def. 52 – Positivdefinitheit}}{\iff} u - v = \vec{0} \iff u = v$,

(Symmetrie) $d(u, v) = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} =$
$\sqrt{\langle -1 \cdot (v - u), -1 \cdot (v - u) \rangle} \overset{\text{Bilinerität}}{=} \sqrt{\langle v - u, v - u \rangle} = d(v, u)$.

(Dreiecksungleichung) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$: Folgerung aus Cauchy-Schwarz,

Wicht. Bsp. – Standard-Metrik Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Raum. Wir definieren die Metrik
$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(u,v) := |u-v| := \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$. Das ist tatsächlich eine Metrik:

(Definitheit) $d\,(u-v, u-v) = 0 \overset{\text{Def. 52 – Positivdefinitheit}}{\iff} u - v = \vec{0} \iff u = v,$

(Symmetrie) $d(u,v) = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle} = \sqrt{\langle -1\cdot(v-u), -1\cdot(v-u)\rangle} \overset{\text{Bilinerität}}{=} \sqrt{\langle v-u, v-u\rangle} = d(v,u).$

(Dreiecksungleichung) $d\,(u,w) \le d(u,v) + d(v,w)$: Folgerung aus Cauchy-Schwarz, sieh Vorlesung 23.

Bsp.

Bsp. Die Parallelverschiebingen $T_w : V \to V$,

Bsp. Die Parallelverschiebingen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$

Bsp. Die Parallelverschiebingen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) =$

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u{+}w, v{+}w) =$

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u{+}w, v{+}w) = |u{+}w{-}(v{+}w)| =$

Bsp. Die Parallelverschiebingen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| =$

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v)$.
Bemerkung.

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.

Bsp. Die Parallelverschiebingen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v).$
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp.

Bsp. Die Parallelverschiebingen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57)

Bsp. Die Parallelverschiebingen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk

Bsp. Die Parallelverschiebingen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.

Bsp. Die Parallelverschiebingen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.
Lemma 38

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.
Lemma 38 Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Bsp. Die Parallelverschiebingen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v).$
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.
Lemma 38 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge
$Iso(X, d) := \{\phi : X \to X \mid \ \phi \text{ ist eine bijektive Isometrie}\}$

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u{+}w, v{+}w) = |u{+}w{-}(v{+}w)| = |u{-}v| = d(u, v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.
Lemma 38 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge $Iso(X, d) := \{\phi : X \to X \mid \ \phi \text{ ist eine bijektive Isometrie}\}$ eine Gruppe bzgl. der Verkettung

Bsp. Die Parallelverschiebingen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.
Lemma 38 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge $Iso(X, d) := \{\phi : X \to X \mid \ \phi \text{ ist eine bijektive Isometrie}\}$ eine Gruppe bzgl. der Verkettung.
Bemerkung.

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.
Lemma 38 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge $Iso(X, d) := \{\phi : X \to X \mid\ \phi \text{ ist eine bijektive Isometrie}\}$ eine Gruppe bzgl. der Verkettung.
Bemerkung. Eine Isometrie ist stets eine injektive Abbildung

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u,v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.
Lemma 38 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge $Iso(X, d) := \{\phi : X \to X \mid \ \phi \text{ ist eine bijektive Isometrie}\}$ eine Gruppe bzgl. der Verkettung.
Bemerkung. Eine Isometrie ist stets eine injektive Abbildung.
Tatsächlich, ist $f(x) = f(y)$, so ist $d(f(x), f(y)) = 0$

Bsp. Die Parallelverschiebingen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.
Lemma 38 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge $Iso(X, d) := \{\phi : X \to X \mid \phi \text{ ist eine bijektive Isometrie}\}$ eine Gruppe bzgl. der Verkettung.
Bemerkung. Eine Isometrie ist stets eine injektive Abbildung. Tatsächlich, ist $f(x) = f(y)$, so ist $d(f(x), f(y)) = 0$, folglich $d(x, y) = 0$

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u,v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.
Lemma 38 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge $Iso(X, d) := \{\phi : X \to X \mid \ \phi \text{ ist eine bijektive Isometrie}\}$ eine Gruppe bzgl. der Verkettung.
Bemerkung. Eine Isometrie ist stets eine injektive Abbildung. Tatsächlich, ist $f(x) = f(y)$, so ist $d(f(x), f(y)) = 0$, folglich $d(x, y) = 0$, folglich $x \overset{\text{(Definitheit)}}{=} y$

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u,v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.
Lemma 38 Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge $Iso(X,d) := \{\phi : X \to X \mid \ \phi \text{ ist eine bijektive Isometrie}\}$ eine Gruppe bzgl. der Verkettung.
Bemerkung. Eine Isometrie ist stets eine injektive Abbildung.
Tatsächlich, ist $f(x) = f(y)$, so ist $d(f(x), f(y)) = 0$, folglich $d(x,y) = 0$, folglich $x \overset{\text{(Definitheit)}}{=} y$.
Es gibt aber Beispiele von nichtbijektiven Isometrien

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u,v)$.
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.
Lemma 38 Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge $Iso(X,d) := \{\phi : X \to X \mid \ \phi \text{ ist eine bijektive Isometrie}\}$ eine Gruppe bzgl. der Verkettung.
Bemerkung. Eine Isometrie ist stets eine injektive Abbildung. Tatsächlich, ist $f(x) = f(y)$, so ist $d(f(x), f(y)) = 0$, folglich $d(x,y) = 0$, folglich $x \overset{\text{(Definitheit)}}{=} y$.
Es gibt aber Beispiele von nichtbijektiven Isometrien; sie werden in Analysis III konstruiert.

Bsp. Die Parallelverschiebungen $T_w : V \to V,\ T_w(v) := v + w$ sind Isometrien für für die Standard-Metrik.
In der Tat,
$d(T_w(u), T_w(v)) = d(u+w, v+w) = |u+w-(v+w)| = |u-v| = d(u, v).$
Bemerkung. Parallelveschiebungen sind nicht lineare Abbildungen.
Bemerkung $T_u \circ T_v = T_{u+v}$.
Bsp. Die orthogonale Endomorphismen (sieh Def. 57) sind Isometrien für für die Standard-Metrk, wie bewiesen in Vorl. 23.
Lemma 38 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge $Iso(X, d) := \{\phi : X \to X \mid \ \phi \text{ ist eine bijektive Isometrie}\}$ eine Gruppe bzgl. der Verkettung.
Bemerkung. Eine Isometrie ist stets eine injektive Abbildung. Tatsächlich, ist $f(x) = f(y)$, so ist $d(f(x), f(y)) = 0$, folglich $d(x, y) = 0$, folglich $x \overset{\text{(Definitheit)}}{=} y$.
Es gibt aber Beispiele von nichtbijektiven Isometrien; sie werden in Analysis III konstruiert.

Beweis der Lemma 38.

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist,

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X, d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X, d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i)

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X, d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X, d)$

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X, d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X, d)$. Dann ist

$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y))$

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X, d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X, d)$. Dann ist

$$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'}))$$

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X,d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X,d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X,d)$. Dann ist

$$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X,d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X,d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X,d)$. Dann ist

$$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X,d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X,d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X,d)$. Dann ist

$$d(\phi\circ\psi(x), \phi\circ\psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x,y).$$

(ii)

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X,d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X,d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X,d)$. Dann ist

$$d(\phi\circ\psi(x), \phi\circ\psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x,y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X,d)$.

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X,d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X,d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X,d)$. Dann ist

$$d(\phi\circ\psi(x), \phi\circ\psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x,y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X,d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$,

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X, d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X, d)$. Dann ist

$$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x, y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X, d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X,d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X,d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X,d)$. Dann ist
$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$
$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x,y)$.
(ii) Seien $\phi \in Iso(X,d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.
$d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y))$

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X, d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X, d)$. Dann ist

$$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x, y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X, d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.

$$d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\underbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}_{x}, \underbrace{\phi(\phi^{-1}(y))}_{y})$$

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X,d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X,d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X,d)$. Dann ist

$$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x,y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X,d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.

$$d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\underbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}_{x}, \underbrace{\phi(\phi^{-1}(y))}_{y}) \overset{\text{Nach Definition von } \phi^{-1}}{=} d(x,y),$$

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X, d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X, d)$. Dann ist

$$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x, y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X, d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.

$$d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\underbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}_{x}, \underbrace{\phi(\phi^{-1}(y))}_{y}) \overset{\text{Nach Definition von } \phi^{-1}}{=} d(x, y),$$

□

Folgerung

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X,d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X,d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X,d)$. Dann ist

$$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x,y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X,d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.

$$d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\underbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}_{x}, \underbrace{\phi(\phi^{-1}(y))}_{y}) \overset{\text{Nach Definition von } \phi^{-1}}{=} d(x,y), \qquad \square$$

Folgerung Die Abbildungen der Form $F_{f,w}(v) :=$

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X,d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X,d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X,d)$. Dann ist

$$d(\phi\circ\psi(x), \phi\circ\psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x),\psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x,y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X,d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.

$$d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\underbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}_{x}, \underbrace{\phi(\phi^{-1}(y))}_{y}) \overset{\text{Nach Definition von } \phi^{-1}}{=} d(x,y), \qquad \square$$

Folgerung Die Abbildungen der Form $F_{f,w}(v) := T_w \circ f(v)$

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X, d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X, d)$. Dann ist

$$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x, y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X, d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.

$$d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\underbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}_{x}, \underbrace{\phi(\phi^{-1}(y))}_{y}) \overset{\text{Nach Definition von } \phi^{-1}}{=} d(x, y), \qquad \square$$

Folgerung Die Abbildungen der Form $F_{f,w}(v) := T_w \circ f(v) := f(v) + w$,

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X, d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X, d)$. Dann ist

$$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x, y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X, d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.

$$d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\underbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}_{x}, \underbrace{\phi(\phi^{-1}(y))}_{y}) \overset{\text{Nach Definition von } \phi^{-1}}{=} d(x, y), \qquad \square$$

Folgerung Die Abbildungen der Form $F_{f,w}(v) := T_w \circ f(v) := f(v) + w$, wobei f eine Orthogonale Abbildung ist, und T_w die Parallelverschiebung ist

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X,d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X,d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X,d)$. Dann ist

$$d(\phi\circ\psi(x), \phi\circ\psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x),\psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x,y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X,d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.

$$d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\underbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}_{x}, \underbrace{\phi(\phi^{-1}(y))}_{y}) \overset{\text{Nach Definition von } \phi^{-1}}{=} d(x,y), \qquad \square$$

Folgerung Die Abbildungen der Form $F_{f,w}(v) := T_w \circ f(v) := f(v) + w$, wobei f eine Orthogonale Abbildung ist, und T_w die Parallelverschiebung ist, sind bijektive Isometrien.

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X,d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X,d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X,d)$. Dann ist

$$d(\phi\circ\psi(x), \phi\circ\psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x,y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X,d)$. Z.Z.: $\phi^{-1}: X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.

$$d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\underbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}_{x}, \underbrace{\phi(\phi^{-1}(y))}_{y}) \overset{\text{Nach Definition von } \phi^{-1}}{=} d(x,y), \qquad \square$$

Folgerung Die Abbildungen der Form $F_{f,w}(v) := T_w \circ f(v) := f(v) + w$, wobei f eine Orthogonale Abbildung ist, und T_w die Parallelverschiebung ist, sind bijektive Isometrien.

Tatsächlich, solche Abbildungen sind Verkettung von zwei Bijektionen und sind deswegen bijektiv (Lemma 3 / Hausaufgabe 2c Blatt 2)

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X, d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X, d)$. Dann ist

$$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x, y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X, d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.

$$d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\underbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}_{x}, \underbrace{\phi(\phi^{-1}(y))}_{y}) \overset{\text{Nach Definition von } \phi^{-1}}{=} d(x, y), \qquad \square$$

Folgerung Die Abbildungen der Form $F_{f,w}(v) := T_w \circ f(v) := f(v) + w$, wobei f eine Orthogonale Abbildung ist, und T_w die Parallelverschiebung ist, sind bijektive Isometrien.

Tatsächlich, solche Abbildungen sind Verkettung von zwei Bijektionen und sind deswegen bijektiv (Lemma 3 / Hausaufgabe 2c Blatt 2), folglich sind sie Elemente der Gruppe *Iso*

Beweis der Lemma 38. Nach Satz 3 ist die Menge von Bijektionen eine Gruppe. Nach Satz 5 genügend es zu zeigen, dass $Iso(X, d)$ eine Untergruppe ist, d.h., dass $Iso(X, d)$ abgeschlossen bzgl.
(i) multiplizieren und (ii) invertieren ist.
(i) Seien $\phi, \psi \in Iso(X, d)$. Dann ist

$$d(\phi \circ \psi(x), \phi \circ \psi(y)) = d(\phi(\underbrace{\psi(x)}_{x'}), \phi(\underbrace{\psi(y)}_{y'})) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\psi(x), \psi(y)) \overset{\text{Weil } \psi \text{ eine Isometrie ist}}{=} d(x, y).$$

(ii) Seien $\phi \in Iso(X, d)$. Z.Z.: $\phi^{-1} : X \to X$, $\phi(\phi^{-1}(x)) = x$ ist eine Isometrie.

$$d(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)) \overset{\text{Weil } \phi \text{ eine Isometrie ist}}{=}$$

$$d(\underbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}_{x}, \underbrace{\phi(\phi^{-1}(y))}_{y}) \overset{\text{Nach Definition von } \phi^{-1}}{=} d(x, y),$$

□

Folgerung Die Abbildungen der Form $F_{f,w}(v) := T_w \circ f(v) := f(v) + w$, wobei f eine Orthogonale Abbildung ist, und T_w die Parallelverschiebung ist, sind bijektive Isometrien.

Tatsächlich, solche Abbildungen sind Verkettung von zwei Bijektionen und sind deswegen bijektiv (Lemma 3 / Hausaufgabe 2c Blatt 2), folglich sind sie Elemente der Gruppe Iso, d.h., bijektive Isometrien.

Folgerung in Koordinaten

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$.

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V \ , \ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V\ ,\ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist,

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V\ ,\ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle \; , \; \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V \; , \; F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle \ , \ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V \ , \ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V\ ,\ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V \ , \ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68 *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums*

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V\ ,\ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68 *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums ist wie in* $(*)$

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V\ ,\ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68 *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums ist wie in* $(*)$

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V\ ,\ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68 *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums ist wie in* $(*)$

Z.B.,

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V\ ,\ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68 *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums ist wie in* $(*)$

Z.B., Im Standard-Raum $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt:

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V\ ,\ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68 *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums ist wie in* $(*)$

Z.B., Im Standard-Raum $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt:

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen
$F_{O,b} : V \to V\ ,\ F_{O,b} := Ox + b,$ $(*)$
wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68 *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums ist wie in* $(*)$

Z.B., Im Standard-Raum $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt:
jede Isometrie g kann man als

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V\ ,\ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68 *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums ist wie in* $(*)$

Z.B., Im Standard-Raum $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt:
jede Isometrie g kann man als

$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ schreiben,

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen
$$F_{O,b} : V \to V\ ,\ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$
wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68 *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums ist wie in* $(*)$

Z.B., Im Standard-Raum $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt:
jede Isometrie g kann man als
$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ schreiben,}$$
wobei O eine orthogonale Matrix ist

Folgerung in Koordinaten Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V\ ,\ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68 *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums ist wie in* $(*)$

Z.B., Im Standard-Raum $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt:
jede Isometrie g kann man als

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = O\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ schreiben,}$$

wobei O eine orthogonale Matrix ist.
In Worten Jede Isometrie (der Standard-Metrik) ist Verkettung von Drehung und Verschiebung.

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Hilfslemma 1

.

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*

.

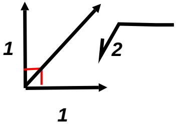
Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v \rangle = 0 \iff |u - v| = \sqrt{2}$

.

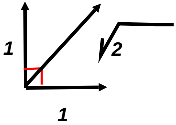
Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Hilfslemma 1 *Sei $|u| = |v| = 1$. Dann gilt:*
$\langle u, v \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |u - v| = \sqrt{2}$



Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |u - v| = \sqrt{2}$

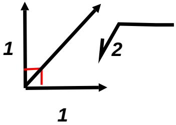


Beweis $\Longrightarrow$:

.

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |u - v| = \sqrt{2}$

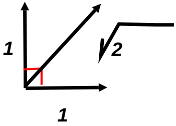


Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| =$

.

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |u - v| = \sqrt{2}$

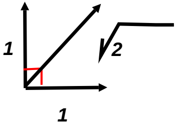


Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} =$

.

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

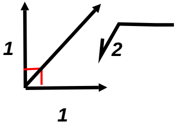
Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \iff |u - v| = \sqrt{2}$



Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} =$
$\sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} =$.

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

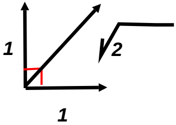
Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \iff |u - v| = \sqrt{2}$



Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} =$
$\sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} = \sqrt{1 + 0 + 1} =$.

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

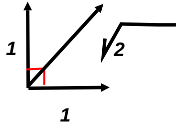
Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |u - v| = \sqrt{2}$



Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$.

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

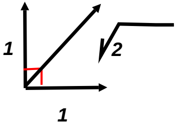
Hilfslemma 1 *Sei $|u| = |v| = 1$. Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \iff |u - v| = \sqrt{2}$



Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$.
Beweis $\Longleftarrow$:

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

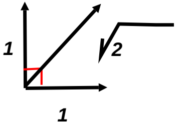
Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$*. Dann gilt:*
$\langle u, v \rangle = 0 \quad \iff \quad |u - v| = \sqrt{2}$



Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} =$
$\sqrt{\langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}.$
Beweis $\Longleftarrow$:
$=$

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

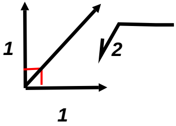
Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |u - v| = \sqrt{2}$



Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} =$
$\sqrt{\langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$.
Beweis $\Longleftarrow$:
$|u - v|^2 \quad =$

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

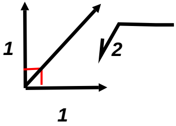
Hilfslemma 1 *Sei $|u| = |v| = 1$. Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \iff |u - v| = \sqrt{2}$



Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$.
Beweis $\Longleftarrow$:
$|u - v|^2 \quad = \quad \langle u - v, u - v\rangle$

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

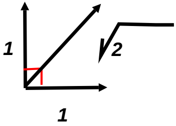
Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \iff |u - v| = \sqrt{2}$



Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$.
Beweis $\Longleftarrow$:
$$|u - v|^2 = \langle u - v, u - v\rangle = \langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle$$

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \quad \iff \quad |u - v| = \sqrt{2}$

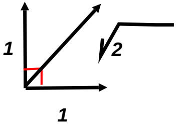


Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} =$
$\sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$.
Beweis $\Longleftarrow$:

$$\begin{array}{ccccc} |u - v|^2 & = & \langle u - v, u - v\rangle & = & \langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ 2 & = & & = & \end{array}$$

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \iff |u - v| = \sqrt{2}$

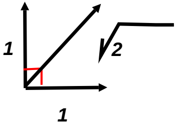


Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} =$
$\sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}.$
Beweis $\Longleftarrow$:

$$\begin{array}{ccccc} |u - v|^2 & = & \langle u - v, u - v\rangle & = & \langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ 2 & = & & = & 1 - 2\langle u, v\rangle + 1 \end{array}$$

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \iff |u - v| = \sqrt{2}$



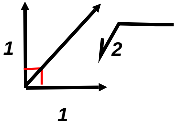
Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} =$
$\sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$.
Beweis $\Longleftarrow$:

$$\begin{array}{ccccc} |u - v|^2 & = & \langle u - v, u - v\rangle & = & \langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ 2 & = & & = & 1 - 2\langle u, v\rangle + 1 \end{array}$$

Also, $\langle u, v\rangle = 0$.

Drei Hilfslemmata vor dem Beweis.

Hilfslemma 1 *Sei* $|u| = |v| = 1$. *Dann gilt:*
$\langle u, v\rangle = 0 \iff |u - v| = \sqrt{2}$



Beweis $\Longrightarrow$: $|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle} =$
$\sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$.
Beweis $\Longleftarrow$:

$$\begin{array}{ccccc} |u - v|^2 & = & \langle u - v, u - v\rangle & = & \langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ 2 & = & & = & 1 - 2\langle u, v\rangle + 1 \end{array}$$

Also, $\langle u, v\rangle = 0$. $\square$

Hilfslemma 2

Hilfslemma 2 *Sei* $F : V \to V$ *eine Isometrie mit* $F(\vec{0}) = \vec{0}$*. Dann* $\forall v \in V$ *gilt:*

Hilfslemma 2 *Sei* $F : V \to V$ *eine Isometrie mit* $F(\vec{0}) = \vec{0}$. *Dann* $\forall v \in V$ *gilt:* $F(tv) = tF(v)$.

Hilfslemma 2 *Sei* $F : V \to V$ *eine Isometrie mit* $F(\vec{0}) = \vec{0}$*. Dann* $\forall v \in V$ *gilt:* $F(tv) = tF(v)$*.*

Folgerung

Hilfslemma 2 *Sei* $F : V \to V$ *eine Isometrie mit* $F(\vec{0}) = \vec{0}$. *Dann* $\forall v \in V$ *gilt:* $F(tv) = tF(v)$.

Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.

Bemerkung

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

Hilfslemma 2 *Sei* $F : V \to V$ *eine Isometrie mit* $F(\vec{0}) = \vec{0}$. *Dann* $\forall v \in V$ *gilt:* $F(tv) = tF(v)$.
Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$|F(v)| =$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}|$

Hilfslemma 2 *Sei* $F : V \to V$ *eine Isometrie mit* $F(\vec{0}) = \vec{0}$. *Dann* $\forall v \in V$ *gilt:* $F(tv) = tF(v)$.
Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0})$$

Hilfslemma 2 *Sei $F: V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.
Bemerkung. Für die Isometrie $F: V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:
$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0})$ Weil $F(\vec{0})$

Hilfslemma 2 *Sei* $F : V \to V$ *eine Isometrie mit* $F(\vec{0}) = \vec{0}$. *Dann* $\forall v \in V$ *gilt:* $F(tv) = tF(v)$.

Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0})^{\text{Weil } F(\vec{0})}$$

Hilfslemma 2 *Sei* $F : V \to V$ *eine Isometrie mit* $F(\vec{0}) = \vec{0}$*. Dann* $\forall v \in V$ *gilt:* $F(tv) = tF(v)$*.*

Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$*.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0})}{}$$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:
$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0})$$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:
$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0})$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}|$$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis.

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:
$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|$.
Beweis. Nach Bemerkung gilt

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| =$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| =$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle$$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:
$|F(v)| = |v|$,
$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,
$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.
Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:
$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|$.
Beweis. Nach Bemerkung gilt:
$|F(v)| = |v|$,
$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,
$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.
Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:
$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v)\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$
$\underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2}$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$
$$\underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + |v|^2$$

$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v)\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle + |v|^2$$

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2$$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v)\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$
$$\underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle + |v|^2$$

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2$$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v)\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle + |v|^2$$

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 = (t-1)^2 \cdot |v|^2$$

Hilfslemma 2 *Sei* $F: V \to V$ *eine Isometrie mit* $F(\vec{0}) = \vec{0}$. *Dann* $\forall v \in V$ *gilt:* $F(tv) = tF(v)$.

Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.

Bemerkung. Für die Isometrie $F: V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + |v|^2$$

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 =$$

$$(t-1)^2 \cdot |v|^2 = t^2 \cdot |v|^2 - 2t \cdot |v|^2 + |v|^2$$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + |v|^2$$

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 = (t-1)^2 \cdot |v|^2 = t^2 \cdot |v|^2 - 2t \cdot |v|^2 + |v|^2.$$

Dann $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle$

Hilfslemma 2 *Sei* $F : V \to V$ *eine Isometrie mit* $F(\vec{0}) = \vec{0}$. *Dann* $\forall v \in V$ *gilt:* $F(tv) = tF(v)$.

Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + |v|^2$$

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 = (t-1)^2 \cdot |v|^2 = t^2 \cdot |v|^2 - 2t \cdot |v|^2 + |v|^2.$$

Dann $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle = t \cdot |v| \cdot |v|$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:
$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|$.
Beweis. Nach Bemerkung gilt:
$|F(v)| = |v|$,
$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,
$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.
Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:
$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$
$\underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + |v|^2$

$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 =$
$(t-1)^2 \cdot |v|^2 = t^2 \cdot |v|^2 - 2t \cdot |v|^2 + |v|^2$.
Dann $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle = t \cdot |v| \cdot |v| = |F(t \cdot v)| \cdot |F(v)|$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:
$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|$.
Beweis. Nach Bemerkung gilt:
$|F(v)| = |v|$,
$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,
$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.
Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:
$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$
$\underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + |v|^2$
$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 =$
$(t-1)^2 \cdot |v|^2 = t^2 \cdot |v|^2 - 2t \cdot |v|^2 + |v|^2$.
Dann $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle = t \cdot |v| \cdot |v| = |F(t \cdot v)| \cdot |F(v)|$. Nach Cauchy-Schwarz (Lemma 37) ist dann $F(t \cdot v)$ und $F(v)$ linear abhängig,

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + |v|^2$$

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 = (t-1)^2 \cdot |v|^2 = t^2 \cdot |v|^2 - 2t \cdot |v|^2 + |v|^2.$$

Dann $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle = t \cdot |v| \cdot |v| = |F(t \cdot v)| \cdot |F(v)|$. Nach Cauchy-Schwarz (Lemma 37) ist dann $F(t \cdot v)$ und $F(v)$ linear abhängig, dann $F(t \cdot v) = \lambda F(v)$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:
$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|$.
Beweis. Nach Bemerkung gilt:
$|F(v)| = |v|$,
$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,
$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.
Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:
$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v)\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$
$\underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle + |v|^2$

$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 = (t-1)^2 \cdot |v|^2 = t^2 \cdot |v|^2 - 2t \cdot |v|^2 + |v|^2$.
Dann $\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle = t \cdot |v| \cdot |v| = |F(t \cdot v)| \cdot |F(v)|$. Nach Cauchy-Schwarz (Lemma 37) ist dann $F(t \cdot v)$ und $F(v)$ linear abhängig, dann $F(t \cdot v) = \lambda F(v)$. Dann aus $\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + |v|^2$$

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 = (t-1)^2 \cdot |v|^2 = t^2 \cdot |v|^2 - 2t \cdot |v|^2 + |v|^2.$$

Dann $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle = t \cdot |v| \cdot |v| = |F(t \cdot v)| \cdot |F(v)|$. Nach Cauchy-Schwarz (Lemma 37) ist dann $F(t \cdot v)$ und $F(v)$ linear abhängig, dann $F(t \cdot v) = \lambda F(v)$. Dann aus $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle = t \cdot |v| \cdot |v|$ folgt

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + |v|^2$$

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 =$$

$$(t-1)^2 \cdot |v|^2 = t^2 \cdot |v|^2 - 2t \cdot |v|^2 + |v|^2.$$

Dann $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle = t \cdot |v| \cdot |v| = |F(t \cdot v)| \cdot |F(v)|$. Nach Cauchy-Schwarz (Lemma 37) ist dann $F(t \cdot v)$ und $F(v)$ linear abhängig, dann $F(t \cdot v) = \lambda F(v)$. Dann aus $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle = t \cdot |v| \cdot |v|$ folgt $\lambda = t$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*

Folgerung. $Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.

Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:

$|F(v)| = |v|$,

$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,

$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.

Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v) \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$
$$\underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle + |v|^2$$

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 =$$
$$(t-1)^2 \cdot |v|^2 = t^2 \cdot |v|^2 - 2t \cdot |v|^2 + |v|^2.$$

Dann $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle = t \cdot |v| \cdot |v| = |F(t \cdot v)| \cdot |F(v)|$. Nach Cauchy-Schwarz (Lemma 37) ist dann $F(t \cdot v)$ und $F(v)$ linear abhängig, dann $F(t \cdot v) = \lambda F(v)$. Dann aus $\langle F(t \cdot v), F(v) \rangle = t \cdot |v| \cdot |v|$ folgt $\lambda = t$, also $F(t \cdot v) = tF(v)$

Hilfslemma 2 *Sei $F : V \to V$ eine Isometrie mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann $\forall v \in V$ gilt: $F(tv) = tF(v)$.*
Folgerung. *$Bild_F(Span\{v\}) = Span\{F(v)\}$.*
Bemerkung. Für die Isometrie $F : V \to V$ mit $F(\vec{0}) = \vec{0}$ gilt:

$$|F(v)| = |F(v) - \vec{0}| = d(F(v), \vec{0}) \overset{\text{Weil } F(\vec{0}) = \vec{0}}{=} d(v, \vec{0}) = |v - \vec{0}| = |v|.$$

Beweis. Nach Bemerkung gilt:
$|F(v)| = |v|$,
$|F(t \cdot v)| = |t \cdot v| = |t| \cdot |v|$,
$|F((t-1) \cdot v)| = |(t-1) \cdot v| = |t-1| \cdot |v|$.
Wir rechnen jetzt $(d(F(t \cdot v), F(v)))^2$ zweimal aus:

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 = \langle F(t \cdot v) - F(v), F(t \cdot v) - F(v)\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \underbrace{|F(t \cdot v)|^2}_{t^2|v|^2} - 2\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle + \underbrace{|F(v)|^2}_{|v|^2} = t^2|v|^2 - 2\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle + |v|^2$$

$$(d(F(t \cdot v), F(v)))^2 \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} (d(t \cdot v, v))^2 = |(t-1) \cdot v|^2 = (t-1)^2 \cdot |v|^2 = t^2 \cdot |v|^2 - 2t \cdot |v|^2 + |v|^2.$$

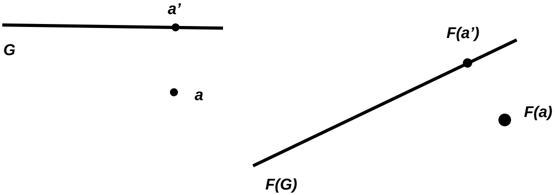
Dann $\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle = t \cdot |v| \cdot |v| = |F(t \cdot v)| \cdot |F(v)|$. Nach Cauchy-Schwarz (Lemma 37) ist dann $F(t \cdot v)$ und $F(v)$ linear abhängig, dann $F(t \cdot v) = \lambda F(v)$. Dann aus $\langle F(t \cdot v), F(v)\rangle = t \cdot |v| \cdot |v|$ folgt $\lambda = t$, also $F(t \cdot v) = tF(v)$, □

Hilfslemma 3

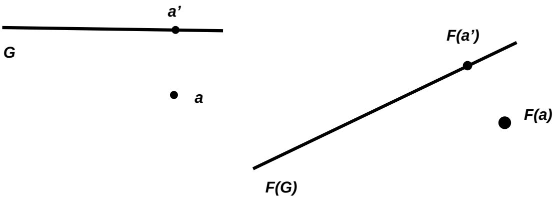
Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$

Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.

Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.

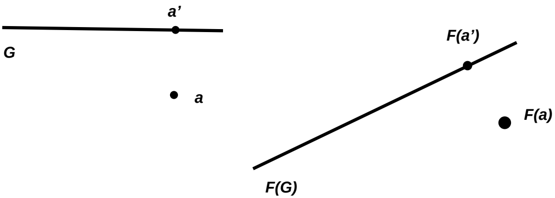


Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.



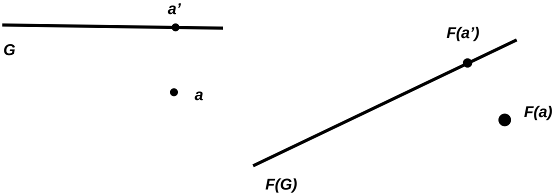
Beweis.

Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.



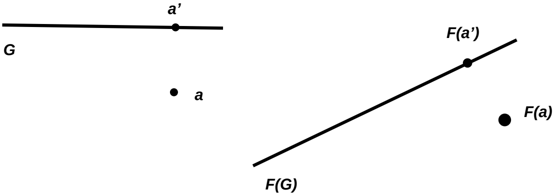
Beweis. Für jeden Untervektorraum G ist $Proj_G(a)$ nach Lemma 36 der Vektor $a' \in G$

Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.



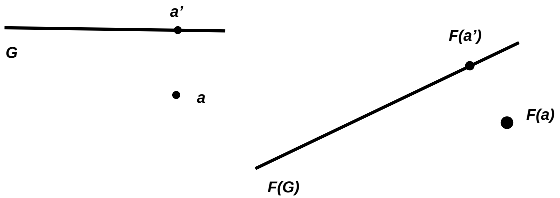
Beweis. Für jeden Untervektorraum G ist $Proj_G(a)$ nach Lemma 36 der Vektor $a' \in G$ sodass für jedes $a'' \in G$, $a'' \neq a'$ gilt $|a'' - a| > |a' - a|$. Da F Abstände erhält

Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.



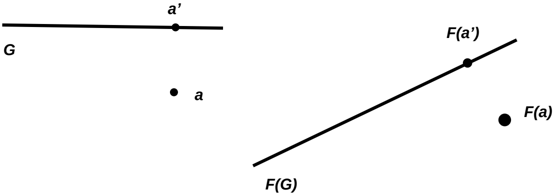
Beweis. Für jeden Untervektorraum G ist $Proj_G(a)$ nach Lemma 36 der Vektor $a' \in G$ sodass für jedes $a'' \in G$, $a'' \neq a'$ gilt $|a'' - a| > |a' - a|$. Da F Abstände erhält und $Span\{v\}$

Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.



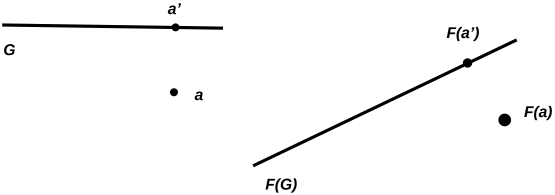
Beweis. Für jeden Untervektorraum G ist $Proj_G(a)$ nach Lemma 36 der Vektor $a' \in G$ sodass für jedes $a'' \in G$, $a'' \neq a'$ gilt $|a'' - a| > |a' - a|$. Da F Abstände erhält und $Span\{v\}$ in $Span\{F(v)\}$ überführt,

Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.



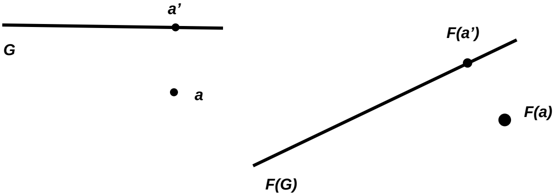
Beweis. Für jeden Untervektorraum G ist $Proj_G(a)$ nach Lemma 36 der Vektor $a' \in G$ sodass für jedes $a'' \in G$, $a'' \neq a'$ gilt $|a'' - a| > |a' - a|$. Da F Abstände erhält und $Span\{v\}$ in $Span\{F(v)\}$ überführt, für jedes $F(a'') \in Span\{F(v)\}$,

Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.



Beweis. Für jeden Untervektorraum G ist $Proj_G(a)$ nach Lemma 36 der Vektor $a' \in G$ sodass für jedes $a'' \in G$, $a'' \neq a'$ gilt $|a'' - a| > |a' - a|$. Da F Abstände erhält und $Span\{v\}$ in $Span\{F(v)\}$ überführt, für jedes $F(a'') \in Span\{F(v)\}$, $F(a'') \neq F(a')$

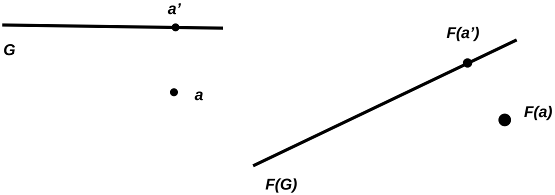
Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.



Beweis. Für jeden Untervektorraum G ist $Proj_G(a)$ nach Lemma 36 der Vektor $a' \in G$ sodass für jedes $a'' \in G$, $a'' \neq a'$ gilt $|a'' - a| > |a' - a|$. Da F Abstände erhält und $Span\{v\}$ in $Span\{F(v)\}$ überführt, für jedes $F(a'') \in Span\{F(v)\}$, $F(a'') \neq F(a')$ ist

$$\underbrace{d(F(a''), F(a))}_{=d(a'',a)} = |F(a'') - F(a)| > |F(a') - F(a)| = \underbrace{d(F(a'), F(a))}_{=d(a',a)}.$$

Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.

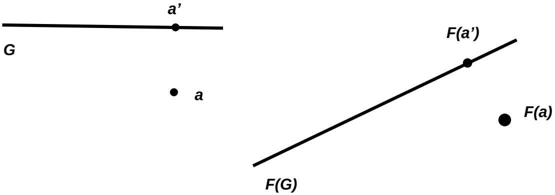


Beweis. Für jeden Untervektorraum G ist $Proj_G(a)$ nach Lemma 36 der Vektor $a' \in G$ sodass für jedes $a'' \in G$, $a'' \neq a'$ gilt $|a'' - a| > |a' - a|$. Da F Abstände erhält und $Span\{v\}$ in $Span\{F(v)\}$ überführt, für jedes $F(a'') \in Span\{F(v)\}$, $F(a'') \neq F(a')$ ist

$$\underbrace{d(F(a''), F(a))}_{=d(a'',a)} = |F(a'') - F(a)| > |F(a') - F(a)| = \underbrace{d(F(a'), F(a))}_{=d(a',a)}.$$

Nach Lemma 36

Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.

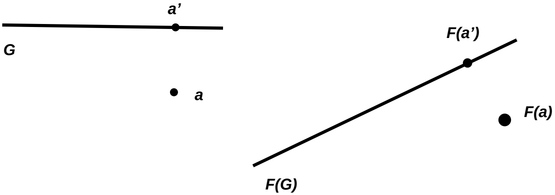


Beweis. Für jeden Untervektorraum G ist $Proj_G(a)$ nach Lemma 36 der Vektor $a' \in G$ sodass für jedes $a'' \in G$, $a'' \neq a'$ gilt $|a'' - a| > |a' - a|$. Da F Abstände erhält und $Span\{v\}$ in $Span\{F(v)\}$ überführt, für jedes $F(a'') \in Span\{F(v)\}$, $F(a'') \neq F(a')$ ist

$$\underbrace{d(F(a''), F(a))}_{=d(a'',a)} = |F(a'') - F(a)| > |F(a') - F(a)| = \underbrace{d(F(a'), F(a))}_{=d(a',a)}.$$

Nach Lemma 36 ist $F(a') = Proj_{Bild_F(Span\{F(v)\})}(F(a))$.

Hilfslemma 3 Für jedes $v, u \in V$ gilt:
$F(Proj_{span\{v\}}(u)) = Proj_{Bild_F(span\{(v)\})}(F(u))$.



Beweis. Für jeden Untervektorraum G ist $Proj_G(a)$ nach Lemma 36 der Vektor $a' \in G$ sodass für jedes $a'' \in G$, $a'' \neq a'$ gilt $|a'' - a| > |a' - a|$. Da F Abstände erhält und $Span\{v\}$ in $Span\{F(v)\}$ überführt, für jedes $F(a'') \in Span\{F(v)\}$, $F(a'') \neq F(a')$ ist

$$\underbrace{d(F(a''), F(a))}_{=d(a'',a)} = |F(a'') - F(a)| > |F(a') - F(a)| = \underbrace{d(F(a'), F(a))}_{=d(a',a)}.$$

Nach Lemma 36 ist $F(a') = Proj_{Bild_F(Span\{F(v)\})}(F(a))$. $\square$

Beweis des Satzes 68.

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$.

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$.

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$. Da $T_{-F(\vec{0})}$ Isometrie ist,

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$. Da $T_{-F(\vec{0})}$ Isometrie ist, ist $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$. Da $T_{-F(\vec{0})}$ Isometrie ist, ist $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ auch eine Isometrie.

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$. Da $T_{-F(\vec{0})}$ Isometrie ist, ist $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ auch eine Isometrie. Nach Definition ist
$\bar{F}(\vec{0}) =$

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$. Da $T_{-F(\vec{0})}$ Isometrie ist, ist $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ auch eine Isometrie. Nach Definition ist
$\bar{F}(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})} \circ F(\vec{0}) =$

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$. Da $T_{-F(\vec{0})}$ Isometrie ist, ist $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ auch eine Isometrie. Nach Definition ist
$\bar{F}(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})} \circ F(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})}(F(\vec{0})) =$

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$. Da $T_{-F(\vec{0})}$ Isometrie ist, ist $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ auch eine Isometrie. Nach Definition ist
$\bar{F}(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})} \circ F(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})}(F(\vec{0})) = F(\vec{0}) + (-F(\vec{0})) =$

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$. Da $T_{-F(\vec{0})}$ Isometrie ist, ist $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ auch eine Isometrie. Nach Definition ist
$\bar{F}(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})} \circ F(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})}(F(\vec{0})) = F(\vec{0}) + (-F(\vec{0})) = \vec{0}.$

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$. Da $T_{-F(\vec{0})}$ Isometrie ist, ist $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ auch eine Isometrie. Nach Definition ist
$\bar{F}(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})} \circ F(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})}(F(\vec{0})) = F(\vec{0}) + (-F(\vec{0})) = \vec{0}$. Wenn wir beweisen, dass $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ die Form $T_u \circ f$ hat,

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$. Da $T_{-F(\vec{0})}$ Isometrie ist, ist $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ auch eine Isometrie. Nach Definition ist
$\bar{F}(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})} \circ F(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})}(F(\vec{0})) = F(\vec{0}) + (-F(\vec{0})) = \vec{0}$. Wenn wir beweisen, dass $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ die Form $T_u \circ f$ hat, dann gilt
$F = T_{F(\vec{0})} \circ \bar{F}$

Beweis des Satzes 68. OBdA ist $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Sonst betrachte man $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$. Da $T_{-F(\vec{0})}$ Isometrie ist, ist $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ auch eine Isometrie. Nach Definition ist $\bar{F}(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})} \circ F(\vec{0}) = T_{-F(\vec{0})}(F(\vec{0})) = F(\vec{0}) + (-F(\vec{0})) = \vec{0}$. Wenn wir beweisen, dass $\bar{F} := T_{-F(\vec{0})} \circ F$ die Form $T_u \circ f$ hat, dann gilt $F = T_{F(\vec{0})} \circ \bar{F} = T_{u+F(\vec{0})} \circ f$.

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$.

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V.

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$.

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist.

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$|b_i|$$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$|b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i|$$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$|b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1,$$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$|b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1,$$

$$|b_i - b_j| =$$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$|b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1,$$

$$|b_i - b_j| = d(b_i, b_j) =$$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$|b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1,$$

$$|b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) =$$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$|b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1,$$

$$|b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| =$$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$|b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1,$$

$$|b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2}$$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\}$$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen:

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.
Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.
Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$.

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.

Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.
Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.
Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.
Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)
$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$;

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \stackrel{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \stackrel{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.

Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.

Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)

$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.

Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.

Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)

$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.

Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Hilfslemma 1}} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.
Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.
Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.
Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)
$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.
Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$. Nach Hilfslemma 3

ist $\underbrace{Proj_{Span\{b_i\}} F(v)}_{=y_i b_i}$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.

Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.

Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)

$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.

Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$. Nach Hilfslemma 3

ist $\underbrace{Proj_{Span\{b_i\}} F(v)}_{= y_i b_i} = F\left(\underbrace{Proj_{Span\{e_i\}}(v)}_{= x_i a_i}\right)$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.
Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.
Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.
Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)
$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.
Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$. Nach Hilfslemma 3 ist $\underbrace{Proj_{Span\{b_i\}} F(v)}_{= y_i b_i} = F\left(\underbrace{Proj_{Span\{e_i\}}(v)}_{= x_i a_i}\right)$. Nach Hilfslemma 2 ist
$x_i = y_i$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.
Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.
Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.
Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)
$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.
Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$. Nach Hilfslemma 3

ist $\underbrace{Proj_{Span\{b_i\}} F(v)}_{=y_i b_i} = F\left(\underbrace{Proj_{Span\{e_i\}}(v)}_{=x_i a_i}\right)$. Nach Hilfslemma 2 ist

$x_i = y_i$.

Dann

$F(x_1 e_1 + ... + x_n e_n)$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.
Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.
Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.
Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)
$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.
Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$. Nach Hilfslemma 3 ist $\underbrace{Proj_{Span\{b_i\}} F(v)}_{=y_i b_i} = F\left(\underbrace{Proj_{Span\{e_i\}}(v)}_{=x_i a_i}\right)$. Nach Hilfslemma 2 ist $x_i = y_i$.
Dann

$$F(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.

Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.

Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)

$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.

Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$. Nach Hilfslemma 3 ist $\underbrace{Proj_{Span\{b_i\}} F(v)}_{=y_i b_i} = F\left(\underbrace{Proj_{Span\{e_i\}}(v)}_{=x_i a_i}\right)$. Nach Hilfslemma 2 ist $x_i = y_i$.

Dann

$$F(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1 b_1 + ... + x_n b_n = x_1 Oe_1 + ... + x_n Oe_n$$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j\rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.

Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.

Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)

$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.

Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$. Nach Hilfslemma 3 ist $\underbrace{Proj_{Span\{b_i\}} F(v)}_{=y_i b_i} = F\left(\underbrace{Proj_{Span\{e_i\}}(v)}_{=x_i a_i}\right)$. Nach Hilfslemma 2 ist $x_i = y_i$.

Dann

$$F(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1 b_1 + ... + x_n b_n = x_1 Oe_1 + ... + x_n Oe_n = O \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wobei O die Matrix sodass $Oe_i = b_i$.

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.

Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.

Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)

$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.

Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$. Nach Hilfslemma 3 ist $\underbrace{Proj_{Span\{b_i\}} F(v)}_{=y_i b_i} = F\left(\underbrace{Proj_{Span\{e_i\}}(v)}_{=x_i a_i}\right)$. Nach Hilfslemma 2 ist $x_i = y_i$.

Dann

$$F(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1 b_1 + ... + x_n b_n = x_1 Oe_1 + ... + x_n Oe_n = O \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wobei O die Matrix sodass $Oe_i = b_i$.Da

$|Ox| =$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.

Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.

Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)

$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.

Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$. Nach Hilfslemma 3 ist $\underbrace{Proj_{Span\{b_i\}} F(v)}_{=y_i b_i} = F\left(\underbrace{Proj_{Span\{e_i\}}(v)}_{=x_i a_i}\right)$. Nach Hilfslemma 2 ist $x_i = y_i$.

Dann

$$F(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1 b_1 + ... + x_n b_n = x_1 O e_1 + ... + x_n O e_n = O \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wobei O die Matrix sodass $Oe_i = b_i$.Da

$|Ox| = d(F(x), \vec{0}) =$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.

Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.

Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i) $Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.

Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$. Nach Hilfslemma 3 ist $\underbrace{Proj_{Span\{b_i\}} F(v)}_{=y_i b_i} = F\left(\underbrace{Proj_{Span\{e_i\}}(v)}_{=x_i a_i}\right)$. Nach Hilfslemma 2 ist $x_i = y_i$.

Dann

$$F(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1 b_1 + ... + x_n b_n = x_1 O e_1 + ... + x_n O e_n = O \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wobei O die Matrix sodass $Oe_i = b_i$.Da

$|Ox| = d(F(x), \vec{0}) = d(x, \vec{0}) =$

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.
Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.
Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.
Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)
$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.
Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$. Nach Hilfslemma 3

ist $\underbrace{Proj_{Span\{b_i\}} F(v)}_{= y_i b_i} = F\left(\underbrace{Proj_{Span\{e_i\}}(v)}_{= x_i a_i}\right)$. Nach Hilfslemma 2 ist

$x_i = y_i$.
Dann

$$F(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1 b_1 + ... + x_n b_n = x_1 O e_1 + ... + x_n O e_n = O \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wobei O die Matrix sodass $Oe_i = b_i$.Da
$|Ox| = d(F(x), \vec{0}) = d(x, \vec{0}) = |x|$ ist, ist O nach Satz 63 orthogonal,

Sei also $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Wir nehmen die Orthonormalbasis $A := (e_1, ..., e_n)$ in V. Setze $b_i = F(e_i)$. Wir zeigen: $B := (b_1, ..., b_n)$ ist auch eine Orthonormalbasis ist. Tatsächlich,

$$\left.\begin{array}{r} |b_i| \overset{\text{Weil } F \text{ Isometrie ist}}{=} |e_i| = 1, \\ |b_i - b_j| = d(b_i, b_j) = d(e_i, e_j) = |e_i - e_j| = \sqrt{2} \end{array}\right\} \overset{\text{Hilfslemma 1}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \langle b_i, b_j \rangle = 0 \\ \text{für } i \neq j. \end{array}$$

Dann ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Orthonormalbasis.

Wir zeigen: Koordinatenvektor des beliebigen $v \in V$ in der Basis A gleich Koordinatenvektor von $F(v)$ in der Basis B.

Sei $v := x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ und $F(v) = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Z.z.: $x_i = y_i$.

Nach **Wicht. Form. aus Beweis von Lemma 36** ist (für jedes i)

$Proj_{Span\{e_i\}} v = x_i e_i$; $Proj_{Span\{b_i\}} F(v) = y_i b_i$.

Nach Hilfslemma 2 ist $Span\{b_i\} = Bild_F(Span\{e_i\})$. Nach Hilfslemma 3 ist $\underbrace{Proj_{Span\{b_i\}} F(v)}_{=y_i b_i} = F\left(\underbrace{Proj_{Span\{e_i\}}(v)}_{=x_i a_i}\right)$. Nach Hilfslemma 2 ist $x_i = y_i$.

Dann

$$F(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1 b_1 + ... + x_n b_n = x_1 O e_1 + ... + x_n O e_n = O \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wobei O die Matrix sodass $Oe_i = b_i$.Da $|Ox| = d(F(x), \vec{0}) = d(x, \vec{0}) = |x|$ ist, ist O nach Satz 63 orthogonal,