Definition 52 Bilinearform auf V

Wiederholung

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$

Wiederholung

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung $\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, d.h.,

Wiederholung

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung
$\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung
$\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung
$\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

Wiederholung

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung
$\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

Wiederholung

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung
$\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

(Symmetrie) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Wiederholung

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung
$\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

(Symmetrie) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung
$\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

(Symmetrie) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definit, falls

Wiederholung

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung
$\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

(Symmetrie) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definit, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.

Wiederholung

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung
$\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

(Symmetrie) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definit, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.

Eine symmetrische positiv definite Bilinearform heißt Skalarprodukt.

Bsp.

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung
$\sigma : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

(Symmetrie) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definit, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.

Eine symmetrische positiv definite Bilinearform heißt Skalarprodukt.

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$.

Wiederholung

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung
$\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

(Symmetrie) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definit, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.

Eine symmetrische positiv definite Bilinearform heißt Skalarprodukt.

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Wiederholung

Definition 52 Bilinearform auf V ist eine bilineare Abbildung
$\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$, d.h.,
$\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

(Symmetrie) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definit, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.

Eine symmetrische positiv definite Bilinearform heißt Skalarprodukt.

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

setze $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.

Satz 59

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei* $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V*.*

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei* $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* V *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$.

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei* $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* V *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$*. Ferner gilt:*

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei* $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* V *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$*. Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$*.*

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei* $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* V *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.

Diese Matrix $A =$

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei* $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* V *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij})$

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei* $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* V *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei* $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* V *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$*. Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$*.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform,

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei* $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* V *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$*. Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$*.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei* $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* V *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.
(**Wiederholung:** $\sigma_A(u, v)$

Satz 59 *Sei* $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* V *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.
(**Wiederholung:** $\sigma_A(u, v) = \underbrace{(C_B(u))^t}_{\in Mat(1,n)} A \underbrace{C_B(v)}_{\in \mathbb{K}^n \equiv Mat(n,1)}$.)

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei* $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* V *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.
(**Wiederholung:** $\sigma_A(u, v) = \underbrace{(C_B(u))^t}_{\in Mat(1,n)} A \quad \underbrace{C_B(v)}_{\in \mathbb{K}^n \equiv Mat(n,1)}$.)

Ziel: Finden die Basis sodass die Gram'sche Matrix (einer gegebenen Bilinearform) möglich einfach ist

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf V gibt es genau eine $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das (i, j) Element der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.
(**Wiederholung:** $\sigma_A(u, v) = \underbrace{(C_B(u))^t}_{\in Mat(1,n)} A \underbrace{C_B(v)}_{\in \mathbb{K}^n \equiv Mat(n,1)}$.)

Ziel: Finden die Basis sodass die Gram'sche Matrix (einer gegebenen Bilinearform) möglich einfach ist (Einfach = Diagonal?

Wiederhoung – Matrizendarstellung von Bilinearformen

Satz 59 *Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf V gibt es genau eine $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das (i, j) Element der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.
(**Wiederholung:** $\sigma_A(u, v) = \underbrace{(C_B(u))^t}_{\in Mat(1,n)} A \underbrace{C_B(v)}_{\in \mathbb{K}^n \equiv Mat(n,1)}$.)

Ziel: Finden die Basis sodass die Gram'sche Matrix (einer gegebenen Bilinearform) möglich einfach ist (Einfach = Diagonal? Id?) .

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal ,

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist,

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B.

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt: Ist die Basis B orthogonal,

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt: Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal,

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis:

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen:

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gram'schen Matrix $A = (a_{ij})$

gilt a_{ij}

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gram'schen Matrix $A = (a_{ij})$

gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gram'schen Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j) \stackrel{\text{Def. 53}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ & \end{cases}$

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gram'schen Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j) \overset{\text{Def. 53}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ & \end{cases}$

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal, falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gram'schen Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j) \overset{\text{Def. 53}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sigma(b_i, b_i) := \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$.

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gram'schen Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j) \overset{\text{Def. 53}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sigma(b_i, b_i) := \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$.

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gram'schen Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j) \overset{\text{Def. 53}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sigma(b_i, b_i) := \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$.

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gram'schen Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j) \overset{\text{Def. 53}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sigma(b_i, b_i) := \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$.

Wir sehen, dass $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Ist außerdem die Basis orthonormal,

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gram'schen Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j) \overset{\text{Def. 53}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sigma(b_i, b_i) := \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$.

Wir sehen, dass $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Ist außerdem die Basis orthonormal, dann sind $\alpha_i := \sigma(b_i, b_i)$

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gram'schen Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j) \overset{\text{Def. 53}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sigma(b_i, b_i) := \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$.

Wir sehen, dass $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Ist außerdem die Basis orthonormal, dann sind $\alpha_i := \sigma(b_i, b_i) \overset{\text{Def. 53}}{=} 1$,

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gram'schen Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j) \overset{\text{Def. 53}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sigma(b_i, b_i) := \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$.

Wir sehen, dass $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Ist außerdem die Basis orthonormal, dann sind $\alpha_i := \sigma(b_i, b_i) \overset{\text{Def. 53}}{=} 1$, also die Matrix ist Id.

Orthogonale und orthonormale Basen sind die Basen sodass die Bilinearform ist Diagonal bzw. *Id*

Wiederholung – Def. 53 Sei σ eine Bilinearform in V, $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

- B ist orthogonal , falls $\forall i \neq j$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$.
- B ist orthonormal, falls sie orthogonal ist, und falls zusätzlich $\forall i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Lemma 35 Sei A die Gram'sche Matrix von σ bzgl. B. Dann gilt:
Ist die Basis B orthogonal, so ist A diagonal.
Ist die Basis B orthonormal, so ist A Id.

Beweis: Ausrechnen: nach Definition der Gram'schen Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j) \overset{\text{Def. 53}}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sigma(b_i, b_i) := \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$.

Wir sehen, dass $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Ist außerdem die Basis orthonormal, dann sind $\alpha_i := \sigma(b_i, b_i) \overset{\text{Def. 53}}{=} 1$, also die Matrix ist Id.

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis $\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positivdefinit

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positivdefinit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positivdefinit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Beweis:

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positivdefinit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Beweis: Die Diagonale Matrizen sind symmetrisch

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positivdefinit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Beweis: Die Diagonale Matrizen sind symmetrisch (d.h., sie erfüllen $A^t = A$) $\overset{\text{Lemma 34}}{\Longrightarrow}$

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positivdefinit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Beweis: Die Diagonale Matrizen sind symmetrisch (d.h., sie erfüllen $A^t = A$) $\stackrel{\text{Lemma 34}}{\Longrightarrow}$ σ ist symmetrisch.

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positivdefinit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Beweis: Die Diagonale Matrizen sind symmetrisch (d.h., sie erfüllen $A^t = A$) $\stackrel{\text{Lemma 34}}{\Longrightarrow}$ σ ist symmetrisch.

Gibt es eine orthonormale Basis, so ist die Gram'sche Matrix gleich

Id, also für $v \in V$,

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positivdefinit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Beweis: Die Diagonale Matrizen sind symmetrisch (d.h., sie erfüllen $A^t = A$) $\stackrel{\text{Lemma 34}}{\Longrightarrow}$ σ ist symmetrisch.

Gibt es eine orthonormale Basis, so ist die Gram'sche Matrix gleich Id, also für $v \in V, v \neq \vec{0}$ mit Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positivdefinit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Beweis: Die Diagonale Matrizen sind symmetrisch (d.h., sie erfüllen $A^t = A$) $\overset{\text{Lemma 34}}{\Longrightarrow}$ σ ist symmetrisch.

Gibt es eine orthonormale Basis, so ist die Gram'sche Matrix gleich Id, also für $v \in V, v \neq \vec{0}$ mit Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\sigma(v, v) =$

$(x_1 \ \cdots \ x_n) Id \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positivdefinit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Beweis: Die Diagonale Matrizen sind symmetrisch (d.h., sie erfüllen $A^t = A$) $\stackrel{\text{Lemma 34}}{\Longrightarrow}$ σ ist symmetrisch.

Gibt es eine orthonormale Basis, so ist die Gram'sche Matrix gleich Id, also für $v \in V, v \neq \vec{0}$ mit Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\sigma(v, v) =$

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) Id \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positivdefinit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Beweis: Die Diagonale Matrizen sind symmetrisch (d.h., sie erfüllen $A^t = A$) $\overset{\text{Lemma 34}}{\Longrightarrow}$ σ ist symmetrisch.

Gibt es eine orthonormale Basis, so ist die Gram'sche Matrix gleich Id, also für $v \in V, v \neq \vec{0}$ mit Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\sigma(v, v) =$

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) Id \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + ... + x_n^2$$

Folgerung: Sei σ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Es gilt:
(a) $\exists$ eine orthogonale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch.
(b) $\exists$ eine orthonormale Basis$\Longrightarrow$ die Bilinearform ist symmetrisch und positivdefinit (und ist deswegen ein Skalarprodukt).

Beweis: Die Diagonale Matrizen sind symmetrisch (d.h., sie erfüllen $A^t = A$) $\overset{\text{Lemma 34}}{\Longrightarrow}$ σ ist symmetrisch.

Gibt es eine orthonormale Basis, so ist die Gram'sche Matrix gleich Id, also für $v \in V, v \neq \vec{0}$ mit Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\sigma(v, v) =$

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) Id \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \ldots + x_n^2 > 0. \qquad \square$$

Satz 61

Satz 61 *σ sei eine Bilinearform*

Satz 61 *σ sei eine Bilinearform auf einer $\mathbb{R}$- Vektorraum V*

Satz 61 *σ sei eine Bilinearform auf einer $\mathbb{R}$- Vektorraum V der Dimension n.*

Satz 61 *σ sei eine Bilinearform auf einer $\mathbb{R}$- Vektorraum V der Dimension n. Es gibt genau dann eine orthonormale Basis,*

Satz 61 *σ sei eine Bilinearform auf einer $\mathbb{R}$- Vektorraum V der Dimension n. Es gibt genau dann eine orthonormale Basis, wenn die Bilinearform ein Skalarprodukt ist.*

Satz 61 *σ sei eine Bilinearform auf einer $\mathbb{R}$- Vektorraum V der Dimension n. Es gibt genau dann eine orthonormale Basis, wenn die Bilinearform ein Skalarprodukt ist.*

Satz 61 *σ sei eine Bilinearform auf einer $\mathbb{R}$- Vektorraum V der Dimension n. Es gibt genau dann eine orthonormale Basis, wenn die Bilinearform ein Skalarprodukt ist.*

Satz in $\Longrightarrow$: Folgerung (b).

Beweis in $\Longleftarrow$.

Satz 61 *σ sei eine Bilinearform auf einer $\mathbb{R}$- Vektorraum V der Dimension n. Es gibt genau dann eine orthonormale Basis, wenn die Bilinearform ein Skalarprodukt ist.*

Satz in $\Longrightarrow$: Folgerung (b).

Beweis in $\Longleftarrow$. Angenommen, σ ist ein Skalarprodukt;

Satz 61 *σ sei eine Bilinearform auf einer $\mathbb{R}$- Vektorraum V der Dimension n. Es gibt genau dann eine orthonormale Basis, wenn die Bilinearform ein Skalarprodukt ist.*
Satz in $\Longrightarrow$: Folgerung (b).
Beweis in $\Longleftarrow$. Angenommen, σ ist ein Skalarprodukt; wir werden zuerst eine orthogonale,

Satz 61 *σ sei eine Bilinearform auf einer $\mathbb{R}$- Vektorraum V der Dimension n. Es gibt genau dann eine orthonormale Basis, wenn die Bilinearform ein Skalarprodukt ist.*
Satz in $\Longrightarrow$: Folgerung (b).
Beweis in $\Longleftarrow$. Angenommen, σ ist ein Skalarprodukt; wir werden zuerst eine orthogonale, und dann eine orthonormale Basis algoritmisch kostruieren;

Satz 61 *σ sei eine Bilinearform auf einer $\mathbb{R}$- Vektorraum V der Dimension n. Es gibt genau dann eine orthonormale Basis, wenn die Bilinearform ein Skalarprodukt ist.*

Satz in $\Longrightarrow$: Folgerung (b).

Beweis in $\Longleftarrow$. Angenommen, σ ist ein Skalarprodukt; wir werden zuerst eine orthogonale, und dann eine orthonormale Basis algoritmisch kostruieren; der Algoritmus heißt Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren.

Satz 61 *σ sei eine Bilinearform auf einer $\mathbb{R}$- Vektorraum V der Dimension n. Es gibt genau dann eine orthonormale Basis, wenn die Bilinearform ein Skalarprodukt ist.*

Satz in $\Longrightarrow$: Folgerung (b).

Beweis in $\Longleftarrow$. Angenommen, σ ist ein Skalarprodukt; wir werden zuerst eine orthogonale, und dann eine orthonormale Basis algoritmisch kostruieren; der Algoritmus heißt Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren.

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.

Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} \, b_1$.

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.

Eigenschaften von b_2:

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.

Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.

Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.

Beweis (i):

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.

Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) =$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$

$\overset{\text{Bilinearität}}{=}$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) =$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.

Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.

Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.

Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$

$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2)$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii):

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist,

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3.

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0$.
Beweis (ii): Da b_2 eine nichttriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2$.

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0$.
Beweis (ii): Da b_2 eine nichttriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichttriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)} b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3:

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i)

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)} b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.
Beweis (i):

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} \sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) =$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) = \sigma\left(b_1, a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2\right)$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)} b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) = \sigma\left(b_1, a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)} b_2\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=}$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} \sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0$.
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) = \sigma\left(b_1, a_3 - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} b_2\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_3) - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} \sigma(b_1, b_1) - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} \sigma(b_1, b_2)$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) = \sigma\left(b_1, a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_3) - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\sigma(b_1, b_2)$
$= \sigma(b_1, a_3)$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)} b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) = \sigma\left(b_1, a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)} b_2\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_3) - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\sigma(b_1, b_2)$
$= \sigma(b_1, a_3) - \sigma(b_1, a_3)$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) = \sigma\left(b_1, a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_3) - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\sigma(b_1, b_2)$
$= \sigma(b_1, a_3) - \sigma(b_1, a_3) - 0$

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$
Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) = \sigma\left(b_1, a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_3) - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\sigma(b_1, b_2)$
$= \sigma(b_1, a_3) - \sigma(b_1, a_3) - 0 = 0.$
Ähnlich zeigt man $\sigma(b_2, b_3) = 0$.

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0$.
Beweis (ii): Da b_2 eine nichttriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) = \sigma\left(b_1, a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2\right)$
$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_3) - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\sigma(b_1, b_2)$
$= \sigma(b_1, a_3) - \sigma(b_1, a_3) - 0 = 0$.
Ähnlich zeigt man $\sigma(b_2, b_3) = 0$.
Beweis (ii):

Sei $(a_1, ..., a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1\right)$

$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1,a_2)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0.$

Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) = \sigma\left(b_1, a_3 - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\, b_1 - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\, b_2\right)$

$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_3) - \frac{\sigma(b_1,a_3)}{\sigma(b_1,b_1)}\sigma(b_1, b_1) - \frac{\sigma(b_2,a_3)}{\sigma(b_2,b_2)}\sigma(b_1, b_2)$
$= \sigma(b_1, a_3) - \sigma(b_1, a_3) - 0 = 0.$

Ähnlich zeigt man $\sigma(b_2, b_3) = 0$.
Beweis (ii): Da b_3 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2, a_3\}$ ist,

Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Basis.
Schritt 1. Setze $b_1 = a_1$.
Schritt 2. Setze $b_2 = a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0$ ist.
Eigenschaften von b_2: (i) $\sigma(b_1, b_2) = 0$ und (ii) $b_2 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_2) = \sigma\left(b_1, a_2 - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1\right)$

$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_2) - \frac{\sigma(b_1, a_2)}{\sigma(b_1, b_1)} \sigma(b_1, b_1) = \sigma(b_1, a_2) - \sigma(b_1, a_2) = 0$.

Beweis (ii): Da b_2 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2\}$ ist, ist $b_2 \neq \vec{0}$.
Schritt 3. Setze $b_3 = a_3 - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} b_2$. Wohldefiniert, weil $\sigma(b_1, b_1) \neq 0 \neq \sigma(b_2, b_2)$ ist.
Eigenschaften von b_3: (i) $\sigma(b_1, b_3) = \sigma(b_2, b_3) = 0$ und (ii) $b_3 \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_1, b_3) = \sigma\left(b_1, a_3 - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} b_1 - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} b_2\right)$

$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_1, a_3) - \frac{\sigma(b_1, a_3)}{\sigma(b_1, b_1)} \sigma(b_1, b_1) - \frac{\sigma(b_2, a_3)}{\sigma(b_2, b_2)} \sigma(b_1, b_2)$

$= \sigma(b_1, a_3) - \sigma(b_1, a_3) - 0 = 0$.

Ähnlich zeigt man $\sigma(b_2, b_3) = 0$.
Beweis (ii): Da b_3 eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, a_2, a_3\}$ ist, ist $b_3 \neq \vec{0}$.

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, \ldots, b_{k-1}$, die nichttriviale Linearkombinationen der $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ sind. Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \, b_i$.

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, \dots, b_{k-1}$, die nichttriviale Linearkombinationen der $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ sind. Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen:

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, \ldots, b_{k-1}$, die nichttriviale Linearkombinationen der $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i):

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$\overset{\text{Bilinearität}}{=}$

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \sum_{i=1}^{k-1}$$

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)$$

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, \dots, b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma \left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i \right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j,a_k)}{\sigma(b_j,b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$$

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichttriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$
Beweis (ii):

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, \ldots, b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ist,

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, \ldots, b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0$.
Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, \ldots, b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$
Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\stackrel{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.

Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig.

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i\right)$

$$\stackrel{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j,a_k)}{\sigma(b_j,b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.
Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$.

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.
Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j,a_k)}{\sigma(b_j,b_j)}\sigma(b_j, b_j) = 0.$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.
Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichttriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i\right)$

$$\stackrel{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j,b_j) \neq 0} =$$

$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j,a_k)}{\sigma(b_j,b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0$.
Beweis (ii): Da b_k eine nichttriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.
Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

0

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.
Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

$$0 = \sigma(b_j, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i}_{=\vec{0}})$$

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, \dots, b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ sind.

Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, \dots, a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, \dots, b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.
Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

$$0 = \sigma(b_j, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i}_{=\vec{0}}) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(b_j, b_i)$$

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, \dots, b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ sind. Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, \dots, a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, \dots, b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.

Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

$$0 = \sigma(b_j, \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i}_{=\vec{0}}) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma(b_j, b_i) \overset{\substack{\text{weil nur} \\ \sigma(b_j, b_j) \neq 0}}{=}$$

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, \dots, b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, \dots, a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, \dots, b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.
Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

$$0 = \sigma(b_j, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i}_{=\vec{0}}) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(b_j, b_i) \overset{\substack{\text{weil nur} \\ \sigma(b_j, b_j) \neq 0}}{=} \lambda_j \underbrace{\sigma(b_j, b_j)}_{\neq 0}.$$

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.

Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.

Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

$$0 = \sigma(b_j, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i}_{=\vec{0}}) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(b_j, b_i) \overset{\substack{\text{weil nur} \\ \sigma(b_j, b_j) \neq 0}}{=} \lambda_j \underbrace{\sigma(b_j, b_j)}_{\neq 0}.$$

Da $\sigma(b_j, b_j) \neq 0$ ist,

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.
Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.
Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.
Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\stackrel{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.
Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

$$0 = \sigma(b_j, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i}_{=\vec{0}}) \stackrel{\text{Bilinearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(b_j, b_i) \stackrel{\substack{\text{weil nur} \\ \sigma(b_j, b_j) \neq 0}}{=} \lambda_j \underbrace{\sigma(b_j, b_j)}_{\neq 0}.$$

Da $\sigma(b_j, b_j) \neq 0$ ist, muss $\lambda_j = 0$.

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.

Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.

Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

$$0 = \sigma(b_j, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i}_{=\vec{0}}) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(b_j, b_i) \overset{\substack{\text{weil nur} \\ \sigma(b_j, b_j) \neq 0}}{=} \lambda_j \underbrace{\sigma(b_j, b_j)}_{\neq 0}.$$

Da $\sigma(b_j, b_j) \neq 0$ ist, muss $\lambda_j = 0$. Da j beliebig war,

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.

Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j,a_k)}{\sigma(b_j,b_j)}\sigma(b_j, b_j) = 0.$$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.

Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

$$0 = \sigma(b_j, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i}_{=\vec{0}}) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(b_j, b_i) \overset{\substack{\text{weil nur}\\ \sigma(b_j, b_j) \neq 0}}{=} \lambda_j \underbrace{\sigma(b_j, b_j)}_{\neq 0}.$$

Da $\sigma(b_j, b_j) \neq 0$ ist, muss $\lambda_j = 0$. Da j beliebig war, sind alle $\lambda_j = 0$,

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichttriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.

Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.

Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

$$0 = \sigma(b_j, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i}_{=\vec{0}}) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(b_j, b_i) \overset{\substack{\text{weil nur} \\ \sigma(b_j, b_j) \neq 0}}{=} \lambda_j \underbrace{\sigma(b_j, b_j)}_{\neq 0}.$$

Da $\sigma(b_j, b_j) \neq 0$ ist, muss $\lambda_j = 0$. Da j beliebig war, sind alle $\lambda_j = 0$, also ist die Linearkombination trivial.

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.

Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j, a_k)}{\sigma(b_j, b_j)} \sigma(b_j, b_j) = 0.$$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.

Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

$$0 = \sigma(b_j, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i}_{=\vec{0}}) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(b_j, b_i) \overset{\substack{\text{weil nur} \\ \sigma(b_j, b_j) \neq 0}}{=} \lambda_j \underbrace{\sigma(b_j, b_j)}_{\neq 0}.$$

Da $\sigma(b_j, b_j) \neq 0$ ist, muss $\lambda_j = 0$. Da j beliebig war, sind alle $\lambda_j = 0$, also ist die Linearkombination trivial.

Also, $(b_1, ..., b_n)$ ist eine Basis,

Schritt k. Schritt $k-1$ liefert $k-1$ paarweise orthogonale Vektoren $b_1, ..., b_{k-1}$, die nichtriviale Linearkombinationen der $\{a_1, ..., a_{k-1}\}$ sind.

Setze $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i$.

Wir zeigen: (i) für $j < k$ gilt $\sigma(b_j, b_k) = 0$ und (ii) $b_k \neq \vec{0}$.

Beweis (i): $\sigma(b_j, b_k) = \sigma\left(b_j, a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i\right)$

$$\overset{\text{Bilinearität}}{=} \sigma(b_j, a_k) - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i, a_k)}{\sigma(b_i, b_i)} \sigma(b_j, b_i)}_{\text{nur } \sigma(b_j, b_j) \neq 0} =$$

$$\sigma(b_j, a_k) - \frac{\sigma(b_j,a_k)}{\sigma(b_j,b_j)}\sigma(b_j, b_j) = 0.$$

Beweis (ii): Da b_k eine nichtriviale Linearkombination der Elemente der linearunabhängigen Menge $\{a_1, ..., a_k\}$ ist, ist $b_k \neq \vec{0}$.

Nach n Schritten bekommen wir $(b_1, ..., b_n)$ so dass $\sigma(b_i, b_j) = 0$ für $i \neq j$.

Wir zeigen: diese Menge ist linearunabhängig. Sei $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Dann $\forall j$ gilt:

$$0 = \sigma(b_j, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i}_{=\vec{0}}) \overset{\text{Bilinearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(b_j, b_i) \overset{\substack{\text{weil nur}\\ \sigma(b_j, b_j) \neq 0}}{=} \lambda_j \underbrace{\sigma(b_j, b_j)}_{\neq 0}.$$

Da $\sigma(b_j, b_j) \neq 0$ ist, muss $\lambda_j = 0$. Da j beliebig war, sind alle $\lambda_j = 0$, also ist die Linearkombination trivial.

Also, $(b_1, ..., b_n)$ ist eine Basis, nach Konstruktion ist sie orthogonal.

Wir normieren die Basis-Vektoren:

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1,\right.$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2,\right.$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten
$$\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right).$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist,

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen:

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis.

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) =$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, & \\ & \end{cases}$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, & \\ & \end{cases}$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich, $\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ \end{cases}$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ \end{cases}$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ \end{cases}$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \end{cases}$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \end{array} \right.$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases}$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases}$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten
$\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.
Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases}$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i,b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i,b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i=j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \quad \square$$

Satz 61 in Worten:

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt*

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum*

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standart-Skalarprodukt in einer geeigneten Basis.*

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standart-Skalarprodukt in einer geeigneten Basis.*

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standart-Skalarprodukt in einer geigneten Basis.*

Modifikation des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren:

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\, b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\, b_j\right) \stackrel{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standart-Skalarprodukt in einer geigneten Basis.*

Modifikation des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Mann kann in jedem Schritt

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standart-Skalarprodukt in einer geeigneten Basis.*

Modifikation des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Mann kann in jedem Schritt den konstruierten Vektor b_k

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standart-Skalarprodukt in einer geigneten Basis.*

Modifikation des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Mann kann in jedem Schritt den konstruierten Vektor b_k mit $\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_k,b_k)}}$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standart-Skalarprodukt in einer geigneten Basis.*

Modifikation des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Mann kann in jedem Schritt den konstruierten Vektor b_k mit $\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_k,b_k)}}$ multiplizieren.

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten
$\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.
Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standart-Skalarprodukt in einer geeigneten Basis.*
Modifikation des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Mann kann in jedem Schritt den konstruierten Vektor b_k mit $\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_k,b_k)}}$ multiplizieren.
Vorteil 1: die Basis $(b_1, ..., b_n)$ wird orthonormal.

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standart-Skalarprodukt in einer geigneten Basis.*

Modifikation des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Mann kann in jedem Schritt den konstruierten Vektor b_k mit $\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_k,b_k)}}$ multiplizieren.

Vorteil 1: die Basis $(b_1, ..., b_n)$ wird orthonormal.

Vorteil 2: in der Formel

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \stackrel{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standart-Skalarprodukt in einer geigneten Basis.*

Modifikation des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Mann kann in jedem Schritt den konstruierten Vektor b_k mit $\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_k,b_k)}}$ multiplizieren.

Vorteil 1: die Basis $(b_1, ..., b_n)$ wird orthonormal.

Vorteil 2: in der Formel $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)}\,b_i$

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standart-Skalarprodukt in einer geigneten Basis.*

Modifikation des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Mann kann in jedem Schritt den konstruierten Vektor b_k mit $\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_k,b_k)}}$ multiplizieren.

Vorteil 1: die Basis $(b_1, ..., b_n)$ wird orthonormal.

Vorteil 2: in der Formel $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)}\, b_i$ wird $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Wir normieren die Basis-Vektoren: Man betrachten $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_1,b_1)}}b_1, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_2,b_2)}}b_2, ..., \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_n,b_n)}}b_n\right)$. Da $\sigma(b_i, b_i)$ positiv ist, sind die Vektoren wohldefinitert.

Wir zeigen: dieses Tupel ist eine orthonormale Basis. Tatsächlich,

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}}\,b_i, \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\,b_j\right) \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_i,b_i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma(b_j,b_j)}}\sigma(b_i, b_j) = \begin{cases} \frac{\sigma(b_i,b_i)}{\sigma(b_i,b_i)} = 1, \text{ falls } i = j \\ 0, \text{ falls } i \neq j \end{cases} \qquad \square$$

Satz 61 in Worten: *Jedes Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen Vektorraum ist das Standart-Skalarprodukt in einer geigneten Basis.*

Modifikation des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Mann kann in jedem Schritt den konstruierten Vektor b_k mit $\frac{1}{\sqrt{\sigma(b_k,b_k)}}$ multiplizieren.

Vorteil 1: die Basis $(b_1, ..., b_n)$ wird orthonormal.

Vorteil 2: in der Formel $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)}\, b_i$ wird $\sigma(b_i, b_i) = 1$.

Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, werden wir es mit $\langle\ ,\rangle$ bezeichnen, Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, werden wir es mit $\langle \ , \rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u, v)$ werden wir $\langle u, v \rangle$ schreiben.

Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, werden wir es mit $\langle\ ,\rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u, v)$ werden wir $\langle u, v\rangle$ schreiben. Alternative Schreibweise in der Literatur:

Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, werden wir es mit $\langle\ ,\rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u, v)$ werden wir $\langle u, v\rangle$ schreiben. Alternative Schreibweise in der Literatur: $(\ ,\ )$.

Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, werden wir es mit $\langle\ ,\rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u,v)$ werden wir $\langle u,v\rangle$ schreiben. Alternative Schreibweise in der Literatur: $(\ ,\ )$.
Def. 54 *Euklidscher Vektorraum ist ein Paar* $(V,\langle\ ,\ \rangle)$,

Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, werden wir es mit $\langle\ ,\rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u,v)$ werden wir $\langle u,v\rangle$ schreiben. Alternative Schreibweise in der Literatur: $(\ ,\ )$.

Def. 54 *Euklidscher Vektorraum ist ein Paar* $(V,\langle\ ,\ \rangle)$*,wobei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{R}-$*Vektorraum ist,*

Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, werden wir es mit $\langle\ ,\rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u,v)$ werden wir $\langle u,v\rangle$ schreiben. Alternative Schreibweise in der Literatur: $(\ ,\ )$.

Def. 54 *Euklidscher Vektorraum ist ein Paar $(V,\langle\ ,\ \rangle)$,wobei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum ist, und $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt.*

Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, werden wir es mit $\langle\ ,\rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u,v)$ werden wir $\langle u,v\rangle$ schreiben. Alternative Schreibweise in der Literatur: $(\ ,\ )$.

Def. 54 *Euklidscher Vektorraum ist ein Paar* $(V,\langle\ ,\ \rangle)$*,wobei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{R}-$*Vektorraum ist, und* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt.*

Nach Satz 61 können wir in V eine Basis B wählen sodass $\langle\ ,\ \rangle$ Standard-Skalarprodukt ist:

Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, werden wir es mit $\langle\ ,\rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u, v)$ werden wir $\langle u, v\rangle$ schreiben. Alternative Schreibweise in der Literatur: $(\ ,\ )$.

Def. 54 *Euklidscher Vektorraum ist ein Paar* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$*,wobei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{R}-$*Vektorraum ist, und* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt.*

Nach Satz 61 können wir in V eine Basis B wählen sodass $\langle\ ,\ \rangle$ Standard-Skalarprodukt ist: für die Vektoren x, y mit Koordinatenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ gilt:

Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, werden wir es mit $\langle\ ,\rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u,v)$ werden wir $\langle u,v\rangle$ schreiben. Alternative Schreibweise in der Literatur: $(\ ,\ )$.

Def. 54 *Euklidscher Vektorraum ist ein Paar $(V,\langle\ ,\ \rangle)$,wobei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum ist, und $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt.*

Nach Satz 61 können wir in V eine Basis B wählen sodass $\langle\ ,\ \rangle$ Standard-Skalarprodukt ist: für die Vektoren x, y mit Koordinatenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ gilt:$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.

Bemerkung Ist U ein Untervektorraum des Euklidschen Vektorraums $(V,\langle\ ,\ \rangle)$, Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, werden wir es mit $\langle \ , \rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u, v)$ werden wir $\langle u, v\rangle$ schreiben. Alternative Schreibweise in der Literatur: $(\ , \ )$.

Def. 54 *Euklidscher Vektorraum ist ein Paar* $(V, \langle \ , \ \rangle)$,*wobei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{R}-$*Vektorraum ist, und* $\langle \ , \ \rangle$ *ein Skalarprodukt.*

Nach Satz 61 können wir in V eine Basis B wählen sodass $\langle \ , \ \rangle$ Standard-Skalarprodukt ist: für die Vektoren x, y mit Koordinatenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ gilt:$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$.

Bemerkung Ist U ein Untervektorraum des Euklidschen Vektorraums $(V, \langle \ , \ \rangle)$, so ist $(U, \langle \ , \ \rangle_{|U})$ ein Euklidscher Vektorraum,

Bezeichnung: Wenn wir auf V ein Skalarprodukt σ ein ausgewält haben, werden wir es mit $\langle\ ,\rangle$ bezeichnen, d.h. statt $\sigma(u, v)$ werden wir $\langle u, v\rangle$ schreiben. Alternative Schreibweise in der Literatur: $(\ ,\ )$.

Def. 54 *Euklidscher Vektorraum ist ein Paar $(V, \langle\ ,\ \rangle)$,wobei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum ist, und $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt.*

Nach Satz 61 können wir in V eine Basis B wählen sodass $\langle\ ,\ \rangle$ Standard-Skalarprodukt ist: für die Vektoren x, y mit Koordinatenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ gilt:$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n$.

Bemerkung Ist U ein Untervektorraum des Euklidschen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, so ist $(U, \langle\ ,\ \rangle_{|U})$ ein Euklidscher Vektorraum, wobei $\langle u_1, u_2\rangle_{|U} = \langle u_1, u_2\rangle$.

Frage

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*
Satz 62

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*
Satz 62 *Es sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum.*

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*
Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis.*

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*
Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten*

von beliebiges $v \in V$

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*
Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten*

von beliebiges $v \in V$ sind gleich

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten:

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis.

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v.

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$,

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*
Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei* $(V, \langle \ , \ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges* $v \in V$ *sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v \rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v \rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte $\langle b_i, v \rangle =$

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle$$

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*
Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte
$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} x_1\langle b_i, b_1\rangle + ... + x_n\langle b_i, b_n\rangle.$$

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} x_1\langle b_i, b_1\rangle + ... + x_n\langle b_i, b_n\rangle.$$

Da $\langle b_i, b_j\rangle = 0$

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} x_1\langle b_i, b_1\rangle + ... + x_n\langle b_i, b_n\rangle.$$

Da $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für $i \neq j$

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} x_1\langle b_i, b_1\rangle + ... + x_n\langle b_i, b_n\rangle.$$

Da $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle b_i, b_i\rangle = 1$,

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} x_1\langle b_i, b_1\rangle + ... + x_n\langle b_i, b_n\rangle.$$

Da $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle b_i, b_i\rangle = 1$, ist $\langle b_i, v\rangle = x_i$.

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} x_1\langle b_i, b_1\rangle + ... + x_n\langle b_i, b_n\rangle.$$

Da $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle b_i, b_i\rangle = 1$, ist $\langle b_i, v\rangle = x_i$. □

Folgerung

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} x_1\langle b_i, b_1\rangle + ... + x_n\langle b_i, b_n\rangle.$$

Da $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle b_i, b_i\rangle = 1$, ist $\langle b_i, v\rangle = x_i$. $\square$

Folgerung *Es sei V ein $\mathbb{R}-$ Vektorraum*

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} x_1\langle b_i, b_1\rangle + ... + x_n\langle b_i, b_n\rangle.$$

Da $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle b_i, b_i\rangle = 1$, ist $\langle b_i, v\rangle = x_i$. $\square$

Folgerung *Es sei V ein $\mathbb{R}-$ Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$.*

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} x_1\langle b_i, b_1\rangle + ... + x_n\langle b_i, b_n\rangle.$$

Da $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle b_i, b_i\rangle = 1$, ist $\langle b_i, v\rangle = x_i$. $\square$

Folgerung *Es sei V ein $\mathbb{R}-$ Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Für ein $u \in V$ gelte:*

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} x_1\langle b_i, b_1\rangle + ... + x_n\langle b_i, b_n\rangle.$$

Da $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle b_i, b_i\rangle = 1$, ist $\langle b_i, v\rangle = x_i$. $\square$

Folgerung *Es sei V ein $\mathbb{R}-$ Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Für ein $u \in V$ gelte: für jedes $v \in V$ ist $\langle v, u\rangle = 0$.*

Frage *Welche Koordinaten hat ein Vektor v in einer orthonormalen Basis?*

Satz 62 *Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine orthonormale Basis. Dann gilt: die Koordinaten von beliebiges $v \in V$ sind gleich* $\begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix}$.

In Worten: Die Koordinaten in der orthonormalen Basis sind Skalarprodukte mit Basisvektoren.

Beweis. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v. Z.z.: $x_i = \langle b_i, v\rangle$, d.h., $v = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$. Nehme ein $i \in \{1, ..., n\}$ und betrachte

$$\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, x_1 b_1 + ... + x_n b_n\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} x_1\langle b_i, b_1\rangle + ... + x_n\langle b_i, b_n\rangle.$$

Da $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle b_i, b_i\rangle = 1$, ist $\langle b_i, v\rangle = x_i$. □

Folgerung *Es sei V ein $\mathbb{R}-$ Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Für ein $u \in V$ gelte: für jedes $v \in V$ ist $\langle v, u\rangle = 0$. Dann gilt: $u = \vec{0}$.*

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum.*

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren* $u, v \in V$ *heißen orthogonal,*

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren* $u, v \in V$ *heißen orthogonal, falls* $\langle u, v\rangle = 0$.

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren* $u, v \in V$ *heißen orthogonal, falls* $\langle u, v\rangle = 0$*. Vektor* v *heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge* $M \subseteq V$*,*

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren* $u, v \in V$ *heißen orthogonal, falls* $\langle u, v\rangle = 0$*. Vektor* v *heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge* $M \subseteq V$*, falls* v *zu allen Vektoren aus* M *orthogonal ist.*

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren* $u, v \in V$ *heißen orthogonal, falls* $\langle u, v\rangle = 0$. *Vektor* v *heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge* $M \subseteq V$, *falls* v *zu allen Vektoren aus* M *orthogonal ist.*

Bsp. Jeder Vektror ist orthogonal zu $\vec{0}$.

Bemerkung

Def. 55 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren* $u, v \in V$ *heißen orthogonal, falls* $\langle u, v\rangle = 0$*. Vektor* v *heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge* $M \subseteq V$*, falls* v *zu allen Vektoren aus* M *orthogonal ist.*

Bsp. Jeder Vektror ist orthogonal zu $\vec{0}$.

Bemerkung *Wir werden später sehen, dass die Vektoren* $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$ *g.d. orthogonal sind,*

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren* $u, v \in V$ *heißen orthogonal, falls* $\langle u, v\rangle = 0$. *Vektor* v *heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge* $M \subseteq V$, *falls* v *zu allen Vektoren aus* M *orthogonal ist.*

Bsp. Jeder Vektror ist orthogonal zu $\vec{0}$.

Bemerkung *Wir werden später sehen, dass die Vektoren* $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$ *g.d. orthogonal sind, wenn der Winkel zwischen* u *und* v *gleich* $\pi/2$.

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren* $u, v \in V$ *heißen orthogonal, falls* $\langle u, v \rangle = 0$*. Vektor* v *heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge* $M \subseteq V$*, falls* v *zu allen Vektoren aus* M *orthogonal ist.*

Bsp. Jeder Vektror ist orthogonal zu $\vec{0}$.

Bemerkung *Wir werden später sehen, dass die Vektoren* $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$ *g.d. orthogonal sind, wenn der Winkel zwischen* u *und* v *gleich* $\pi/2$*.*

Def. 55 – Vorsetzung

Def. 55 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren* $u, v \in V$ *heißen orthogonal, falls* $\langle u, v\rangle = 0$*. Vektor* v *heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge* $M \subseteq V$*, falls* v *zu allen Vektoren aus* M *orthogonal ist.*

Bsp. Jeder Vektror ist orthogonal zu $\vec{0}$.

Bemerkung *Wir werden später sehen, dass die Vektoren* $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$ *g.d. orthogonal sind, wenn der Winkel zwischen* u *und* v *gleich* $\pi/2$*.*

Def. 55 – Vorsetzung *Sei* U *ein Untervektorraum von* V*.*

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren* $u, v \in V$ *heißen orthogonal, falls* $\langle u, v\rangle = 0$. *Vektor* v *heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge* $M \subseteq V$, *falls* v *zu allen Vektoren aus* M *orthogonal ist.*

Bsp. Jeder Vektror ist orthogonal zu $\vec{0}$.

Bemerkung *Wir werden später sehen, dass die Vektoren* $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$ *g.d. orthogonal sind, wenn der Winkel zwischen* u *und* v *gleich* $\pi/2$.

Def. 55 – Vorsetzung *Sei* U *ein Untervektorraum von* V. *Für* $v \in V$ *der Vektor* $u \in U$ *so dass* $v - u$ *Orthogonal zu* U *ist*

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55 *Sei $(V, \langle \ , \ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren $u, v \in V$ heißen orthogonal, falls $\langle u, v\rangle = 0$. Vektor v heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge $M \subseteq V$, falls v zu allen Vektoren aus M orthogonal ist.*

Bsp. Jeder Vektror ist orthogonal zu $\vec{0}$.

Bemerkung *Wir werden später sehen, dass die Vektoren $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$ g.d. orthogonal sind, wenn der Winkel zwischen u und v gleich $\pi/2$.*

Def. 55 – Vorsetzung *Sei U ein Untervektorraum von V. Für $v \in V$ der Vektor $u \in U$ so dass $v - u$ Orthogonal zu U ist heißt die orthogonale Projektion*

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren $u, v \in V$ heißen orthogonal, falls $\langle u, v\rangle = 0$. Vektor v heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge $M \subseteq V$, falls v zu allen Vektoren aus M orthogonal ist.*

Bsp. Jeder Vektror ist orthogonal zu $\vec{0}$.

Bemerkung *Wir werden später sehen, dass die Vektoren $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$ g.d. orthogonal sind, wenn der Winkel zwischen u und v gleich $\pi/2$.*

Def. 55 – Vorsetzung *Sei U ein Untervektorraum von V. Für $v \in V$ der Vektor $u \in U$ so dass $v - u$ Orthogonal zu U ist heißt die orthogonale Projektion (oder: das Lot) des Vektors v auf U*

Orthogonale Projektion – Lot

Def. 55 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Die Vektoren* $u, v \in V$ *heißen orthogonal, falls* $\langle u, v\rangle = 0$*. Vektor* v *heißt orthogonal zu der nichtleeren Teilmenge* $M \subseteq V$*, falls* v *zu allen Vektoren aus* M *orthogonal ist.*

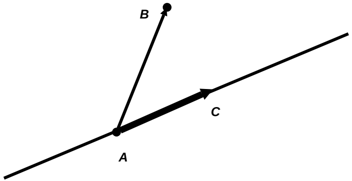
Bsp. Jeder Vektror ist orthogonal zu $\vec{0}$.

Bemerkung *Wir werden später sehen, dass die Vektoren* $u \neq \vec{0}, v \neq \vec{0}$ *g.d. orthogonal sind, wenn der Winkel zwischen* u *und* v *gleich* $\pi/2$*.*

Def. 55 – Vorsetzung *Sei* U *ein Untervektorraum von* V*. Für* $v \in V$ *der Vektor* $u \in U$ *so dass* $v - u$ *Orthogonal zu* U *ist heißt die orthogonale Projektion (oder: das Lot) des Vektors* v *auf* U *und wird* $Proj_U(v)$ *bezeichnet.*

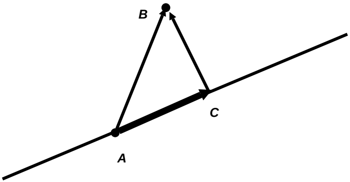
Geometrische Vorstellung:

Geometrische Vorstellung:



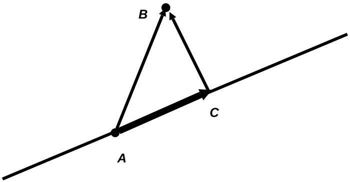
Vektor $\vec{AC}$ ist Projektion des Vektors AB auf der *span* $\left(\{\vec{AC}\}\right)$,

Geometrische Vorstellung:



Vektor $\vec{AC}$ ist Projektion des Vektors AB auf der *span* $\left(\{\vec{AC}\}\right)$,
da $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ zu $\vec{AC}$,

Geometrische Vorstellung:



Vektor $\vec{AC}$ ist Projektion des Vektors AB auf der *span* $\left(\{\vec{AC}\}\right)$, da $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ zu $\vec{AC}$, und deswegen auch zu allen Vektoren aus *span* $\left(\{\vec{AC}\}\right)$, orthogonal ist.

Lemma 36

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum.*

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V.

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V*. Dann gilt:*

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V. *Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U.
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V*. Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U*.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$*,* $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$*.*

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V*. Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U*.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$*.*

In Worten:

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V*. Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U*.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$*,* $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$*.*

In Worten: *Die Projektion des Vektors* v *auf der Unterraum* U *existiert,*

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V*. Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U*.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$*,* $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$*.*

In Worten: *Die Projektion des Vektors* v *auf der Unterraum* U *existiert, ist eindeutig,*

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V. *Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U.
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors* v *auf der Unterraum* U *existiert, ist eindeutig, und minimiert* $|v - u|$,

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V. *Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U.
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors* v *auf der Unterraum* U *existiert, ist eindeutig, und minimiert* $|v - u|$, *wobei* $u \in U$.
Beweis.

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V. *Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U.
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors* v *auf der Unterraum* U *existiert, ist eindeutig, und minimiert* $|v - u|$, *wobei* $u \in U$.
Beweis. Eindeutigkeit:

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig, und minimiert $|v - u|$, wobei $u \in U$.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte:

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V*. Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U*.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors* v *auf der Unterraum* U *existiert, ist eindeutig, und minimiert* $|v - u|$, *wobei* $u \in U$*.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig, und minimiert $|v - u|$, wobei $u \in U$.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V*. Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U*.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$*,* $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$*.*

In Worten: *Die Projektion des Vektors* v *auf der Unterraum* U *existiert, ist eindeutig, und minimiert* $|v - u|$*, wobei* $u \in U$*.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$$

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V*. Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U*.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$*,* $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$*.*

In Worten: *Die Projektion des Vektors* v *auf der Unterraum* U *existiert, ist eindeutig, und minimiert* $|v - u|$*, wobei* $u \in U$*.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle$$

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle \ , \ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V. *Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U.
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors* v *auf der Unterraum* U *existiert, ist eindeutig, und minimiert* $|v - u|$, *wobei* $u \in U$.
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V*. Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U*.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$*,* $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$*.*

In Worten: *Die Projektion des Vektors* v *auf der Unterraum* U *existiert, ist eindeutig, und minimiert* $|v - u|$*, wobei* $u \in U$*.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Existenz.

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig, und minimiert $|v - u|$, wobei $u \in U$.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U.

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig, und minimiert $|v - u|$, wobei $u \in U$.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U. Nach Satz 61 existiert eine orthonormalen Basis $(b_1, ..., b_m)$

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig, und minimiert $|v - u|$, wobei $u \in U$.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U. Nach Satz 61 existiert eine orthonormalen Basis $(b_1, ..., b_m)$ in U.

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig, und minimiert $|v - u|$, wobei $u \in U$.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U. Nach Satz 61 existiert eine orthonormalen Basis $(b_1, ..., b_m)$ in U. Betrachte $u := \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + ... + \langle v, b_m \rangle b_m$.

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig, und minimiert $|v - u|$, wobei $u \in U$.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U. Nach Satz 61 existiert eine orthonormalen Basis $(b_1, ..., b_m)$ in U. Betrachte $u := \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + ... + \langle v, b_m \rangle b_m$. Wir zeigen:

Lemma 36 *Sei $(V, \langle \ , \ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig, und minimiert $|v - u|$, wobei $u \in U$.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U. Nach Satz 61 existiert eine orthonormalen Basis $(b_1, ..., b_m)$ in U. Betrachte $u := \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + ... + \langle v, b_m \rangle b_m$. Wir zeigen: u ist die Projektion von v.

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig, und minimiert $|v - u|$, wobei $u \in U$.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U. Nach Satz 61 existiert eine orthonormalen Basis $(b_1, ..., b_m)$ in U. Betrachte $u := \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + ... + \langle v, b_m \rangle b_m$. Wir zeigen: u ist die Projektion von v. Tatsächlich, $v - u = v - \langle v, b_1 \rangle b_1 - ... - \langle v, b_m \rangle b_m$.

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig, und minimiert $|v - u|$, wobei $u \in U$.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U. Nach Satz 61 existiert eine orthonormalen Basis $(b_1, ..., b_m)$ in U. Betrachte $u := \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + ... + \langle v, b_m \rangle b_m$. Wir zeigen: u ist die Projektion von v. Tatsächlich, $v - u = v - \langle v, b_1 \rangle b_1 - ... - \langle v, b_m \rangle b_m$. Deswegen

$$\langle v - u, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_1 \rangle \langle b_1, b_i \rangle - ... - \langle v, b_m \rangle \langle b_m, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_i \rangle = 0.$$

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig, und minimiert $|v - u|$, wobei $u \in U$.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren $u_1, u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U. Nach Satz 61 existiert eine orthonormalen Basis $(b_1, ..., b_m)$ in U. Betrachte $u := \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + ... + \langle v, b_m \rangle b_m$. Wir zeigen: u ist die Projektion von v. Tatsächlich, $v - u = v - \langle v, b_1 \rangle b_1 - ... - \langle v, b_m \rangle b_m$. Deswegen

$$\langle v - u, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_1 \rangle \langle b_1, b_i \rangle - ... - \langle v, b_m \rangle \langle b_m, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_i \rangle = 0.$$

Also,

Lemma 36 *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Sei* U *ein Untervektorraum von* V. *Dann gilt: für jedes* $v \in V$ *existiert genau eine Projektion* u *des* v *auf* U.
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ *ist* $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors* v *auf der Unterraum* U *existiert, ist eindeutig, und minimiert* $|v - u|$, *wobei* $u \in U$.
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U. Nach Satz 61 existiert eine orthonormalen Basis $(b_1, ..., b_m)$ in U. Betrachte $u := \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + ... + \langle v, b_m \rangle b_m$. Wir zeigen: u ist die Projektion von v. Tatsächlich, $v - u = v - \langle v, b_1 \rangle b_1 - ... - \langle v, b_m \rangle b_m$.
Deswegen

$$\langle v - u, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_1 \rangle \langle b_1, b_i \rangle - ... - \langle v, b_m \rangle \langle b_m, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_i \rangle = 0.$$

Also, $v - u$ ist orthogonal zu allen b_i

Lemma 36 *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt: für jedes $v \in V$ existiert genau eine Projektion u des v auf U.*
Ferner gilt (Hausaufgabe 5): für jedes $u' \in U$, $u' \neq u$ ist $|v - u'| > |v - u|$.

In Worten: *Die Projektion des Vektors v auf der Unterraum U existiert, ist eindeutig, und minimiert $|v - u|$, wobei $u \in U$.*
Beweis. Eindeutigkeit: Für die Vektoren u_1, $u_2 \in U$ gelte: für jedes $u' \in U$ $\langle v - u_1, u' \rangle = 0$ und $\langle v - u_2, u' \rangle = 0$.Dann

$$0 = \langle v - u_1, u' \rangle - \langle v - u_2, u' \rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \langle u_2 - u_1, u' \rangle \overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} u_1 - u_2 = 0.$$

Existenz. Skalarprodukt auf V induziert ein Skalarprodukt auf U. Nach Satz 61 existiert eine orthonormalen Basis $(b_1, ..., b_m)$ in U. Betrachte $u := \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + ... + \langle v, b_m \rangle b_m$. Wir zeigen: u ist die Projektion von v. Tatsächlich, $v - u = v - \langle v, b_1 \rangle b_1 - ... - \langle v, b_m \rangle b_m$. Deswegen

$$\langle v - u, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_1 \rangle \langle b_1, b_i \rangle - ... - \langle v, b_m \rangle \langle b_m, b_i \rangle = \langle v, b_i \rangle - \langle v, b_i \rangle = 0.$$

Also, $v - u$ ist orthogonal zu allen b_i und deswegen zu allen $u' \in U$.

Wicht. Formel aus dem Beweis von Lemma 36:

Wicht. Formel aus dem Beweis von Lemma 36:
$Proj_U(v) = \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + ... + \langle v, b_m\rangle b_m$, wobei $(b_1, ..., b_m)$ eine orthonormierte Basis in U ist.

Wicht. Formel aus dem Beweis von Lemma 36:
$Proj_U(v) = \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + ... + \langle v, b_m \rangle b_m$, wobei $(b_1, ..., b_m)$ eine orthonormierte Basis in U ist.

Geometrische Beschreibung des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren:

Wicht. Formel aus dem Beweis von Lemma 36:
$Proj_U(v) = \langle v, b_1 \rangle b_1 + \langle v, b_2 \rangle b_2 + ... + \langle v, b_m \rangle b_m$, wobei $(b_1, ..., b_m)$ eine orthonormierte Basis in U ist.

Geometrische Beschreibung des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Für $k \geq 2$

Wicht. Formel aus dem Beweis von Lemma 36:
$Proj_U(v) = \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + ... + \langle v, b_m\rangle b_m$, wobei $(b_1, ..., b_m)$ eine orthonormierte Basis in U ist.

Geometrische Beschreibung des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Für $k \geq 2$ gilt
$b_k = a_k - Proj_{span(\{a_1,...,a_{k-1}\})}(a_k)$.

Wicht. Formel aus dem Beweis von Lemma 36:
$Proj_U(v) = \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + ... + \langle v, b_m\rangle b_m$, wobei $(b_1, ..., b_m)$ eine orthonormierte Basis in U ist.

Geometrische Beschreibung des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Für $k \geq 2$ gilt $b_k = a_k - Proj_{span(\{a_1,...,a_{k-1}\})}(a_k)$.

Tatsächlich, die Formel für b_k war $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)}\, b_i$

Wicht. Formel aus dem Beweis von Lemma 36:
$Proj_U(v) = \langle v, b_1\rangle b_1 + \langle v, b_2\rangle b_2 + ... + \langle v, b_m\rangle b_m$, wobei $(b_1, ..., b_m)$ eine orthonormierte Basis in U ist.

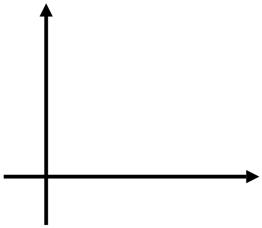
Geometrische Beschreibung des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren: Für $k \geq 2$ gilt
$b_k = a_k - Proj_{span(\{a_1,...,a_{k-1}\})}(a_k)$.

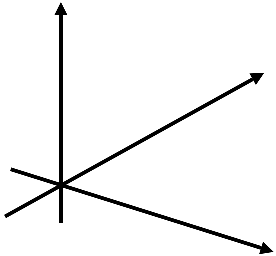
Tatsächlich, die Formel für b_k war
$b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma(b_i,a_k)}{\sigma(b_i,b_i)} b_i = a_k - Proj_{span(\{a_1,...,a_{k-1}\})}(a_k)$,
weil $\left\{\frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1,b_1\rangle}}, ..., \frac{b_{k-1}}{\sqrt{\langle b_{k-1},b_{k-1}\rangle}}\right\}$ eine orthonormalen Basis in $span(\{a_1, ..., a_{k-1}\})$ ist.

Link zur Schulgeometrie

Link zur Schulgeometrie

Schuldefinition Ein cartesisches (descartsches) Koordinatensystem auf einer Ebene besteht aus zwei orthogonalen orientierenden Geraden. Ein kartesisches (descartsches) Koordinatensystem im Raum besteht aus drei paarweise orthogonalen orientierenden Geraden, die alle einen gemeinsamen Punkt haben.



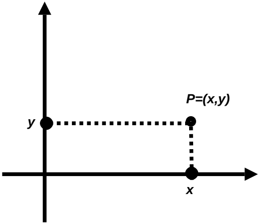


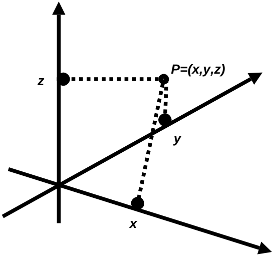
Link zur Schulgeometrie

Koordinaten eines Punkts P sind die Abstände zwischen Lot des Punktes auf der Geraden mit dem Vorzeichen. Das Vorzeichen ist „$+$“, falls das Lot auf der positiven Hälfte der Geraden liegt, und „$-$“, falls das Lot auf der negativen Hälfte der Geraden liegt

Link zur Schulgeometrie

Koordinaten eines Punkts P sind die Abstände zwischen Lot des Punktes auf der Geraden mit dem Vorzeichen. Das Vorzeichen ist „$+$“, falls das Lot auf der positiven Hälfte der Geraden liegt, und „$-$“, falls das Lot auf der negativen Hälfte der Geraden liegt

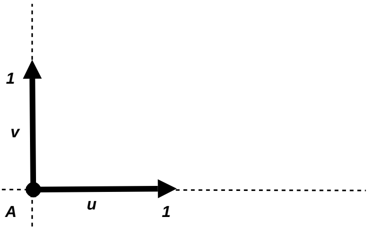




Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

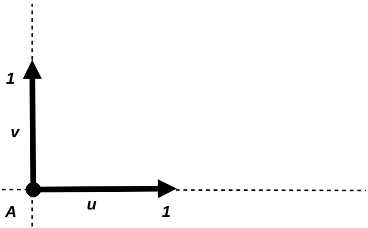
Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind

,



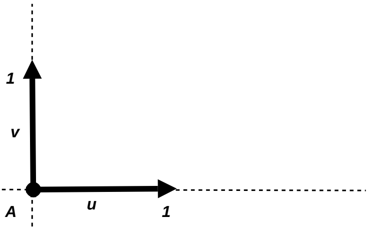
Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist,



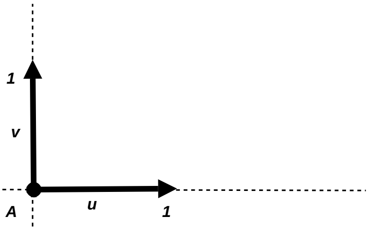
Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene



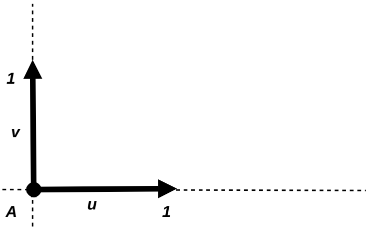
Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).



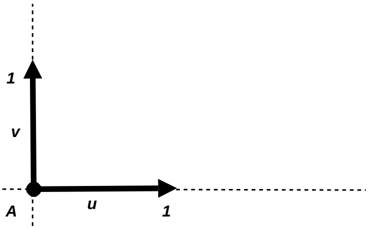
Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene.



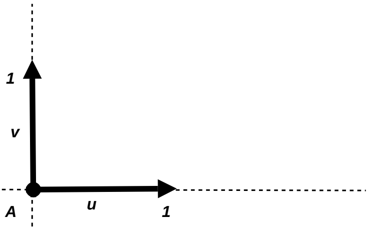
Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A.



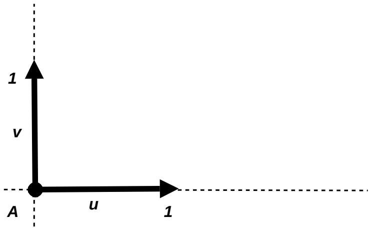
Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A.



Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

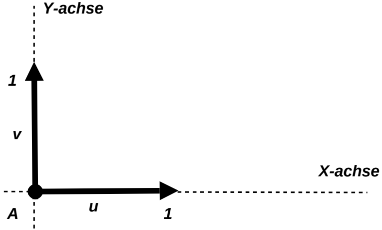
Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden



Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

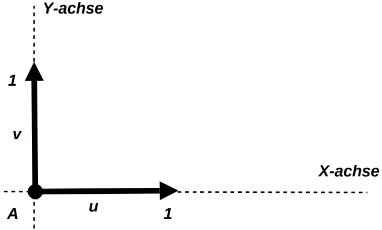
Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).

Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-achse und Y-achse).



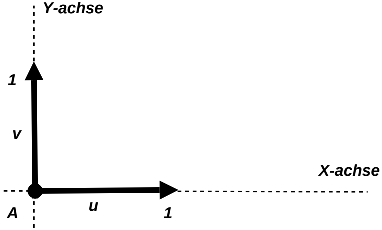
Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-achse und Y-achse). Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in Basis $(\vec{u}, \vec{v})$,



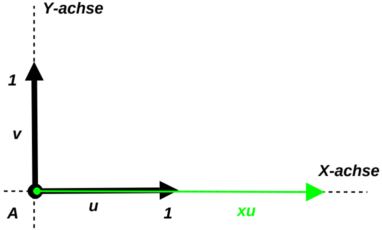
Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-achse und Y-achse). Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in Basis $(\vec{u}, \vec{v})$, also $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.



Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

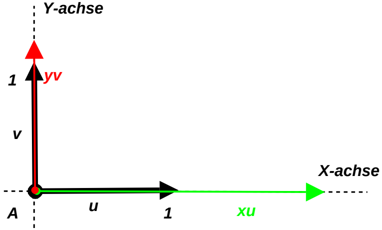
Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-achse und Y-achse). Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in Basis $(\vec{u}, \vec{v})$, also $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.



Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).

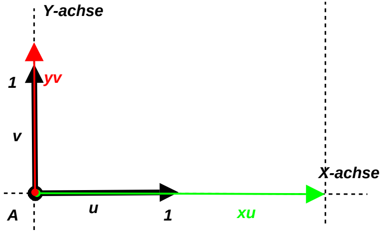
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-achse und Y-achse). Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in Basis $(\vec{u}, \vec{v})$, also $\vec{w} = {\color{green}x\vec{u}} + {\color{red}y\vec{v}}$.



Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).

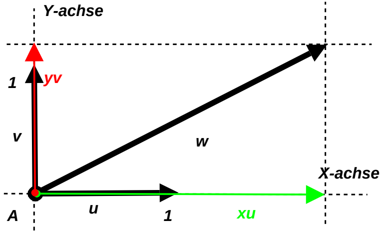
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-achse und Y-achse). Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in Basis $(\vec{u}, \vec{v})$, also $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.



Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).

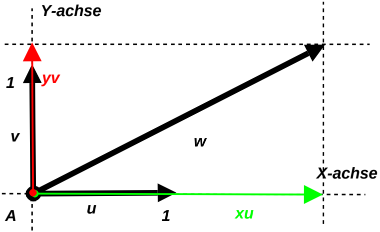
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-achse und Y-achse). Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in Basis $(\vec{u}, \vec{v})$, also $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.



Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

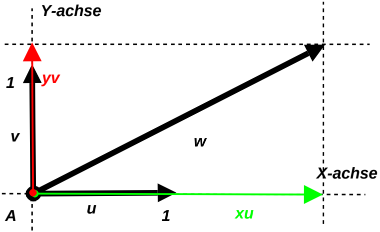
Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).

Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A.   Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-achse und Y-achse).   Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in Basis $(\vec{u}, \vec{v})$,   also $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.   Da die Länge von Vektor $x\vec{u} = |x|$,



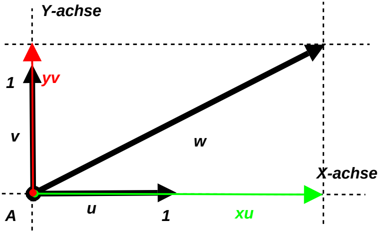
Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-achse und Y-achse). Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in Basis $(\vec{u}, \vec{v})$, also $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Da die Länge von Vektor $x\vec{u} = |x|$, ist der Abstand zwischen orthogonalen Projektionen auf die X-Achse und A

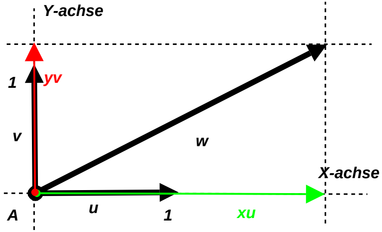


Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-achse und Y-achse). Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in Basis $(\vec{u}, \vec{v})$, also $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Da die Länge von Vektor $x\vec{u} = |x|$, ist der Abstand zwischen orthogonalen Projektionen auf die X-Achse und A gleich x.



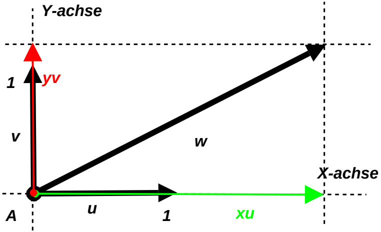
Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).
Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-achse und Y-achse). Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in Basis $(\vec{u}, \vec{v})$, also $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Da die Länge von Vektor $x\vec{u} = |x|$, ist der Abstand zwischen orthogonalen Projektionen auf die X-Achse und A gleich x. Ähnlich ist der Abstand zwischen orthogonalen Projektion auf die Y-Achse und A gleich y.



Cartesische Koordinaten als Koordianten bzgl. einer Basis

Wir zeigen: Falls die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ orthogonal sind und deren Länge gleich 1 ist, dann sind die Koordinaten jedes Vektors in dem Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ auf der Ebene gleich die kartesischen Koordinaten (bzgl. der Geraden, die von Vektoren u und v erzeugt sind).

Nehmen wir ein Punkt A auf der Ebene. Man betrachte zwei orthogonalen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ mit Anfang in A. Man betrachte die erzeugten (geordneten) Geraden (X-achse und Y-achse). Vektor $\vec{w}$ habe Koordinaten $\binom{x}{y}$ in Basis $(\vec{u}, \vec{v})$, also $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Da die Länge von Vektor $x\vec{u} = |x|$, ist der Abstand zwischen orthogonalen Projektionen auf die X-Achse und A gleich x. Ähnlich ist der Abstand zwischen orthogonalen Projektion auf die Y-Achse und A gleich y. Also, die kartesische Koordinaten sind auch $\binom{x}{y}$.



Die Länge

Def. 56

Die Länge

Def. 56 *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum* V.

Die Länge

Def. 56 *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum* V. *Für jeden Vektor* $v \in V$ *heißt die Zahl* $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ *die Länge von* v

Die Länge

Def. 56 *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum* V. *Für jeden Vektor* $v \in V$ *heißt die Zahl* $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ *die* Länge *von* v *und wird* $|v|$ *bezeichnet.*

$\square$

Die Länge

Def. 56 *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum* V. *Für jeden Vektor* $v \in V$ *heißt die Zahl* $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ *die Länge von* v *und wird* $|v|$ *bezeichnet.*

Bemerkung.

Die Länge

Def. 56 *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum* V. *Für jeden Vektor* $v \in V$ *heißt die Zahl* $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ *die Länge von* v *und wird* $|v|$ *bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts gilt $\langle v, v\rangle \geq 0$.

$\square$

Die Länge

Def. 56 *Sei* $\langle\ ,\ \rangle$ *ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum* V. *Für jeden Vektor* $v \in V$ *heißt die Zahl* $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ *die Länge von* v *und wird* $|v|$ *bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts gilt $\langle v, v\rangle \geq 0$.

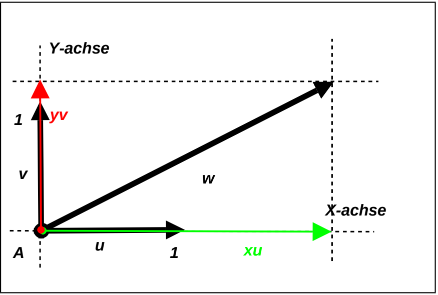
Bemerkung *Auf der Ebene bzw. im Raum ist die Länge eines Vektors in Sinne Definition 56 die „übliche" Länge*

Die Länge

Def. 56 *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum V. Für jeden Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ die Länge von v und wird $|v|$ bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts gilt $\langle v, v\rangle \geq 0$.

Bemerkung *Auf der Ebene bzw. im Raum ist die Länge eines Vektors in Sinne Definition 56 die „übliche" Länge*



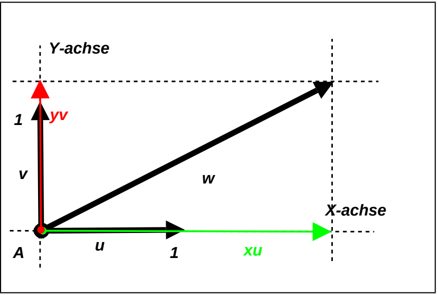
Tatsächlich, für $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ist

Die Länge

Def. 56 *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum V. Für jeden Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ die* Länge *von v und wird $|v|$ bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts gilt $\langle v, v\rangle \geq 0$.

Bemerkung *Auf der Ebene bzw. im Raum ist die Länge eines Vektors in Sinne Definition 56 die „übliche" Länge*



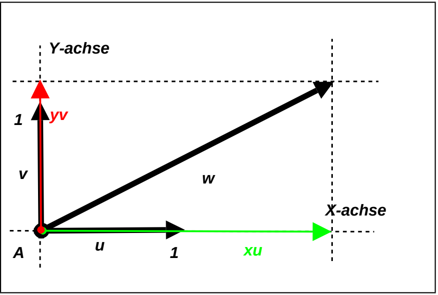
Tatsächlich, für $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ist $|w|^2 \overset{\text{Def. 56}}{=}$

Die Länge

Def. 56 *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum V. Für jeden Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ die Länge von v und wird $|v|$ bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts gilt $\langle v, v\rangle \geq 0$.

Bemerkung *Auf der Ebene bzw. im Raum ist die Länge eines Vektors in Sinne Definition 56 die „übliche“ Länge*



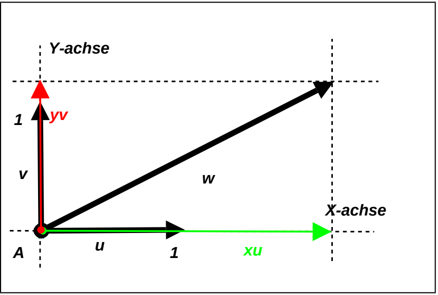
Tatsächlich, für $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ist $|w|^2 \overset{\text{Def. 56}}{=} \langle w, w\rangle \underset{\text{Bilinearität}}{=}$

Die Länge

Def. 56 *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum V. Für jeden Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ die* **Länge** *von v und wird $|v|$ bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts gilt $\langle v, v\rangle \geq 0$.

Bemerkung *Auf der Ebene bzw. im Raum ist die Länge eines Vektors in Sinne Definition 56 die „übliche“ Länge*



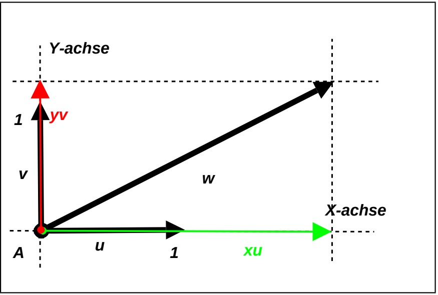
Tatsächlich, für $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ist $|w|^2 \overset{\text{Def. 56}}{=} \langle w, w\rangle = \langle x\vec{u} + y\vec{v}, x\vec{u} + y\vec{v}\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$

Die Länge

Def. 56 *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum V. Für jeden Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ die* *Länge* *von v und wird $|v|$ bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts gilt $\langle v, v\rangle \geq 0$.

Bemerkung *Auf der Ebene bzw. im Raum ist die Länge eines Vektors in Sinne Definition 56 die „übliche“ Länge*



Tatsächlich, für $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ist

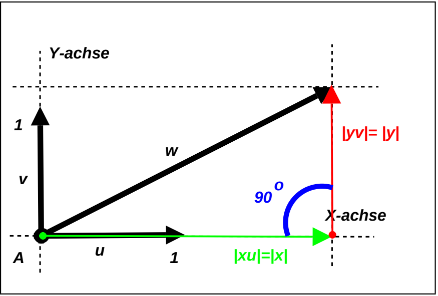
$$|w|^2 \overset{\text{Def. 56}}{=} \langle w, w\rangle = \langle x\vec{u} + y\vec{v}, x\vec{u} + y\vec{v}\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \underbrace{\langle x\vec{u}, x\vec{u}\rangle}_{=x^2} + \underbrace{\langle x\vec{u}, y\vec{v}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, x\vec{u}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, y\vec{v}\rangle}_{=y^2}$$

Die Länge

Def. 56 *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum V. Für jeden Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ die* *Länge* *von v und wird $|v|$ bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts gilt $\langle v, v\rangle \geq 0$.

Bemerkung *Auf der Ebene bzw. im Raum ist die Länge eines Vektors in Sinne Definition 56 die „übliche" Länge*



Tatsächlich, für $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ist

$$|w|^2 \overset{\text{Def. 56}}{=} \langle w, w\rangle = \langle x\vec{u} + y\vec{v}, x\vec{u} + y\vec{v}\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \underbrace{\langle x\vec{u}, x\vec{u}\rangle}_{=x^2} + \underbrace{\langle x\vec{u}, y\vec{v}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, x\vec{u}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, y\vec{v}\rangle}_{=y^2}$$

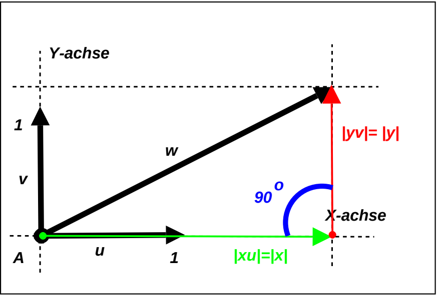
$$= x^2 + y^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=}$$

Die Länge

Def. 56 *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum V. Für jeden Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ die* Länge *von v und wird $|v|$ bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts gilt $\langle v, v\rangle \geq 0$.

Bemerkung *Auf der Ebene bzw. im Raum ist die Länge eines Vektors in Sinne Definition 56 die „übliche" Länge*



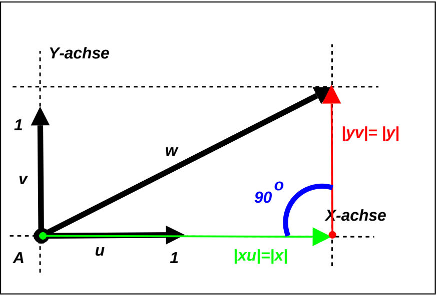
Tatsächlich, für $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ist $|w|^2 \overset{\text{Def. 56}}{=} \langle w, w\rangle = \langle x\vec{u} + y\vec{v}, x\vec{u} + y\vec{v}\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=} \underbrace{\langle x\vec{u}, x\vec{u}\rangle}_{=x^2} + \underbrace{\langle x\vec{u}, y\vec{v}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, x\vec{u}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, y\vec{v}\rangle}_{=y^2} = x^2 + y^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=}$ Die „übliche" Länge

Die Länge

Def. 56 *Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Euklidschen Vektorraum V. Für jeden Vektor $v \in V$ heißt die Zahl $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ die* Länge *von v und wird $|v|$ bezeichnet.*

Bemerkung. Die Länge des Vektors ist wohldefiniert, da nach Definition des Skalarprodukts gilt $\langle v, v\rangle \geq 0$.

Bemerkung *Auf der Ebene bzw. im Raum ist die Länge eines Vektors in Sinne Definition 56 die „übliche" Länge*



Tatsächlich, für $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ist $|w|^2 \overset{\text{Def. 56}}{=} \langle w, w\rangle = \langle x\vec{u} + y\vec{v}, x\vec{u} + y\vec{v}\rangle \overset{\text{Bilinearität}}{=}$
$$\underbrace{\langle x\vec{u}, x\vec{u}\rangle}_{=x^2} + \underbrace{\langle x\vec{u}, y\vec{v}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, x\vec{u}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y\vec{v}, y\vec{v}\rangle}_{=y^2}$$
$= x^2 + y^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=}$ Die „übliche" Länge (Weil alle Winkel in Parallelogramm $\pi/2$ sind).

Der Winkel

Definition 56 – Vortsetzung

Definition 56 – Vortsetzung *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum.*

Definition 56 – Vortsetzung *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Für je zwei Vektoren* $u \neq 0, v \neq 0$

Der Winkel

Definition 56 – Vortsetzung *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Für je zwei Vektoren* $u \neq 0, v \neq 0$ *heißt die Zahl* $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in (0,\pi)$ *der Winkel zwischen* u *und* v*.*

Der Winkel

Definition 56 – Vortsetzung *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Für je zwei Vektoren* $u \neq 0, v \neq 0$ *heißt die Zahl* $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in (0, \pi)$ *der Winkel zwischen* u *und* v*.*

Bemerkung

Der Winkel

Definition 56 – Vortsetzung *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Für je zwei Vektoren* $u \neq 0, v \neq 0$ *heißt die Zahl* $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in (0,\pi)$ *der* *Winkel* *zwischen* u *und* v.

Bemerkung *Um zu zeigen, dass Winkel zwischen* u *und* v *wohldefiniert ist, werden wir am Montag Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigen:* $-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|} \leq 1$, *d.h.,* $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$.

Der Winkel

Definition 56 – Vortsetzung *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Für je zwei Vektoren* $u \neq 0, v \neq 0$ *heißt die Zahl* $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in (0, \pi)$ *der* *Winkel* *zwischen* u *und* v.

Bemerkung *Um zu zeigen, dass Winkel zwischen u und v wohldefiniert ist, werden wir am Montag Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigen:* $-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|} \leq 1$, *d.h.,* $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$.

Bemerkung *Auf der Ebene/Im Raum ist der Winkel in Sinne Definition 56 der übliche Winkel*

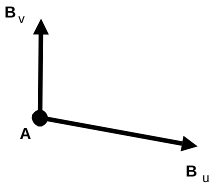
Der Winkel

Definition 56 – Vortsetzung *Sei* $(V, \langle \ , \ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Für je zwei Vektoren* $u \neq 0, v \neq 0$ *heißt die Zahl* $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in (0, \pi)$ *der Winkel zwischen* u *und* v.

Bemerkung *Um zu zeigen, dass Winkel zwischen* u *und* v *wohldefiniert ist, werden wir am Montag Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigen:* $-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|} \leq 1$, *d.h.,* $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$.

Bemerkung *Auf der Ebene/Im Raum ist der Winkel in Sinne Definition 56 der übliche Winkel*

Wiederholung – Schulgeometrie:



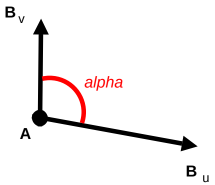
Der Winkel

Definition 56 – Vortsetzung *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein Euklidscher Vektorraum. Für je zwei Vektoren* $u \neq 0, v \neq 0$ *heißt die Zahl* $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in (0,\pi)$ *der* ***Winkel*** *zwischen* u *und* v*.*

Bemerkung *Um zu zeigen, dass Winkel zwischen* u *und* v *wohldefiniert ist, werden wir am Montag Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigen:* $-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|} \leq 1$, *d.h.,* $|\langle u,v\rangle| \leq |u|\,|v|$.

Bemerkung *Auf der Ebene/Im Raum ist der Winkel in Sinne Definition 56 der übliche Winkel*

Wiederholung – Schulgeometrie: In Auf der Ebene/In Raum ist $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(alpha)$.



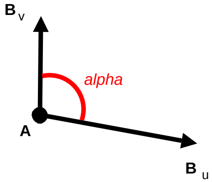
Der Winkel

Definition 56 – Vortsetzung *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidscher Vektorraum. Für je zwei Vektoren $u \neq 0, v \neq 0$ heißt die Zahl* $\arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}\right) \in (0,\pi)$ *der* *Winkel* *zwischen u und v.*

Bemerkung *Um zu zeigen, dass Winkel zwischen u und v wohldefiniert ist, werden wir am Montag Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigen:* $-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|} \leq 1$, *d.h.,* $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$.

Bemerkung *Auf der Ebene/Im Raum ist der Winkel in Sinne Definition 56 der übliche Winkel*

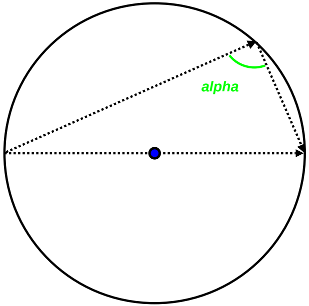
Wiederholung – Schulgeometrie: In Auf der Ebene/In Raum ist $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(alpha)$. Also ist $\cos(alpha) = \frac{\langle \vec{u},\vec{v}\rangle}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.



Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere Schulgeometrische Aufgaben lösen

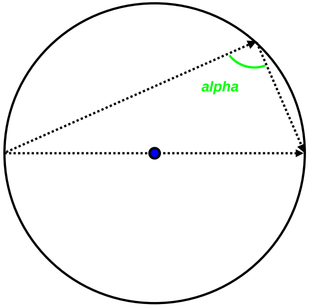
Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere Schulgeometrische Aufgaben lösen

Z.Z. *Im Dreieck auf dem Bild*



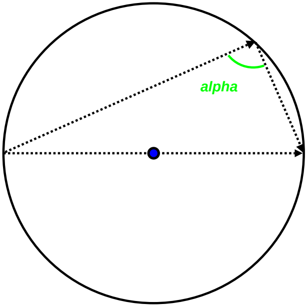
Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere Schulgeometrische Aufgaben lösen

Z.Z. *Im Dreieck auf dem Bild* ist der Winkel *alpha* gleich $\pi/2$.



Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere Schulgeometrische Aufgaben lösen

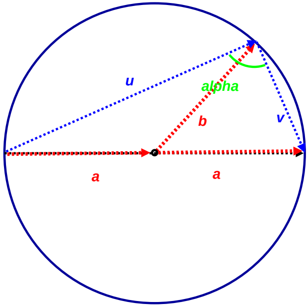
Z.Z. *Im Dreieck auf dem Bild* ist der Winkel *alpha* gleich $\pi/2$.



Beweis. Betrachte die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ wie auf dem Bild.

Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere Schulgeometrische Aufgaben lösen

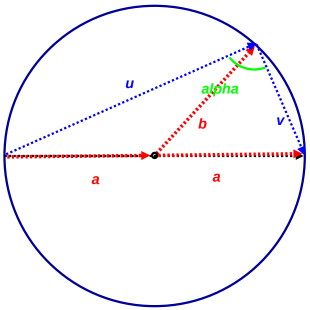
Z.Z. *Im Dreieck auf dem Bild* ist der Winkel *alpha* gleich $\pi/2$.



Beweis. Betrachte die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ wie auf dem Bild.

Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere Schulgeometrische Aufgaben lösen

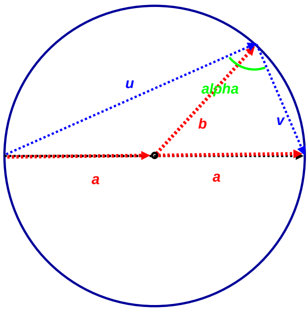
Z.Z. *Im Dreieck auf dem Bild* ist der Winkel *alpha* gleich $\pi/2$.



Beweis. Betrachte die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ wie auf dem Bild. Wir zeigen, dass $\langle \underbrace{\vec{a}+\vec{b}}_{\vec{u}}, \underbrace{\vec{a}-\vec{b}}_{\vec{v}} \rangle = 0$.

Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere Schulgeometrische Aufgaben lösen

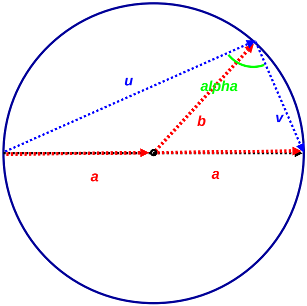
Z.Z. *Im Dreieck auf dem Bild* ist der Winkel *alpha* gleich $\pi/2$.



Beweis. Betrachte die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ wie auf dem Bild. Wir zeigen, dass $\langle \underbrace{\vec{a}+\vec{b}}_{\vec{u}}, \underbrace{\vec{a}-\vec{b}}_{\vec{v}} \rangle = 0$. Wegen Bilinearität und Symmetrie, ist

Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere Schulgeometrische Aufgaben lösen

Z.Z. *Im Dreieck auf dem Bild* ist der Winkel alpha gleich $\pi/2$.

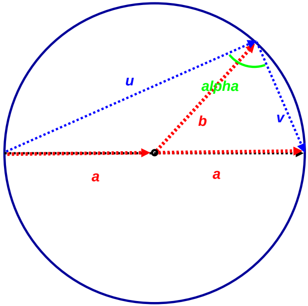


Beweis. Betrachte die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ wie auf dem Bild. Wir zeigen, dass $\langle \underbrace{\vec{a}+\vec{b}}_{\vec{u}}, \underbrace{\vec{a}-\vec{b}}_{\vec{v}} \rangle = 0$. Wegen Bilinearität und Symmetrie, ist

$\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b} \rangle =$

Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere Schulgeometrische Aufgaben lösen

Z.Z. *Im Dreieck auf dem Bild* ist der Winkel *alpha* gleich $\pi/2$.

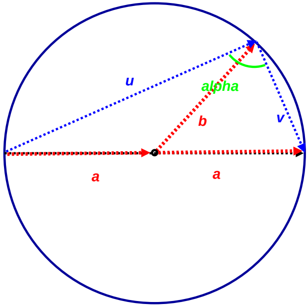


Beweis. Betrachte die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ wie auf dem Bild. Wir zeigen, dass $\langle \underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{u}}, \underbrace{\vec{a} - \vec{b}}_{\vec{v}} \rangle = 0$. Wegen Bilinearität und Symmetrie, ist

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{=0, \text{ Symmetrie}} - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle =$$

Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere Schulgeometrische Aufgaben lösen

Z.Z. *Im Dreieck auf dem Bild* ist der Winkel *alpha* gleich $\pi/2$.

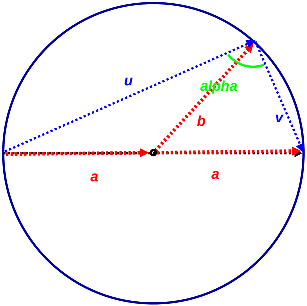


Beweis. Betrachte die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ wie auf dem Bild. Wir zeigen, dass $\langle \underbrace{\vec{a}+\vec{b}}_{\vec{u}}, \underbrace{\vec{a}-\vec{b}}_{\vec{v}} \rangle = 0$. Wegen Bilinearität und Symmetrie, ist

$$\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{=0,\ \text{Symmetrie}} - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle =$$

Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere Schulgeometrische Aufgaben lösen

Z.Z. *Im Dreieck auf dem Bild* ist der Winkel *alpha* gleich $\pi/2$.



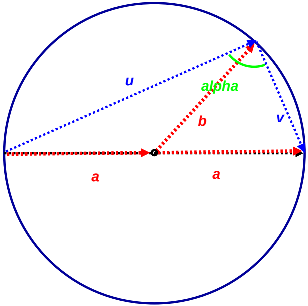
Beweis. Betrachte die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ wie auf dem Bild. Wir zeigen, dass $\langle \underbrace{\vec{a}+\vec{b}}_{\vec{u}}, \underbrace{\vec{a}-\vec{b}}_{\vec{v}} \rangle = 0$. Wegen Bilinearität und Symmetrie, ist

$$\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{=0,\ \text{Symmetrie}} - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle =$$

$$|a|^2 - |b|^2 = 0.$$

Mit Hilfe der Bilinearität des Skalarprodukts kann man mehrere Schulgeometrische Aufgaben lösen

Z.Z. *Im Dreieck auf dem Bild* ist der Winkel *alpha* gleich $\pi/2$.



Beweis. Betrachte die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ wie auf dem Bild. Wir zeigen, dass $\langle \underbrace{\vec{a}+\vec{b}}_{\vec{u}}, \underbrace{\vec{a}-\vec{b}}_{\vec{v}} \rangle = 0$. Wegen Bilinearität und Symmetrie, ist

$$\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{=0,\ \text{Symmetrie}} - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle =$$

$|a|^2 - |b|^2 = 0$. Dann ist $\arccos\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|u|\,|v|}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. □