Organisatorisches

Die Vorlesung am Do 31.01. fällt aus

Organisatorisches

Die Vorlesung am Do 31.01. fällt aus

— Lichtfest —

Organisatorisches

Die Vorlesung am Do 31.01. fällt aus

— Lichtfest —

viel Spaß

Wiederholung

Skalarprodukt ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform.

Wiederholung

Skalarprodukt ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform.
Euklidscher Vektorraum ist ein Paar $(V, \langle\ ,\ \rangle)$,

Wiederholung

Skalarprodukt ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform.
Euklidscher Vektorraum ist ein Paar $(V, \langle\ ,\ \rangle)$,wobei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum ist,

Wiederholung

Skalarprodukt ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform.
Euklidscher Vektorraum ist ein Paar $(V, \langle\ ,\ \rangle)$,wobei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum ist, und $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

Wiederholung

Skalarprodukt ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform.
Euklidscher Vektorraum ist ein Paar $(V, \langle\ ,\ \rangle)$,wobei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum ist, und $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

Satz 61 Wir können in V eine Basis B wählen sodass $\langle\ ,\ \rangle$ Standard-Skalarprodukt ist:

Wiederholung

Skalarprodukt ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform.
Euklidscher Vektorraum ist ein Paar $(V, \langle\ ,\ \rangle)$,wobei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum ist, und $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

Satz 61 Wir können in V eine Basis B wählen sodass $\langle\ ,\ \rangle$ Standard-Skalarprodukt ist: für die Vektoren x, y mit Koordinatenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ gilt:

Wiederholung

Skalarprodukt ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform.
Euklidscher Vektorraum ist ein Paar $(V, \langle\ ,\ \rangle)$,wobei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum ist, und $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

Satz 61 Wir können in V eine Basis B wählen sodass $\langle\ ,\ \rangle$ Standard-Skalarprodukt ist: für die Vektoren x, y mit Koordinatenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ gilt:$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.

Wiederholung

Def. 56

Def. 56 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum.*

Def. 56 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Länge von* $v \in V$ *ist die Zahl* $\sqrt{\langle v, v\rangle}$.

Wiederholung

Def. 56 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Länge von* $v \in V$ *ist die Zahl* $\sqrt{\langle v, v\rangle}$. *Bezeichnung:* $|v|$.

Def. 56 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Länge von* $v \in V$ *ist die Zahl* $\sqrt{\langle v, v\rangle}$*. Bezeichnung:* $|v|$.

Für je zwei Vektoren $u \neq 0, v \neq 0$

Wiederholung

Def. 56 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Länge von* $v \in V$ *ist die Zahl* $\sqrt{\langle v, v\rangle}$. *Bezeichnung:* $|v|$.
Für je zwei Vektoren $u \neq 0, v \neq 0$ heißt die Zahl
$\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen u und v.

Wiederholung

Def. 56 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Länge von* $v \in V$ *ist die Zahl* $\sqrt{\langle v, v\rangle}$. *Bezeichnung:* $|v|$.
Für je zwei Vektoren $u \neq 0, v \neq 0$ heißt die Zahl
$\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen u und v.

Erstes Ziel für heute: der Winkel ist wohldefiniert:

.

Wiederholung

Def. 56 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Länge von* $v \in V$ *ist die Zahl* $\sqrt{\langle v, v\rangle}$. *Bezeichnung:* $|v|$.
Für je zwei Vektoren $u \neq 0, v \neq 0$ heißt die Zahl
$\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen u und v.

Erstes Ziel für heute: der Winkel ist wohldefiniert:
$-1 < \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|} < 1$.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig,

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$,

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt
$\langle u + tv, u + tv\rangle$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt
$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt
$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt
$\langle u + tv, u + tv\rangle \stackrel{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \stackrel{\text{Linearität}}{=}$
$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle =$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt
$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$
$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c}$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b}\, t$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.

Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b}\, t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b} t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.

Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b}\, t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle,

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt
$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$
$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b}\, t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$
Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$,

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \stackrel{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \stackrel{\text{Linearität}}{=}$$
$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u,v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b}\, t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und $|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.

Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b}\, t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind. Da das Polynom höchstens eine Nullstelle hat,

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$
$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b}\, t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind. Da das Polynom höchstens eine Nullstelle hat, ist die Diskriminante nichtpositiv, also

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und $|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.

Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u,v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b} t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind. Da das Polynom höchstens eine Nullstelle hat, ist die Diskriminante nichtpositiv, also

$\mathcal{D} =$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.

Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$
$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b} t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind. Da das Polynom höchstens eine Nullstelle hat, ist die Diskriminante nichtpositiv, also

$$\mathcal{D} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac =$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$
$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b} t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind. Da das Polynom höchstens eine Nullstelle hat, ist die Diskriminante nichtpositiv, also

$$\mathcal{D} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \langle u, v\rangle^2 - |v|^2|u|^2 \leq 0.$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$
$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u,v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b}\, t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind. Da das Polynom höchstens eine Nullstelle hat, ist die Diskriminante nichtpositiv, also

$$\mathcal{D} = \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 - ac = \langle u, v\rangle^2 - |v|^2|u|^2 \leq 0. \quad \text{Dann ist } |\langle u, v\rangle| \leq |v||u|.$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt:
$|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.
Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und
$|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.
Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$

$$\langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b} t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind. Da das Polynom höchstens eine Nullstelle hat, ist die Diskriminante nichtpositiv, also

$$\mathcal{D} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \langle u, v\rangle^2 - |v|^2|u|^2 \leq 0. \quad \text{Dann ist } |\langle u, v\rangle| \leq |v||u|.$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und $|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.

Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u,v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b} t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind. Da das Polynom höchstens eine Nullstelle hat, ist die Diskriminante nichtpositiv, also

$$\mathcal{D} = \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 - ac = \langle u, v\rangle^2 - |v|^2|u|^2 \leq 0. \quad \text{Dann ist } |\langle u, v\rangle| \leq |v||u|. \quad \square$$

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und $|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.

Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b}\, t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind. Da das Polynom höchstens eine Nullstelle hat, ist die Diskriminante nichtpositiv, also

$$\mathcal{D} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \langle u, v\rangle^2 - |v|^2|u|^2 \leq 0. \quad \text{Dann ist } |\langle u, v\rangle| \leq |v||u|. \qquad \square$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Lemma 37 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ (für alle u, v aus dem Euklidschen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.)Ferner gilt: $|\langle u, v\rangle| = |u|\,|v|$ g.d.w. die Vektoren linear abhängig sind.

Beweis. Ist $v = \vec{0}$, so sind beide Seiten gleich Null. Sei $v \neq \vec{0}$. Sind die Vektoren linear abhängig, so ist $u = \lambda v$, und $|\langle u, v\rangle| = |\langle \lambda v, v\rangle| = |\lambda||v|^2$.

Angenommen, die Vektoren sind linear unabhängig. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u + tv, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u + tv\rangle + t\langle v, u + tv\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u, u\rangle + \underbrace{t\langle u, v\rangle + t\langle v, u\rangle}_{2t\langle u, v\rangle \text{ wegen Symmetrie}} + t^2\langle v, v\rangle = \underbrace{|u|^2}_{c} + \underbrace{2\langle u, v\rangle}_{b} t + t^2 \underbrace{|v|^2}_{a}.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom in t. Es hat keine Nullstelle, da $\langle u + tv, u + tv\rangle$ gleich Null sein kann nur falls $u = -tv$, also falls u, v linear abhängig sind. Da das Polynom höchstens eine Nullstelle hat, ist die Diskriminante nichtpositiv, also

$$\mathcal{D} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \langle u, v\rangle^2 - |v|^2|u|^2 \leq 0. \quad \text{Dann ist } |\langle u, v\rangle| \leq |v||u|. \quad \square$$

Einige schulgeometrische Aussagen

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung:

Einige schulgeometrische Aussagen

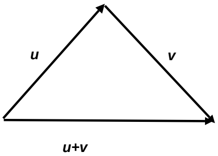
Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V*.*

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle \; , \; \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V*. Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u + v| \leq |u| + |v|$.

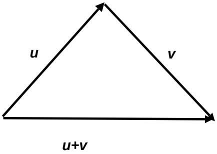
Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V. *Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \leq |u| + |v|$.



Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle \ , \ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V. *Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \leq |u| + |v|$.

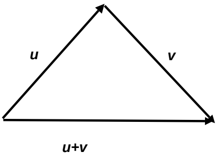


Beweis.

$(|u+v|)^2 =$

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V*. Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \leq |u| + |v|$.

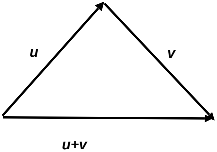


Beweis.

$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle$

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V. *Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \leq |u| + |v|$.

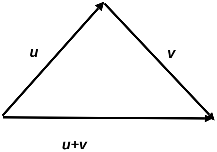


Beweis.

$$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$$

Einige schulgeometrische Aussagen

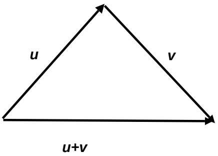
Dreiecksungleichung: *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann für jede $u, v \in V$ gilt: $|u+v| \leq |u| + |v|$.*



Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2.$

Einige schulgeometrische Aussagen

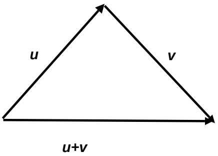
Dreiecksungleichung: *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann für jede $u, v \in V$ gilt: $|u+v| \le |u| + |v|$.*



Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \le |u||v|$,

Einige schulgeometrische Aussagen

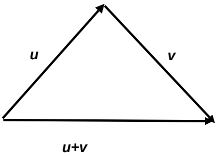
Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V. *Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \leq |u| + |v|$.



Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \leq |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \leq (|u|+|v|)^2$

Einige schulgeometrische Aussagen

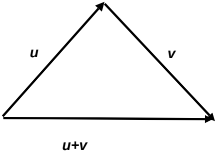
Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V*. Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \leq |u| + |v|$.



Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \leq |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \leq (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \leq |u| + |v|$.

Einige schulgeometrische Aussagen

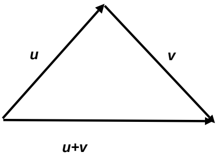
Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle \ , \ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V. *Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \leq |u| + |v|$.



Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v \rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \leq |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \leq (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \leq |u| + |v|$. $\square$

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann für jede $u, v \in V$ gilt: $|u+v| \leq |u| + |v|$.*

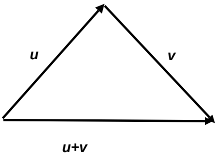


Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \leq |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \leq (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \leq |u| + |v|$. □

Parallelogrammgleichung:

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V. *Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \leq |u| + |v|$.

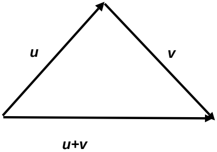


Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \stackrel{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \leq |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \leq (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \leq |u| + |v|$. □

Parallelogrammgleichung:

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V. *Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \le |u| + |v|$.

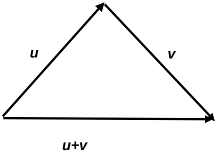


Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \le |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \le (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \le |u| + |v|$. $\square$

Parallelogrammgleichung:

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann für jede $u, v \in V$ gilt: $|u+v| \le |u| + |v|$.*

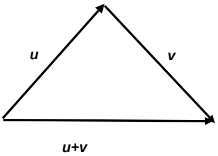


Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \le |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \le (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \le |u| + |v|$. $\square$

Parallelogrammgleichung: *Für jede $u, v \in V$ gilt:*

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann für jede $u, v \in V$ gilt: $|u+v| \le |u| + |v|$.*

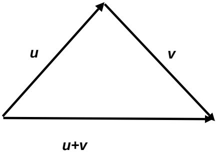


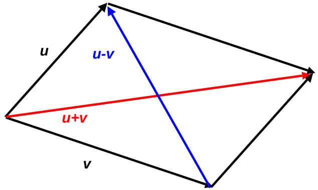
Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \le |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \le (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \le |u| + |v|$. □

Parallelogrammgleichung: *Für jede $u, v \in V$ gilt:*
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V. *Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \le |u| + |v|$.



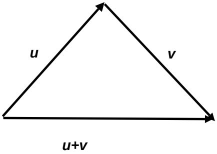


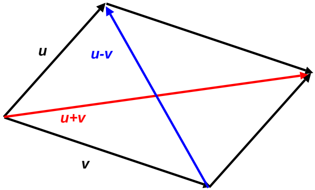
Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \le |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \le (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \le |u| + |v|$. $\square$

Parallelogrammgleichung: *Für jede* $u, v \in V$ *gilt:*
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V. *Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \le |u| + |v|$.





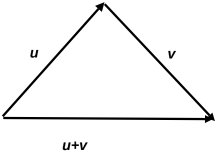
Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \le |u||v|$,
ist $(|u+v|)^2 \le (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \le |u| + |v|$. $\square$

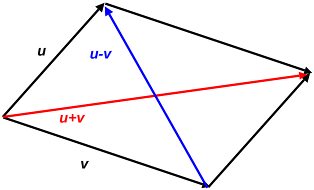
Parallelogrammgleichung: *Für jede* $u, v \in V$ *gilt:*
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Beweis.

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann für jede $u, v \in V$ gilt: $|u+v| \le |u| + |v|$.*





Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \le |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \le (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \le |u| + |v|$. $\square$

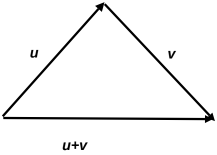
Parallelogrammgleichung: *Für jede $u, v \in V$ gilt:*
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

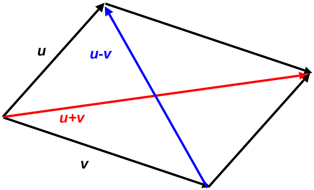
Beweis.

$|u+v|^2 + |u-v|^2$

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann für jede $u, v \in V$ gilt: $|u+v| \leq |u| + |v|$.*





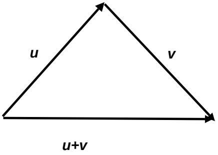
Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \leq |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \leq (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \leq |u| + |v|$. $\square$

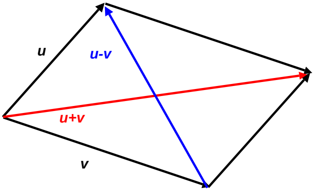
Parallelogrammgleichung: *Für jede $u, v \in V$ gilt:*
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Beweis.
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle$

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V*. Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \leq |u| + |v|$.





Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u,v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u,v\rangle \leq |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \leq (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \leq |u| + |v|$. $\square$

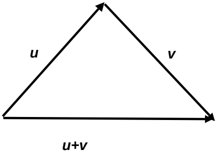
Parallelogrammgleichung: *Für jede* $u, v \in V$ *gilt:*
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

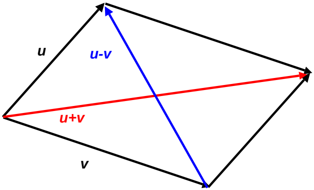
Beweis.

$|u+v|^2 + |u-v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle +$

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann für jede $u, v \in V$ gilt: $|u+v| \le |u| + |v|$.*





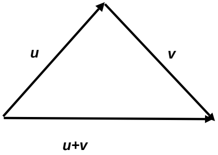
Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u,v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u,v\rangle \le |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \le (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \le |u| + |v|$. $\square$

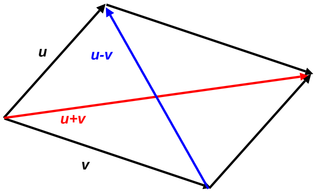
Parallelogrammgleichung: *Für jede $u, v \in V$ gilt:*
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Beweis.
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann für jede $u, v \in V$ gilt: $|u+v| \leq |u| + |v|$.*





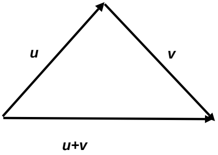
Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u,v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \leq |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \leq (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \leq |u| + |v|$. □

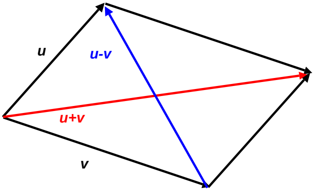
Parallelogrammgleichung: *Für jede $u, v \in V$ gilt:*
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Beweis.
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = 2\big(\langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle\big)$

Einige schulgeometrische Aussagen

Dreiecksungleichung: *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann für jede $u, v \in V$ gilt: $|u+v| \leq |u| + |v|$.*



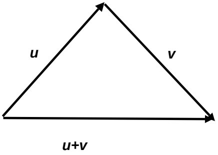


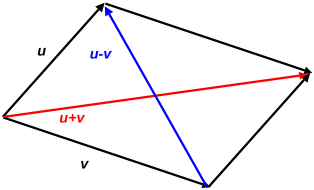
Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \leq |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \leq (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \leq |u| + |v|$. $\square$

Parallelogrammgleichung: *Für jede $u, v \in V$ gilt:*
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Beweis.
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle + \langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = 2\big(\langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle\big) = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Dreiecksungleichung: *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf* V. *Dann für jede* $u, v \in V$ *gilt:* $|u+v| \le |u| + |v|$.





Beweis.
$(|u+v|)^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Wie im Beweis Lem. 37}}{=} |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2$
$(|u|+|v|)^2 = |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$. Da nach Lemma 37 $\langle u, v\rangle \le |u||v|$, ist $(|u+v|)^2 \le (|u|+|v|)^2$ und deswegen $|u+v| \le |u| + |v|$. $\square$

Parallelogrammgleichung: *Für jede* $u, v \in V$ *gilt:*
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.

Beweis.
$|u+v|^2 + |u-v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle + \langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = 2\big(\langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle\big) = 2(|u|^2 + |v|^2)$. $\square$

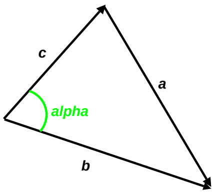
Cosinussatz

Cosinussatz

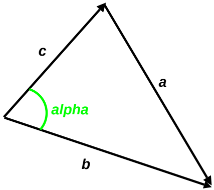
Cosinussatz

Cosinussatz

Cosinussatz *In Dreieck auf dem Bild*

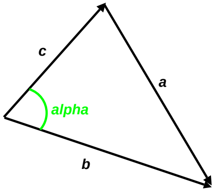


Cosinussatz *In Dreieck auf dem Bild*



Ist $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$.

Cosinussatz *In Dreieck auf dem Bild*

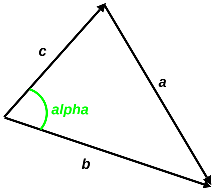


Ist $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$.

Beweis:

Cosinussatz

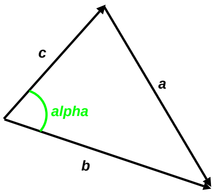
Cosinussatz *In Dreieck auf dem Bild*



Ist $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(\textcolor{green}{alpha})$.
Beweis: $\vec{a} + \vec{b}$

Cosinussatz

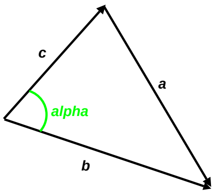
Cosinussatz *In Dreieck auf dem Bild*



Ist $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$.
Beweis: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$,

Cosinussatz

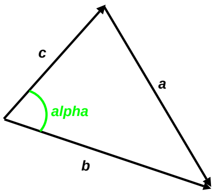
Cosinussatz *In Dreieck auf dem Bild*



Ist $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos({\color{green}alpha})$.
Beweis: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, also $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$.

Cosinussatz

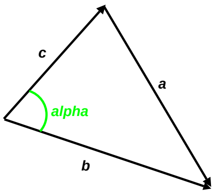
Cosinussatz *In Dreieck auf dem Bild*



Ist $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$.
Beweis: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, also $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$.
Dann ist $|\vec{a}|^2 =$

Cosinussatz

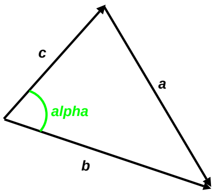
Cosinussatz *In Dreieck auf dem Bild*



Ist $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$*.*
Beweis: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, also $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$.
Dann ist $|\vec{a}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{b} \rangle$

Cosinussatz

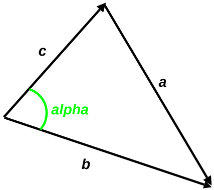
Cosinussatz *In Dreieck auf dem Bild*



Ist $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$.
Beweis: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, also $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$.
Dann ist $|\vec{a}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{b} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle - 2\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle$

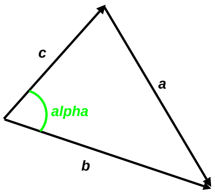
Cosinussatz

Cosinussatz *In Dreieck auf dem Bild*



Ist $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$.
Beweis: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, also $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$.
Dann ist $|\vec{a}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{b} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle - 2\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle =$
$|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$.

Cosinussatz *In Dreieck auf dem Bild*



Ist $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$.

Beweis: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, also $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$.

Dann ist $|\vec{a}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c} - \vec{b}, \vec{c} - \vec{b} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle - 2\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle =$
$|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(alpha)$. $\square$

Def. 57

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f *heißt* *orthogonal*, *falls für alle* $u, v\ inV$

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f *heißt orthogonal, falls für alle* u, v *in*V *gilt* $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Bemerkung

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle \ , \ \rangle)$ f *heißt* *orthogonal*, *falls für alle* u, v *in*V *gilt* $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel:*

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f *heißt* *orthogonal*, *falls für alle* u, v *in*V *gilt* $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle* $u, v \in V$ *gilt:*

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f *heißt* *orthogonal, falls für alle* u, v *in*V *gilt* $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle* $u, v \in V$ *gilt:* $|f(u)| = |u|$,

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f *heißt* *orthogonal, falls für alle* u, v *in*V *gilt* $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle* $u, v \in V$ *gilt:* $|f(u)| = |u|$, *Winkel zwischen* u *und* v *und Winkel zwischen* $f(u)$ *und* $f(v)$ *sind gleich.*

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f *heißt orthogonal, falls für alle* u, v *inV gilt* $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle* $u, v \in V$ *gilt:* $|f(u)| = |u|$, *Winkel zwischen* u *und* v *und Winkel zwischen* $f(u)$ *und* $f(v)$ *sind gleich.*

Tatsächlich,

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f *heißt* *orthogonal*, *falls für alle* u, v *in*V *gilt* $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle* $u, v \in V$ *gilt:* $|f(u)| = |u|$, *Winkel zwischen* u *und* v *und Winkel zwischen* $f(u)$ *und* $f(v)$ *sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \overset{\text{Def. 56}}{=}$

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f *heißt orthogonal, falls für alle* u, v *in*V *gilt* $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle* $u, v \in V$ *gilt:* $|f(u)| = |u|$, *Winkel zwischen* u *und* v *und Winkel zwischen* $f(u)$ *und* $f(v)$ *sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \overset{\text{Def. } 56}{=} \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle}$

Def. 57 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f heißt orthogonal, falls für alle u, v in$V$ gilt $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.*

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle $u, v \in V$ gilt: $|f(u)| = |u|$, Winkel zwischen u und v und Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \overset{\text{Def. 56}}{=} \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=}$

Def. 57 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f heißt orthogonal, falls für alle u, v in$V$ gilt $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.*

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle $u, v \in V$ gilt: $|f(u)| = |u|$, Winkel zwischen u und v und Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \overset{\text{Def. 56}}{=} \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} \sqrt{\langle u, u\rangle}$

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle \ , \ \rangle)$ f *heißt* *orthogonal, falls für alle* u, v *in*V *gilt* $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle* $u, v \in V$ *gilt:* $|f(u)| = |u|$, *Winkel zwischen* u *und* v *und Winkel zwischen* $f(u)$ *und* $f(v)$ *sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \overset{\text{Def. 56}}{=} \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} \sqrt{\langle u, u\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=}$

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f *heißt orthogonal, falls für alle* u, v *in*V *gilt* $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle* $u, v \in V$ *gilt:* $|f(u)| = |u|$, *Winkel zwischen* u *und* v *und Winkel zwischen* $f(u)$ *und* $f(v)$ *sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \overset{\text{Def. 56}}{=} \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} \sqrt{\langle u, u\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} |u|$;

Def. 57 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f heißt orthogonal, falls für alle u, v in$V$ gilt $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.*

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle $u, v \in V$ gilt: $|f(u)| = |u|$, Winkel zwischen u und v und Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \overset{\text{Def. 56}}{=} \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} \sqrt{\langle u, u\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} |u|$;

Der Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ ist nach Definition 56

Def. 57 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f heißt* orthogonal, *falls für alle u, v in$V$ gilt $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.*

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle $u, v \in V$ gilt: $|f(u)| = |u|$, Winkel zwischen u und v und Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \overset{\text{Def. 56}}{=} \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} \sqrt{\langle u, u\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} |u|$;

Der Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ ist nach Definition 56 $\arccos\left(\frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{|f(u)|\,|f(v)|}\right)$

Def. 57 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f heißt* orthogonal, *falls für alle u, v in$V$ gilt $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.*

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle $u, v \in V$ gilt: $|f(u)| = |u|$, Winkel zwischen u und v und Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \overset{\text{Def. 56}}{=} \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} \sqrt{\langle u, u\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} |u|$;
Der Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ ist nach Definition 56
$\arccos\left(\frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{|f(u)|\,|f(v)|}\right) \overset{\text{Def. 56}}{=}$

Def. 57 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f *heißt orthogonal, falls für alle* u, v *in*V *gilt* $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle* $u, v \in V$ *gilt:* $|f(u)| = |u|$, *Winkel zwischen* u *und* v *und Winkel zwischen* $f(u)$ *und* $f(v)$ *sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \overset{\text{Def. 56}}{=} \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} \sqrt{\langle u, u\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} |u|$;

Der Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ ist nach Definition 56 $\arccos\left(\frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{|f(u)|\,|f(v)|}\right) \overset{\text{Def. 56}}{=} \arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{|u|\,|v|}\right)$

Def. 57 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f heißt orthogonal, falls für alle u, v in$V$ gilt $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.*

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle $u, v \in V$ gilt: $|f(u)| = |u|$, Winkel zwischen u und v und Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \overset{\text{Def. 56}}{=} \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} \sqrt{\langle u, u\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} |u|$;
Der Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ ist nach Definition 56 $\arccos\left(\frac{\langle f(u), f(v)\rangle}{|f(u)|\,|f(v)|}\right) \overset{\text{Def. 56}}{=} \arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{|u|\,|v|}\right)$ und ist der Winkel zwischen u und v.

Def. 57 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ f heißt orthogonal, falls für alle u, v in$V$ gilt $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.*

Bemerkung *Orthogonale Abbildungen erhalten die Längen und die Winkel: d.h. für alle $u, v \in V$ gilt: $|f(u)| = |u|$, Winkel zwischen u und v und Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ sind gleich.*

Tatsächlich, $|f(u)| \overset{\text{Def. 56}}{=} \sqrt{\langle f(u), f(u)\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} \sqrt{\langle u, u\rangle} \overset{\text{Def. 57}}{=} |u|$;
Der Winkel zwischen $f(u)$ und $f(v)$ ist nach Definition 56 $\arccos\left(\frac{\langle f(u),f(v)\rangle}{|f(u)|\,|f(v)|}\right) \overset{\text{Def. 56}}{=} \arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right)$ und ist der Winkel zwischen u und v.

Satz 63

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$,

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$.*

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten:

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis.

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$.

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*
In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*
Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$|f(u+v)|^2 =$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben
$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben
$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \stackrel{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\text{Bilinearität}$$

$$\overset{\text{Symmetrie}}{=}$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität} \\ \text{Symmetrie}}}{=} \quad \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$. Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität} \\ \\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= {\color{blue}|f(u)|^2} + 2\langle f(u), f(v)\rangle + {\color{green}|f(v)|^2}$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$. Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität} \\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= |f(u)|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |f(v)|^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=}$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= |f(u)|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |f(v)|^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} |u|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |v|^2$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= \color{blue}{|f(u)|^2} + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \color{green}{|f(v)|^2}$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} \color{blue}{|u|^2} + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \color{green}{|v|^2}$$

Anderer Weg $|f(u+v)|^2$ auszurechnen:

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität} \\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= |f(u)|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |f(v)|^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} |u|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |v|^2$$

Anderer Weg $|f(u+v)|^2$ auszurechnen:

$$|f(u+v)|^2 =$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität} \\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= |f(u)|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |f(v)|^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} |u|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |v|^2$$

Anderer Weg $|f(u+v)|^2$ auszurechnen:

$$|f(u+v)|^2 = |u+v|^2$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität} \\ \\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= {\color{blue}|f(u)|^2} + 2\langle f(u), f(v)\rangle + {\color{green}|f(v)|^2}$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} {\color{blue}|u|^2} + 2\langle f(u), f(v)\rangle + {\color{green}|v|^2}$$

Anderer Weg $|f(u+v)|^2$ auszurechnen:

$$|f(u+v)|^2 = |u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= |f(u)|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |f(v)|^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} |u|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |v|^2$$

Anderer Weg $|f(u+v)|^2$ auszurechnen:

$$|f(u+v)|^2 = |u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= |f(u)|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |f(v)|^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} |u|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |v|^2$$

Anderer Weg $|f(u+v)|^2$ auszurechnen:

$$|f(u+v)|^2 = |u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u+v, u+v\rangle$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= |f(u)|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |f(v)|^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} |u|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |v|^2$$

Anderer Weg $|f(u+v)|^2$ auszurechnen:

$$|f(u+v)|^2 = |u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u+v, u+v\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=}$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=} \quad \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= \quad {\color{blue}|f(u)|^2} + 2\langle f(u), f(v)\rangle + {\color{green}|f(v)|^2}$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} {\color{blue}|u|^2} + 2\langle f(u), f(v)\rangle + {\color{green}|v|^2}$$

Anderer Weg $|f(u+v)|^2$ auszurechnen:

$$|f(u+v)|^2 = |u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u+v, u+v\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=} \quad \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle =$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= |f(u)|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |f(v)|^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} |u|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |v|^2$$

Anderer Weg $|f(u+v)|^2$ auszurechnen:

$$|f(u+v)|^2 = |u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u+v, u+v\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2.$$

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.
Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= |f(u)|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |f(v)|^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} |u|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |v|^2$$

Anderer Weg $|f(u+v)|^2$ auszurechnen:

$$|f(u+v)|^2 = |u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u+v, u+v\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2.$$

Also, $2\langle f(u), f(v)\rangle = 2\langle u, v\rangle$.

Satz 63 *Sei f ein Endomorphismus eines Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so dass für jedes $v \in V$ gilt: $|f(v)| = |v|$. Dann gilt: f ist eine orthogonale Abbildung*

In Worten: *Längeerhaltende lineare Abbildungen sind orthogonal*

Beweis. Z.z.: für beliebige Vektoren u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$. Betrachte $|f(u+v)|^2$. Wir haben

$$|f(u+v)|^2 = \langle f(u+v), f(u+v)\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle f(u)+f(v), f(u)+f(v)\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle f(u), f(u)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle$$

$$= |f(u)|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |f(v)|^2$$

$$\overset{\text{Voraussetzungen}}{=} |u|^2 + 2\langle f(u), f(v)\rangle + |v|^2$$

Anderer Weg $|f(u+v)|^2$ auszurechnen:

$$|f(u+v)|^2 = |u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle \overset{\text{Linearität}}{=} \langle u+v, u+v\rangle$$

$$\overset{\substack{\text{Bilinearität}\\ \text{Symmetrie}}}{=} \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = |u|^2 + 2\langle u, v\rangle + |v|^2.$$

Also, $2\langle f(u), f(v)\rangle = 2\langle u, v\rangle$. $\square$

Satz 64

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt.*

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n, n)$.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal,*

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$. *Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$. *Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$.

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n, n)$. *Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$.

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$:

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle =$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n, n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle =$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay)$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) =$

Satz 64 *Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: f_A ist genau dann orthogonal, falls $A^t = A^{-1}$.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$. *Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$.

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t A y = x^t y = \langle x, y\rangle$.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n, n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t A y = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$:

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist
$(Ax)^tAy$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist
$(Ax)^tAy =$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist
$(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n, n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist
$(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay =$

Satz 64 *Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: f_A ist genau dann orthogonal, falls $A^t = A^{-1}$.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist
$(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = \sigma_{A^t A}(x, y)$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy =$

Satz 64 *Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: f_A ist genau dann orthogonal, falls $A^t = A^{-1}$.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = \sigma_{A^t A}(x,y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y\rangle =$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist
$(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$,

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$. *Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$.

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$.

Satz 64 *Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: f_A ist genau dann orthogonal, falls $A^t = A^{-1}$.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^t A = Id$. □

Folgerung A

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n, n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x, y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x, y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n, \mathbb{R})$*:*

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt: $\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal,*

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. $\square$

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,*

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt: $\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.

Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*

Beweis.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*

Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^t A = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = \sigma_{A^t A}(x,y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^t A = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$,

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. $\square$

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$. Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber $A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^t A = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber $A^t(A^t)^t = A^t A = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt: $\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^t A = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*

Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$. Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber $A^t(A^t)^t = A^t A = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^t AB$

Satz 64 *Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: f_A ist genau dann orthogonal, falls $A^t = A^{-1}$.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$: Sind A, B orthogonal, so sind A^{-1}, AB auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB =$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB$

Satz 64 *Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: f_A ist genau dann orthogonal, falls $A^t = A^{-1}$.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. $\square$

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$: Sind A, B orthogonal, so sind A^{-1}, AB auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB$

Satz 64 *Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: f_A ist genau dann orthogonal, falls $A^t = A^{-1}$.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt: $\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$: Sind A, B orthogonal, so sind A^{-1}, AB auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$. Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber $A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$. *Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$.

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$: *Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}, AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also
$(AB)^t$

Satz 64 *Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n, n)$. Dann gilt: f_A ist genau dann orthogonal, falls $A^t = A^{-1}$.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x, y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x, y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$: Sind A, B orthogonal, so sind A^{-1}, AB auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also
$(AB)^t = (AB)^{-1}$.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. $\square$

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also
$(AB)^t = (AB)^{-1}$. $\square$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*

Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also
$(AB)^t = (AB)^{-1}$. □

Folgerung B

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$. *Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$.

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$: *Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}, AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also
$(AB)^t = (AB)^{-1}$. □

Folgerung B *Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist* ± 1

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x,y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x,y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x,y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*

Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also
$(AB)^t = (AB)^{-1}$. □

Folgerung B *Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist* ± 1

Beweis.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x,y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x,y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x,y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also
$(AB)^t = (AB)^{-1}$. □

Folgerung B *Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist* ± 1
Beweis. $det(A^tA) = det(Id) = 1$.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n, n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^t A^t Ay = x^t y = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^t Ay = x^t A^t Ay = \sigma_{A^t A}(x, y)$. Da $(Ax)^t Ay = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x, y)$, ist $A^t A = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n, \mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^t A = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^t AB = B^t A^t AB = B^t A^{-1} AB = B^t B = B^{-1}B = Id$, also
$(AB)^t = (AB)^{-1}$. □

Folgerung B *Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist* ± 1
Beweis. $det(A^t A) = det(Id) = 1$. Aber

$det(A^t A)$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. $\square$

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*

Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$. Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also $(AB)^t = (AB)^{-1}$. $\square$

Folgerung B *Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist* ± 1

Beweis. $det(A^tA) = det(Id) = 1$. Aber
$det(A^tA) \overset{\text{Satz 40}}{=} det(A^t)det(A)$

Satz 64 *Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: f_A ist genau dann orthogonal, falls $A^t = A^{-1}$.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$: Sind A, B orthogonal, so sind A^{-1}, AB auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber $A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also $(AB)^t = (AB)^{-1}$. □

Folgerung B *Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist ± 1*
Beweis. $det(A^tA) = det(Id) = 1$. Aber
$det(A^tA) \overset{\text{Satz 40}}{=} det(A^t)det(A) \overset{\text{Satz 43}}{=}$

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also
$(AB)^t = (AB)^{-1}$. □

Folgerung B *Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist* ± 1
Beweis. $det(A^tA) = det(Id) = 1$. Aber
$det(A^tA) \overset{\text{Satz 40}}{=} det(A^t)det(A) \overset{\text{Satz 43}}{=} det(A)^2$.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$. *Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$.

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x,y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}, AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber $A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also $(AB)^t = (AB)^{-1}$. □

Folgerung B *Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist* ± 1
Beweis. $det(A^tA) = det(Id) = 1$. Aber
$det(A^tA) \overset{\text{Satz 40}}{=} det(A^t)det(A) \overset{\text{Satz 43}}{=} det(A)^2$. Also, $det(A)^2 = 1$,

Satz 64 *Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in Mat(n,n)$. Dann gilt: f_A ist genau dann orthogonal, falls $A^t = A^{-1}$.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x,y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x,y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x,y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$: Sind A, B orthogonal, so sind A^{-1}, AB auch orthogonal.*

Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also
$(AB)^t = (AB)^{-1}$. □

Folgerung B *Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist ± 1*

Beweis. $det(A^tA) = det(Id) = 1$. Aber
$det(A^tA) \overset{\text{Satz 40}}{=} det(A^t)det(A) \overset{\text{Satz 43}}{=} det(A)^2$. Also, $det(A)^2 = 1$, und deswegen $det(A) = \pm 1$.

Satz 64 *Betrachte* $\mathbb{R}^n$ *mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei* $A \in Mat(n,n)$*. Dann gilt:* f_A *ist genau dann orthogonal, falls* $A^t = A^{-1}$*.*

Solche Matrizen heißen orthogonale Matrizen

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen $A^t = A^{-1}$. Dann gilt:
$\langle f_A(x), f_A(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t(Ay) = x^tA^tAy = x^ty = \langle x, y\rangle$. Also, f_A is orthogonal.
Beweis $\Longrightarrow$: Angenommmen, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. Dann ist $(Ax)^tAy = x^tA^tAy = \sigma_{A^tA}(x,y)$. Da $(Ax)^tAy = \langle x, y\rangle = \sigma_{Id}(x,y)$, ist $A^tA = Id$. □

Folgerung A *Orthogonale Matrizen bilden eine Untergruppe von* $GL(n,\mathbb{R})$*: Sind* A, B *orthogonal, so sind* A^{-1}*,* AB *auch orthogonal.*
Beweis. Wir zeigen dass A^{-1} orthogonal ist. Nach Definition $A^{-1} = A^t$.
Z.z.: $(A^t)^t = (A^t)^{-1}$,d.h. $A^t(A^t)^t = Id$. Aber
$A^t(A^t)^t = A^tA = A^{-1}A = Id$, also A^{-1} ist auch eine orthogonale Matrix.
Wir zeigen dass AB orthogonal ist.
$(AB)^tAB = B^tA^tAB = B^tA^{-1}AB = B^tB = B^{-1}B = Id$, also
$(AB)^t = (AB)^{-1}$. □

Folgerung B *Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist* ± 1
Beweis. $det(A^tA) = det(Id) = 1$. Aber
$det(A^tA) \overset{\text{Satz 40}}{=} det(A^t)det(A) \overset{\text{Satz 43}}{=} det(A)^2$. Also, $det(A)^2 = 1$, und deswegen $det(A) = \pm 1$. □

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist.*

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch $O^t AO$ diagonal.

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis;

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie.

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

HA 1

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

HA 1 *Sei O eine orthogonale Matrix,*

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

HA 1 *Sei O eine orthogonale Matrix, A eine symmetrische Matrix.*

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

HA 1 *Sei O eine orthogonale Matrix, A eine symmetrische Matrix. Dann gilt: $O^{-1}AO$ ist symmetrisch.*

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

HA 1 *Sei O eine orthogonale Matrix, A eine symmetrische Matrix. Dann gilt: $O^{-1}AO$ ist symmetrisch.*

Beweis:

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch $O^t AO$ diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

HA 1 *Sei O eine orthogonale Matrix, A eine symmetrische Matrix. Dann gilt: $O^{-1}AO$ ist symmetrisch.*

Beweis: $\begin{cases} O^{-1} = O^t \\ A^t = A \end{cases}$

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

HA 1 *Sei O eine orthogonale Matrix, A eine symmetrische Matrix. Dann gilt: $O^{-1}AO$ ist symmetrisch.*

Beweis: $\left\{ \begin{array}{c} O^{-1} = O^t \\ A^t = A \end{array} \right. \implies (O^{-1}AO)^t =$

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

HA 1 *Sei O eine orthogonale Matrix, A eine symmetrische Matrix. Dann gilt: $O^{-1}AO$ ist symmetrisch.*

Beweis: $\left\{ \begin{array}{c} O^{-1} = O^t \\ A^t = A \end{array} \right. \implies (O^{-1}AO)^t = (O^tAO)^t =$

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

HA 1 *Sei O eine orthogonale Matrix, A eine symmetrische Matrix. Dann gilt: $O^{-1}AO$ ist symmetrisch.*

Beweis: $\left\{ \begin{array}{c} O^{-1} = O^t \\ A^t = A \end{array} \right. \implies (O^{-1}AO)^t = (O^tAO)^t = O^tA^t(O^t)^t =$

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

HA 1 *Sei O eine orthogonale Matrix, A eine symmetrische Matrix. Dann gilt: $O^{-1}AO$ ist symmetrisch.*

Beweis: $\left\{ \begin{array}{c} O^{-1} = O^t \\ A^t = A \end{array} \right. \implies (O^{-1}AO)^t = (O^tAO)^t = O^tA^t(O^t)^t = O^{-1}AO,$

Diagonalisiereung symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$

Wiederholung: A heißt symmetrisch, falls $A^t = A$.
Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist. (Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar mit Hilfe von ortogonalen Transformationen)*

Bemerkung Da $O^t = O^{-1}$, ist auch O^tAO diagonal. Also, die Matrizen von symmetrischen Bilinearform auf reellen Vektorräumen sind diagonalisierbar mit Hilfe von Basiswechsel

Hauptsatz der Algebra – Ohne Beweis; Beweis in Vorlesung Funktionentheorie. Jedes $P \in \mathbb{C}[x]$ hat mind. eine Nullstelle.

HA 1 *Sei O eine orthogonale Matrix, A eine symmetrische Matrix. Dann gilt: $O^{-1}AO$ ist symmetrisch.*
Beweis: $\left\{ \begin{array}{c} O^{-1} = O^t \\ A^t = A \end{array} \right. \implies (O^{-1}AO)^t = (O^tAO)^t = O^tA^t(O^t)^t = O^{-1}AO,$ $\square$

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*

Wiederholung – Vorl. Analysis

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} =$

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2}$

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} =$

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$,

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu v}$:

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v,

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2:

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v.

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v. (Existenz – Haupsatz der Algebra).

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v. (Existenz – Haupsatz der Algebra).
Dann ist $\bar{v}$ auch ein Eigenvektor mit Eigenwert $\bar{\mu}$.

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v. (Existenz – Haupsatz der Algebra).
Dann ist $\bar{v}$ auch ein Eigenvektor mit Eigenwert $\bar{\mu}$.

Dann gilt $\bar{\mu}\bar{v}^t v =$

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v. (Existenz – Haupsatz der Algebra).
Dann ist $\bar{v}$ auch ein Eigenvektor mit Eigenwert $\bar{\mu}$.

Dann gilt $\bar{\mu}\bar{v}^t v = \overline{\mu v}^t v =$

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v. (Existenz – Haupsatz der Algebra).
Dann ist $\bar{v}$ auch ein Eigenvektor mit Eigenwert $\bar{\mu}$.

Dann gilt $\bar{\mu}\bar{v}^t v = \overline{\mu v}^t v = \overline{(Av)}^t v = (A\bar{v})^t v$

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v. (Existenz – Haupsatz der Algebra).
Dann ist $\bar{v}$ auch ein Eigenvektor mit Eigenwert $\bar{\mu}$.

Dann gilt $\bar{\mu}\bar{v}^t v = \overline{\mu v}^t v = \overline{(Av)}^t v = (A\bar{v})^t v = \bar{v}^t Av$

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v. (Existenz – Haupsatz der Algebra).
Dann ist $\bar{v}$ auch ein Eigenvektor mit Eigenwert $\bar{\mu}$.

Dann gilt $\bar{\mu}\bar{v}^t v = \overline{\mu v}^t v = \overline{(Av)}^t v = (A\bar{v})^t v = \bar{v}^t A v = \mu \bar{v}^t v$.

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v. (Existenz – Haupsatz der Algebra).
Dann ist $\bar{v}$ auch ein Eigenvektor mit Eigenwert $\bar{\mu}$.

Dann gilt $\bar{\mu}\bar{v}^t v = \overline{\mu v}^t v = \overline{(Av)}^t v = (A\bar{v})^t v = \bar{v}^t Av = \mu\bar{v}^t v$.

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v. (Existenz – Haupsatz der Algebra).
Dann ist $\bar{v}$ auch ein Eigenvektor mit Eigenwert $\bar{\mu}$.

Dann gilt $\bar{\mu}\bar{v}^t v = \overline{\mu v}^t v = \overline{(Av)}^t v = (A\bar{v})^t v = \bar{v}^t Av = \mu\bar{v}^t v$.

Also, $\bar{\mu}(|v_1|^2 + ... + |v_n|^2)$

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v. (Existenz – Haupsatz der Algebra).
Dann ist $\bar{v}$ auch ein Eigenvektor mit Eigenwert $\bar{\mu}$.

Dann gilt $\bar{\mu}\bar{v}^t v = \overline{\mu v}^t v = \overline{(Av)}^t v = (A\bar{v})^t v = \bar{v}^t Av = \mu \bar{v}^t v$.

Also, $\bar{\mu}(|v_1|^2 + ... + |v_n|^2) = \mu(|v_1|^2 + ... + |v_n|^2)$,

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v. (Existenz – Haupsatz der Algebra).
Dann ist $\bar{v}$ auch ein Eigenvektor mit Eigenwert $\bar{\mu}$.

Dann gilt $\bar{\mu}\bar{v}^t v = \overline{\mu v}^t v = \overline{(Av)}^t v = (A\bar{v})^t v = \bar{v}^t Av = \mu\bar{v}^t v$.

Also, $\bar{\mu}(|v_1|^2 + ... + |v_n|^2) = \mu(|v_1|^2 + ... + |v_n|^2)$, und deswegen $\bar{\mu} = \mu$,

HA 2 *Mind. 1 Eigenwert von (symmetrischen) A ist reell.*
Wiederholung – Vorl. Analysis Für $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$.
Wir erinnern zunächst an folgende Eigenschaften komplexer Zahlen:
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$
(Konjugieren ist ein Autoisomorphismus des Körpers $\mathbb{C}$)
Daraus folgt $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ und $v \in \mathbb{C}^n$.

Daraus folgt: sind die Einträge von A reell, und ist $Av = \mu v$, so ist $A\overline{v} = \overline{\mu}\overline{v}$: Ist μ ein Eigenwert von reellen A mit Eigenvektor v, so ist $\overline{\mu}$ auch ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\overline{v}$.

Beweis von HA 2: Betrachte eine (vielleicht, komplexe) Nullstelle μ von $\aleph_A$ und den zugehörigen (vielleicht, komplexen) Eigenvektor v. (Existenz – Haupsatz der Algebra).
Dann ist $\bar{v}$ auch ein Eigenvektor mit Eigenwert $\bar{\mu}$.

Dann gilt $\bar{\mu}\bar{v}^t v = \overline{\mu v}^t v = \overline{(Av)}^t v = (A\bar{v})^t v = \bar{v}^t Av = \mu \bar{v}^t v$.

Also, $\bar{\mu}(|v_1|^2 + ... + |v_n|^2) = \mu(|v_1|^2 + ... + |v_n|^2)$, und deswegen $\bar{\mu} = \mu$, $\square$

Beweis von Satz 65:

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$.

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \stackrel{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz —

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61:

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$.

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$,

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=}$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur:

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1},

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also $O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1}, und deswegen eine $(n-1 \times n-1)$ orthogonale Matrix O_{n-1} sodass $O_{n-1}^{-1}A_{n-1}O_{n-1} =$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1}, und deswegen eine $(n-1 \times n-1)$ orthogonale Matrix O_{n-1} sodass $O_{n-1}^{-1} A_{n-1} O_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & A_{n-2} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-2} symmetrisch ist

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1}, und deswegen eine $(n-1 \times n-1)$ orthogonale Matrix O_{n-1} sodass $O_{n-1}^{-1} A_{n-1} O_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & A_{n-2} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-2} symmetrisch ist. Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix}$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1}, und deswegen eine $(n-1 \times n-1)$ orthogonale Matrix O_{n-1} sodass $O_{n-1}^{-1} A_{n-1} O_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & A_{n-2} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-2} symmetrisch ist. Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, also
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} O^{-1}AO \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix}$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1}, und deswegen eine $(n-1 \times n-1)$ orthogonale Matrix O_{n-1} sodass $O_{n-1}^{-1}A_{n-1}O_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & A_{n-2} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-2} symmetrisch ist. Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, also

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} O^{-1}AO \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix}$$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1}, und deswegen eine $(n-1 \times n-1)$ orthogonale Matrix O_{n-1} sodass $O_{n-1}^{-1}A_{n-1}O_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & A_{n-2} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-2} symmetrisch ist. Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, also
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} O^{-1}AO \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, u.s.w. (Da O_{n-1} orhtogonal ist, sind $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1}, und deswegen eine $(n-1 \times n-1)$ orthogonale Matrix O_{n-1} sodass $O_{n-1}^{-1}A_{n-1}O_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & A_{n-2} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-2} symmetrisch ist. Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, also
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} O^{-1}AO \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, u.s.w. (Da O_{n-1} orhtogonal ist, sind $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$ auch orthogonal, und deswegen auch $O_{n-1}O$, $(O_{n-1}$

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \stackrel{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1}, und deswegen eine $(n-1 \times n-1)$ orthogonale Matrix O_{n-1} sodass $O_{n-1}^{-1}A_{n-1}O_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & A_{n-2} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-2} symmetrisch ist. Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, also
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} O^{-1}AO \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, u.s.w. (Da O_{n-1} orhtogonal ist, sind $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$ auch orthogonal, und deswegen auch $O_{n-1}O$, $(O_{n-1}O)^{-1}$ auch orthogonal.

Beweis von Satz 65: Nach HA 2 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \vec{0}$ mit $Av = \lambda_1 v$. OBdA ist $|v| = 1$, sonst $v \overset{\text{Ersetze}}{\longrightarrow} \frac{v}{|v|}$. Betrachte eine orthogonale Matrix O sodass $Oe_1 = v$.
(Existenz — Satz 61: Man kann eine orthonormierte Basis $o_1, ..., o_n$ finden sodass $o_1 = v$. Die Matrix O sodass $Oe_i = o_i$ ist orthogonal.)
Dann ist $O^{-1}AOe_1 = O^{-1}Av = \lambda_1 O^{-1}v = \lambda_1 e_1$, also
$O^{-1}AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{HA 1}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-1} eine symmetrische Matrix ist.
Wir wiederholen die Prozedur: Es gibt ein reellen Eigenvektor v von A_{n-1}, und deswegen eine $(n-1 \times n-1)$ orthogonale Matrix O_{n-1} sodass $O_{n-1}^{-1} A_{n-1} O_{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & A_{n-2} \end{pmatrix}$, wobei A_{n-2} symmetrisch ist. Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, also
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} O^{-1}AO \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & A_{n-2} \end{pmatrix}$, u.s.w. (Da O_{n-1} orhtogonal ist, sind $\begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & O_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$ auch orthogonal, und deswegen auch $O_{n-1}O$, $(O_{n-1}O)^{-1}$ auch orthogonal. Nach $n-1$ Schritte bekommen wir die Aussage. $\square$

Wiederholung – Satz 65

Wiederholung – Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist.*

Wiederholung – Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist.*

Folgerung

Wiederholung – Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist.*
Folgerung *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine Matrix $B \in GL(n, \mathbb{R})$,*

Wiederholung – Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist.*

Folgerung *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine Matrix $B \in GL(n, \mathbb{R})$, sodass B^tAB die Form*

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

Wiederholung – Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist.*

Folgerung *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine Matrix $B \in GL(n, \mathbb{R})$, sodass B^tAB die Form*

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

hat,

Wiederholung – Satz 65 *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ diagonal ist.*
Folgerung *Ist A symmetrisch, so gibt eine eine Matrix $B \in GL(n, \mathbb{R})$, sodass B^tAB die Form*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

hat, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht.

Beweis der Folgerung.

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass

$O^{-1}AO$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass

$O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1} = O^t}{=}$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass

$$O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1} = O^t}{=} O^tAO$$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist.

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind,

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind,

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$:

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix,

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil

$(OE_{ij})^t OE_{ij}$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil

$(OE_{ij})^tOE_{ij} =$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil

$(OE_{ij})^t OE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij}$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil

$$(OE_{ij})^tOE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2 = Id}{=}$$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil $(OE_{ij})^tOE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2=Id}{=} Id.$

Dann ist $(O')^{-1}AO'$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil $(OE_{ij})^tOE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2 = Id}{=} Id$.

Dann ist $(O')^{-1}AO' \overset{\text{Weil } (O')^{-1}=(O')^t}{=} (O')^tAO'$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil $(OE_{ij})^t OE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2=Id}{=} Id$.

Dann ist $(O')^{-1}AO' \overset{\text{Weil } (O')^{-1}=(O')^t}{=} (O')^tAO' = (E_{ij})^tO^tAOE_{ij} =$

$$E_{ij}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}E_{ij}$$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil $(OE_{ij})^tOE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2=Id}{=} Id.$

Dann ist $(O')^{-1}AO' \overset{\text{Weil } (O')^{-1}=(O')^t}{=} (O')^tAO' = (E_{ij})^tO^tAOE_{ij} =$

$$E_{ij}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}E_{ij} \overset{\text{Ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil $(OE_{ij})^tOE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2 = Id}{=} Id$.

Dann ist $(O')^{-1}AO' \overset{\text{Weil } (O')^{-1}=(O')^t}{=} (O')^tAO' = (E_{ij})^tO^tAOE_{ij} =$

$$E_{ij}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}E_{ij} \overset{\text{Ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil $(OE_{ij})^tOE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2 = Id}{=} Id.$

Dann ist $(O')^{-1}AO' \overset{\text{Weil } (O')^{-1}=(O')^t}{=} (O')^tAO' = (E_{ij})^tO^tAOE_{ij} =$

$$E_{ij}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}E_{ij} \overset{\text{Ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Beispiel für „Ausrechnen“

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass

$$O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil

$$(OE_{ij})^t OE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2 = Id}{=} Id.$$

Dann ist $(O')^{-1}AO' \overset{\text{Weil } (O')^{-1} = (O')^t}{=} (O')^tAO' = (E_{ij})^tO^tAOE_{ij} =$

$$E_{ij}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}E_{ij} \overset{\text{Ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Beispiel für „Ausrechnen“

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \stackrel{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil $(OE_{ij})^tOE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \stackrel{\text{Weil } (E_{ij})^2=Id}{=} Id.$

Dann ist $(O')^{-1}AO' \stackrel{\text{Weil } (O')^{-1}=(O')^t}{=} (O')^tAO' = (E_{ij})^tO^tAOE_{ij} =$

$$E_{ij}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}E_{ij} \stackrel{\text{Ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Beispiel für „Ausrechnen“

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil

$$(OE_{ij})^tOE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2 = Id}{=} Id.$$

Dann ist $(O')^{-1}AO' \overset{\text{Weil } (O')^{-1}=(O')^t}{=} (O')^tAO' = (E_{ij})^tO^tAOE_{ij} =$

$$E_{ij}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}E_{ij} \overset{\text{Ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Beispiel für „Ausrechnen“: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Beweis der Folgerung. Nach Satz 65 gibt es eine Matrix O sodass $O^{-1}AO \overset{\text{Weil } O^{-1}=O^t}{=} O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. OBdA können wir annehmen, dass $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_r, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind, und $\lambda_{r+s+1} = ...\lambda_n = 0$: wir zeigen, dass wir λ_i und λ_j umstellen, wenn wir O mit geeigneten (orthogonalen) O' ersetzen.

Tatsächlich, die Matrix $O' := OE_{ij}$ ist auch eine Orthogonalmatrix, weil $(OE_{ij})^tOE_{ij} = E_{ij}\underbrace{O^tO}_{Id}E_{ij} \overset{\text{Weil } (E_{ij})^2 = Id}{=} Id$.

Dann ist $(O')^{-1}AO' \overset{\text{Weil } (O')^{-1} = (O')^t}{=} (O')^tAO' = (E_{ij})^tO^tAOE_{ij} =$

$$E_{ij}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}E_{ij} \overset{\text{Ausrechnen}}{=} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Beispiel für „Ausrechnen“: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Also, $O^t AO$

$$\text{Also, } O^t A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Also, } O^t A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Also, $O^t A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda$

ist,

Also, $O^t A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda$

ist,

$$\text{Also, } O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \color{blue}{\lambda_{r+1}} & & & & & \\ & & & & \color{blue}{\ddots} & & & & \\ & & & & & \color{blue}{\lambda_s} & & & \\ & & & & & & \color{red}{0} & & \\ & & & & & & & \color{red}{\ddots} & \\ & & & & & & & & \color{red}{0} \end{pmatrix} := \Lambda$$

ist,

$$\text{Also, } O^t A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda$$

ist, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.
Wir „normieren" alle λ_i:

Also, $O^t A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda$

ist, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.

Wir „normieren" alle λ_i: für die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Also, $O^t A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda$

ist, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.
Wir „normieren“ alle λ_i: für die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$$

Also, $O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_r &&&&&& \\ &&& \lambda_{r+1} &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \lambda_s &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} := \Lambda$

ist, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.

Wir „normieren" alle λ_i: für die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} &&&&&& \\ &&& \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$$

gilt $\underbrace{N^tO^t}_{T^t} A \underbrace{ON}_{T}$

Also, $O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda$

ist, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.
Wir „normieren" alle λ_i: für die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$$

gilt $\underbrace{N^tO^t}_{T^t}A\underbrace{ON}_{T} = N^t\Lambda N =$

Also, $O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda$

ist, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.
Wir „normieren“ alle λ_i: für die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$$

gilt $\underbrace{N^tO^t}_{T^t} A \underbrace{ON}_{T} = N^t\Lambda N = (*)$

Also, $O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda$

ist, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.

Wir „normieren" alle λ_i: für die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$$

gilt $\underbrace{N^tO^t}_{T^t} A \underbrace{ON}_{T} = N^t\Lambda N = (*)$ $\square$

Bemerkung

Also, $O^tAO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda$

ist, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.

Wir „normieren“ alle λ_i: für die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$$

gilt $\underbrace{N^tO^t}_{T^t} A \underbrace{ON}_{T} = N^t\Lambda N = (*)$ □

Bemerkung $T = ON \in GL(n, \mathbb{R})$,

Also, $O^t A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda$

ist, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.
Wir „normieren" alle λ_i: für die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$$

gilt $\underbrace{N^t O^t}_{T^t} A \underbrace{ON}_{T} = N^t \Lambda N = (*)$ $\square$

Bemerkung $T = ON \in GL(n, \mathbb{R})$, da $O \in GL(n, \mathbb{R})$

Also, $O^t A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} := \Lambda$

ist, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_r$ positiv sind, $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_{r+s}$ negativ sind.

Wir „normieren“ alle λ_i: für die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$$

gilt $\underbrace{N^t O^t}_{T^t} A \underbrace{ON}_{T} = N^t \Lambda N = (*)$ □

Bemerkung $T = ON \in GL(n, \mathbb{R})$, da $O \in GL(n, \mathbb{R})$, und $N \in GL(n, \mathbb{R})$.

Zusammenfassung

Ziel war

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21)

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Methode Umformulieren:

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$,

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t AT$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Satz 65/ Folgerung geben die Antwort,

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^tAT$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Satz 65/ Folgerung geben die Antwort, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist: Man kann die Matrix A in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Satz 65/ Folgerung geben die Antwort, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist: Man kann die Matrix A in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „$+1$“ und s Stuck „-1“ steht

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^tAT$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Satz 65/ Folgerung geben die Antwort, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist: Man kann die Matrix A in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „$+1$“ und s Stuck „-1“ steht.

Frage: Kann man noch besser machen?

Zusammenfassung

Ziel war (Ende der Volesung 21): Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Methode Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine symmetrische Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^tAT$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Satz 65/ Folgerung geben die Antwort, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist: Man kann die Matrix A in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

bringen, wobei auf der Diagonale r Stuck „$+1$“ und s Stuck „-1“ steht.
Frage: Kann man noch besser machen?
Antwort – Nein – Trägheitsatz von Silvester

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ,*

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V*

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis*

die Matrix von σ wie folgt ist:

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & {\color{blue}-1} & & & & & \\ & & & & {\color{blue}\ddots} & & & & \\ & & & & & {\color{blue}-1} & & & \\ & & & & & & {\color{red}0} & & \\ & & & & & & & {\color{red}\ddots} & \\ & & & & & & & & {\color{red}0} \end{pmatrix}$$

, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht.

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:* $\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$ *, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt.*

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$
wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1" und s Stuck „-1" steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$r =$

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$r = max\{dim(W)\ s.d.\ W \subset V$

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$r = max\{dim(W)\ s.d.\ W \subset V\ \textit{Untervektorraum mit}\ \sigma(w, w) > 0\ \textit{für alle}\ w \in W,\ w \neq 0\ \textit{ist}\},$

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*
$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix},$$
wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt.
Insbesondere gilt:

$$r = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w,w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq 0 \text{ ist}\}, \qquad (*)$$

$$s = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V$$

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*
$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$
, wobei auf der Diagonale r Stuck „+1" und s Stuck „-1" steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$$r = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w,w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq 0 \text{ ist}\}, \qquad (*)$$

$$s = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w,w) < 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq 0 \text{ ist}\}.$$

Trägheitsatz von Silvester

Satz 66 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer symmetrischen Bilinearform σ, und sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis von V sodass in der Basis die Matrix von σ wie folgt ist:*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei auf der Diagonale r Stuck „+1“ und s Stuck „-1“ steht. Dann sind die Zahlen r und s eindeutig durch die Bilinearform σ festgelegt. Insbesondere gilt:

$$r = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) > 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq 0 \text{ ist}\}, \qquad (*)$$

$$s = max\{dim(W) \text{ s.d. } W \subset V \text{ Untervektorraum mit } \sigma(w, w) < 0 \text{ für alle } w \in W,\ w \neq 0 \text{ ist}\}. \qquad (**)$$