Wiederholung

Def. 51

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$,

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$, so ist $Grad(Min_A) \leq Grad(P)$.

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$, so ist $Grad(Min_A) \leq Grad(P)$.

Es gilt:

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$, so ist $Grad(Min_A) \leq Grad(P)$.

Es gilt:

- Minimalpolynom existiert

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$, so ist $Grad(Min_A) \leq Grad(P)$.

Es gilt:

- Minimalpolynom existiert (und hat $Grad \leq n$)

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$, so ist $Grad(Min_A) \leq Grad(P)$.

Es gilt:

- Minimalpolynom existiert (und hat $Grad \leq n$)
  (Weil nach Hamilton-Cayley $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$.)

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$, so ist $Grad(Min_A) \leq Grad(P)$.

Es gilt:

- Minimalpolynom existiert (und hat $Grad \leq n$)
  (Weil nach Hamilton-Cayley $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$.)
- Ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$, so ist $Grad(Min_A) \leq Grad(P)$.

Es gilt:

- Minimalpolynom existiert (und hat $Grad \leq n$)
  (Weil nach Hamilton-Cayley $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$.)
- Ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ (Satz 57).

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$, so ist $Grad(Min_A) \leq Grad(P)$.

Es gilt:

- Minimalpolynom existiert (und hat $Grad \leq n$)
  (Weil nach Hamilton-Cayley $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$.)
- Ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ (Satz 57).
- Ist $\aleph_A = (t - \lambda_1)^{k_1} ... (t - \lambda_m)^{k_m}$,

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$, so ist $Grad(Min_A) \leq Grad(P)$.

Es gilt:

- Minimalpolynom existiert (und hat $Grad \leq n$)
  (Weil nach Hamilton-Cayley $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$.)
- Ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ (Satz 57).
- Ist $\aleph_A = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$, wobei λ_i paarweise verschieden sind ,

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$, so ist $Grad(Min_A) \leq Grad(P)$.

Es gilt:

- Minimalpolynom existiert (und hat $Grad \leq n$)
  (Weil nach Hamilton-Cayley $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$.)
- Ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ (Satz 57).
- Ist $\aleph_A = (t - \lambda_1)^{k_1} ... (t - \lambda_m)^{k_m}$, wobei λ_i paarweise verschieden sind , so ist $Min_A = (t - \lambda_1)^{k_1'} ... (t - \lambda_m)^{k_m'}$,

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$, so ist $Grad(Min_A) \leq Grad(P)$.

Es gilt:

- Minimalpolynom existiert (und hat $Grad \leq n$)
  (Weil nach Hamilton-Cayley $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$.)
- Ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ (Satz 57).
- Ist $\aleph_A = (t - \lambda_1)^{k_1} ... (t - \lambda_m)^{k_m}$, wobei λ_i paarweise verschieden sind , so ist $Min_A = (t - \lambda_1)^{k_1'} ... (t - \lambda_m)^{k_m'}$, wobei $k_i \geq k_i' \geq 0$ (Satz 57 +Lemma 33).

Wiederholung

Def. 51 Min_A ist ein Polynom $\neq 0$ sodass

- $Min_A(A) = \mathbf{0}$
- Ist $P(A) = \mathbf{0}$ für ein $P \neq 0$, so ist $Grad(Min_A) \leq Grad(P)$.

Es gilt:

- Minimalpolynom existiert (und hat $Grad \leq n$)
  (Weil nach Hamilton-Cayley $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$.)
- Ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ (Satz 57).
- Ist $\aleph_A = (t - \lambda_1)^{k_1} \ldots (t - \lambda_m)^{k_m}$, wobei λ_i paarweise verschieden sind , so ist $Min_A = (t - \lambda_1)^{k_1'} \ldots (t - \lambda_m)^{k_m'}$, wobei $k_i \geq k_i' \geq 0$ (Satz 57 +Lemma 33).
  (Wir werden sogar zeigen, dass in dem Fall $k_i' \geq 1$.)

Satz 58

Satz 58 *A sei eine* $(n \times n)$*-Matrix über* $\mathbb{K}$

Satz 58 *A sei eine* $(n \times n)$*-Matrix über* $\mathbb{K}$ *mit paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, ..., \lambda_m$.

Satz 58 *A sei eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar,*

Satz 58 *A sei eine* $(n \times n)$*-Matrix über* $\mathbb{K}$ *mit paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, ..., \lambda_m$*. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $\aleph_A$ *in Linearfaktoren zerfällt,*

Satz 58 *A sei eine* $(n \times n)$*-Matrix über* $\mathbb{K}$ *mit paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, ..., \lambda_m$*. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $\aleph_A$ *in Linearfaktoren zerfällt, also* $\aleph_A =$

Satz 58 *A sei eine* $(n \times n)$*-Matrix über* $\mathbb{K}$ *mit paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, ..., \lambda_m$*. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $\aleph_A$ *in Linearfaktoren zerfällt, also* $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$*,*

Satz 58 *A sei eine* $(n \times n)$*-Matrix über* $\mathbb{K}$ *mit paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, ..., \lambda_m$*. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $\aleph_A$ *in Linearfaktoren zerfällt, also* $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$*, und das Polynom* $P = (\lambda_1 - t) ... (\lambda_m - t)$

Satz 58 *A sei eine* $(n \times n)$*-Matrix über* $\mathbb{K}$ *mit paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, ..., \lambda_m$*. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $\aleph_A$ *in Linearfaktoren zerfällt, also* $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$*, und das Polynom* $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ *annihiliert die Matrix*

Satz 58 *A sei eine* $(n \times n)$*-Matrix über* $\mathbb{K}$ *mit paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, ..., \lambda_m$*. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $\aleph_A$ *in Linearfaktoren zerfällt, also* $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$*, und das Polynom* $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ *annihiliert die Matrix A:* $P(A) = \mathbf{0}$*.*

Satz 58 *A sei eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt, also $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, und das Polynom $P = (\lambda_1 - t) ... (\lambda_m - t)$ annihiliert die Matrix A: $P(A) = \mathbf{0}$.*

Beweis $\Longrightarrow$:.

Satz 58 *A sei eine* $(n \times n)$*-Matrix über* $\mathbb{K}$ *mit paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, ..., \lambda_m$*. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $\aleph_A$ *in Linearfaktoren zerfällt, also* $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$*, und das Polynom* $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ *annihiliert die Matrix A:* $P(A) = \mathbf{0}$*.*

Beweis $\Longrightarrow$**:**. Angenommen, die Matrix ist diagonalisierbar,

Satz 58 *A sei eine* $(n \times n)$*-Matrix über* $\mathbb{K}$ *mit paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, ..., \lambda_m$*. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $\aleph_A$ *in Linearfaktoren zerfällt, also* $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$*, und das Polynom* $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ *annihiliert die Matrix A:* $P(A) = \mathbf{0}$*.*

Beweis $\Longrightarrow$**:**. Angenommen, die Matrix ist diagonalisierbar, also $A = B\Lambda B^{-1}$.

Satz 58 *A sei eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt, also $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, und das Polynom $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ annihiliert die Matrix A: $P(A) = \mathbf{0}$.*

Beweis $\Longrightarrow$:. Angenommen, die Matrix ist diagonalisierbar, also $A = B\Lambda B^{-1}$. Aus Satz 55 folgt, dass $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt. Wir wiederholen den Beweis.

$$\aleph_\Lambda = det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - t \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m - t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Satz 58 *A sei eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt, also $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, und das Polynom $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ annihiliert die Matrix A: $P(A) = \mathbf{0}$.*

Beweis $\Longrightarrow$:. Angenommen, die Matrix ist diagonalisierbar, also $A = B\Lambda B^{-1}$. Aus Satz 55 folgt, dass $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt. Wir wiederholen den Beweis.

$$\aleph_\Lambda = det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - t \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m - t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - t)^{geo_A(\lambda_1)} ... (\lambda_m - t)^{geo_A(\lambda_m)}.$$

Satz 58 *A sei eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt, also $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, und das Polynom $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ annihiliert die Matrix A: $P(A) = \mathbf{0}$.*

Beweis $\Longrightarrow$:. Angenommen, die Matrix ist diagonalisierbar, also $A = B\Lambda B^{-1}$. Aus Satz 55 folgt, dass $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt. Wir wiederholen den Beweis.

$$\aleph_\Lambda = det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - t \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m - t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - t)^{geo_A(\lambda_1)} ... (\lambda_m - t)^{geo_A(\lambda_m)}.$$

„Zum aufwärmen“ haben wir gezeigt,

Satz 58 *A sei eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt, also $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, und das Polynom $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ annihiliert die Matrix A: $P(A) = \mathbf{0}$.*

Beweis $\Longrightarrow$:. Angenommen, die Matrix ist diagonalisierbar, also $A = B\Lambda B^{-1}$. Aus Satz 55 folgt, dass $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt. Wir wiederholen den Beweis.

$$\aleph_\Lambda = det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - t \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m - t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - t)^{geo_A(\lambda_1)} ... (\lambda_m - t)^{geo_A(\lambda_m)}.$$

„Zum aufwärmen“ haben wir gezeigt, dass

$P(A) =$

Satz 58 *A sei eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt, also $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, und das Polynom $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ annihiliert die Matrix A: $P(A) = \mathbf{0}$.*

Beweis $\Longrightarrow$:. Angenommen, die Matrix ist diagonalisierbar, also $A = B\Lambda B^{-1}$. Aus Satz 55 folgt, dass $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt. Wir wiederholen den Beweis.

$$\aleph_\Lambda = det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - t \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m - t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - t)^{geo_A(\lambda_1)} ... (\lambda_m - t)^{geo_A(\lambda_m)}.$$

„Zum aufwärmen“ haben wir gezeigt, dass

$$P(A) = B \cdot P(\Lambda) \cdot B^{-1} =$$

Satz 58 *A sei eine* $(n \times n)$*-Matrix über* $\mathbb{K}$ *mit paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, ..., \lambda_m$*. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $\aleph_A$ *in Linearfaktoren zerfällt, also* $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$*, und das Polynom* $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ *annihiliert die Matrix A:* $P(A) = \mathbf{0}$*.*

Beweis $\Longrightarrow$**:**. Angenommen, die Matrix ist diagonalisierbar, also $A = B\Lambda B^{-1}$. Aus Satz 55 folgt, dass $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt. Wir wiederholen den Beweis.

$$\aleph_\Lambda = det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - t \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m - t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - t)^{geo_A(\lambda_1)} ... (\lambda_m - t)^{geo_A(\lambda_m)}.$$

„Zum aufwärmen“ haben wir gezeigt, dass

$$P(A) = B \cdot P(\Lambda) \cdot B^{-1} = B \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_m) \end{pmatrix} B^{-1}$$

Satz 58 *A sei eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt, also $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, und das Polynom $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ annihiliert die Matrix A: $P(A) = \mathbf{0}$.*

Beweis $\Longrightarrow$:. Angenommen, die Matrix ist diagonalisierbar, also $A = B\Lambda B^{-1}$. Aus Satz 55 folgt, dass $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt. Wir wiederholen den Beweis.

$$\aleph_\Lambda = det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - t \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m - t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - t)^{geo_A(\lambda_1)}...(\lambda_m - t)^{geo_A(\lambda_m)}.$$

„Zum aufwärmen“ haben wir gezeigt, dass

$$P(A) = B \cdot P(\Lambda) \cdot B^{-1} = B \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_m) \end{pmatrix} B^{-1} = B\mathbf{0}B^{-1}$$

Satz 58 *A sei eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Dann gilt: A ist g.d. diagonalisierbar, wenn $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt, also $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, und das Polynom $P = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$ annihiliert die Matrix A: $P(A) = \mathbf{0}$.*

Beweis $\Longrightarrow$**:**. Angenommen, die Matrix ist diagonalisierbar, also $A = B\Lambda B^{-1}$. Aus Satz 55 folgt, dass $\aleph_A$ in Linearfaktoren zerfällt. Wir wiederholen den Beweis.

$$\aleph_\Lambda = det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 - t \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m - t \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - t)^{geo_A(\lambda_1)} ... (\lambda_m - t)^{geo_A(\lambda_m)}.$$

„Zum aufwärmen“ haben wir gezeigt, dass

$$P(A) = B \cdot P(\Lambda) \cdot B^{-1} = B \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_m) \end{pmatrix} B^{-1} = B\mathbf{0}B^{-1} = \mathbf{0}.$$

Beweis $\Longleftarrow$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen,

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind,

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) ... (\lambda_1 Id - A) =$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$.

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 :=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} :=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 :=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) ... (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 :=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.
$V_2 :=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} :=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) ... (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 :=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} :=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) ... (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) ... (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$\vdots$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m :=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} :=$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) ... (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$\vdots$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ ... \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \dots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \dots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \dots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \dots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \dots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \dots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ ... \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ ... \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) =$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.
$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$
$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.
$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$
$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$
$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$
$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ ... \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.
$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \dots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \dots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \dots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - dim(Kern_{f_2})$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \dots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \dots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \dots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)\ldots(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$\vdots$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$$\vdots$$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$$\vdots$$

$dim(V_m)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$$\vdots$$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ ... \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$$\vdots$$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) -$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_m \circ ... \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$$\vdots$$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) -$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$$\vdots$$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) -$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \ \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$$\vdots$$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - dim(Kern_{f_m})$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \dots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \dots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \dots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$$

$$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$$

$$\vdots$$

$$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)}$$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \dots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \dots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \dots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$$

$$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$$

$$\vdots$$

$$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)}$$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \dots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \dots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \dots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$$\vdots$$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$$

$$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$$

$$\vdots$$

$$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)}$$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$$\vdots$$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$$\vdots$$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$$\vdots$$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m)$

Aber $dim(V_m) = 0$, da $P(A)v \equiv \vec{0}$.

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$$\vdots$$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m)$

Aber $dim(V_m) = 0$, da $P(A)v \equiv \vec{0}$. Dann ist

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$\vdots$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$$

$$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$$

$\vdots$

$$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m)$$

Aber $dim(V_m) = 0$, da $P(A)v \equiv \vec{0}$. Dann ist

$0 \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m)$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \dots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \dots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$\vdots$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \dots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$\vdots$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - \dots - geo_A(\lambda_m)$

Aber $dim(V_m) = 0$, da $P(A)v \equiv \vec{0}$. Dann ist

$0 \geq n - geo_A(\lambda_1) - \dots - geo_A(\lambda_m) \overset{\text{Satz 55}}{\geq}$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A) \ldots (\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$$

$$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$$

$$\vdots$$

$$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m)$$

Aber $dim(V_m) = 0$, da $P(A)v \equiv \vec{0}$. Dann ist

$$0 \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m) \overset{\text{Satz 55}}{\geq} n - alg_A(\lambda_1) - \ldots - alg_A(\lambda_m) = 0.$$

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$\vdots$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$\vdots$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m)$

Aber $dim(V_m) = 0$, da $P(A)v \equiv \vec{0}$. Dann ist

$0 \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m) \overset{\text{Satz 55}}{\geq} n - alg_A(\lambda_1) - \ldots - alg_A(\lambda_m) = 0$. Dann ist

$geo_A(\lambda_1) + \ldots + geo_A(\lambda_m) = n$,

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1} ... (\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}$.

$$\vdots$$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}$.

$$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$$

$$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$$

$$\vdots$$

$$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m)$$

Aber $dim(V_m) = 0$, da $P(A)v \equiv \vec{0}$. Dann ist

$0 \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m) \overset{\text{Satz 55}}{\geq} n - alg_A(\lambda_1) - \ldots - alg_A(\lambda_m) = 0$. Dann ist

$geo_A(\lambda_1) + \ldots + geo_A(\lambda_m) = n$, und A ist nach Satz 55 diagonalisierbar.

Beweis $\Longleftarrow$ Angenommen, $\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, wobei λ_i verschieden sind, und $P(A) = (\lambda_m Id - A)...(\lambda_1 Id - A) = \mathbf{0}$. Sei $f_i : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit Matrix $\lambda_i Id - A$. Man betrachte die folgende Untervektorräume von V:

$V_1 := Bild_{f_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{\lambda_1 u - Au \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_2 := Bild_{f_2|V_1} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_1\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$V_3 := Bild_{f_3|V_2} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_2\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_3 \circ f_2 \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} =$

$\{(\lambda_3 Id - A)(\lambda_2 Id - A)(\lambda_1 Id - A)u \text{ für alle } u \in V\}.$

$\vdots$

$V_m := Bild_{f_m|V_{m-1}} := \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m(u) \text{ für irgendeinen } u \in V_{m-1}\}$

$= \{v \in V \text{ s.d. } v = f_m \circ \ldots \circ f_1(u) \text{ für irgendeinen } u \in V\} = \{P(A)u \text{für alle } u \in V\}.$

$dim(V_1) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(K^n) - dim(Kern_{f_1}) = n - geo_A(\lambda_1)$

$dim(V_2) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_1) - \underbrace{dim(Kern_{f_2})}_{\leq geo_A(\lambda_2)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - geo_A(\lambda_2)$

$\vdots$

$dim(V_m) \overset{\text{Dimensionsformel}}{=} dim(V_{m-1}) - \underbrace{dim(Kern_{f_m})}_{\leq geo_A(\lambda_m)} \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m)$

Aber $dim(V_m) = 0$, da $P(A)v \equiv \vec{0}$. Dann ist

$0 \geq n - geo_A(\lambda_1) - \ldots - geo_A(\lambda_m) \overset{\text{Satz 55}}{\geq} n - alg_A(\lambda_1) - \ldots - alg_A(\lambda_m) = 0$. Dann ist

$geo_A(\lambda_1) + \ldots + geo_A(\lambda_m) = n$, und A ist nach Satz 55 diagonalisierbar. $\square$

Folgerung

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar,*

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn Min_A*

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$,

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$, *wobei* λ_i

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$, *wobei* λ_i *paarweise verschieden sind.*

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$, *wobei* λ_i *paarweise verschieden sind.*

Beweis.

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$, *wobei* λ_i *paarweise verschieden sind.*

Beweis. Nach Lemma 33 und Satz 57 ist
$Min_A = (\lambda_1 - t)^{k'_1}...(\lambda_m - t)^{k'_m}$.

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$*, wobei* λ_i *paarweise verschieden sind.*

Beweis. Nach Lemma 33 und Satz 57 ist $Min_A = (\lambda_1 - t)^{k'_1}...(\lambda_m - t)^{k'_m}$. Wir zeigen: alle $k'_i \geq 1$.

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$, *wobei* λ_i *paarweise verschieden sind.*
Beweis. Nach Lemma 33 und Satz 57 ist $Min_A = (\lambda_1 - t)^{k_1'}...(\lambda_m - t)^{k_m'}$. Wir zeigen: alle $k_i' \geq 1$. Tatsächlich, sonst betrachten wir einen Eigenvektor v mit Eigenwert λ_i.

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$, wobei λ_i paarweise verschieden sind.*

Beweis. Nach Lemma 33 und Satz 57 ist $Min_A = (\lambda_1 - t)^{k'_1}...(\lambda_m - t)^{k'_m}$. Wir zeigen: alle $k'_i \geq 1$. Tatsächlich, sonst betrachten wir einen Eigenvektor v mit Eigenwert λ_i. Der Vektor $(\lambda_1 Id - A)^{k'_1}...(\lambda_m Id - A)^{k'_m} v =$
$(\lambda_1 Id - A)^{k'_1}...\underbrace{(\lambda_m Id - A)^{k'_m - 1}(\lambda_m Id - A)}_{(\lambda_m Id - A)^{k'_m}} v =$

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$, wobei λ_i paarweise verschieden sind.*

Beweis. Nach Lemma 33 und Satz 57 ist $Min_A = (\lambda_1 - t)^{k_1'}...(\lambda_m - t)^{k_m'}$. Wir zeigen: alle $k_i' \geq 1$. Tatsächlich, sonst betrachten wir einen Eigenvektor v mit Eigenwert λ_i. Der Vektor $(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...(\lambda_m Id - A)^{k_m'} v =$

$$(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...\underbrace{(\lambda_m Id - A)^{k_m'-1}(\lambda_m Id - A)}_{(\lambda_m Id - A)^{k_m'}} v =$$

$$(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...(\lambda_m Id - A)^{k_m'-1}(\lambda_m - \lambda_i)v =$$

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$, *wobei* λ_i *paarweise verschieden sind.*

Beweis. Nach Lemma 33 und Satz 57 ist $Min_A = (\lambda_1 - t)^{k_1'}...(\lambda_m - t)^{k_m'}$. Wir zeigen: alle $k_i' \geq 1$. Tatsächlich, sonst betrachten wir einen Eigenvektor v mit Eigenwert λ_i. Der Vektor $(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...(\lambda_m Id - A)^{k_m'} v =$

$$(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...\underbrace{(\lambda_m Id - A)^{k_m'-1}(\lambda_m Id - A)}_{(\lambda_m Id - A)^{k_m'}} v =$$

$$(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...(\lambda_m Id - A)^{k_m'-1}(\lambda_m - \lambda_i) v =$$

$$(\lambda_1 - \lambda_i)^{k_1'}...(\lambda_m - \lambda_i)^{k_m'} v$$

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn* $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$, *wobei* λ_i *paarweise verschieden sind.*

Beweis. Nach Lemma 33 und Satz 57 ist $Min_A = (\lambda_1 - t)^{k_1'}...(\lambda_m - t)^{k_m'}$. Wir zeigen: alle $k_i' \geq 1$. Tatsächlich, sonst betrachten wir einen Eigenvektor v mit Eigenwert λ_i. Der Vektor $(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...(\lambda_m Id - A)^{k_m'} v =$

$$(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...\underbrace{(\lambda_m Id - A)^{k_m'-1}(\lambda_m Id - A)}_{(\lambda_m Id - A)^{k_m'}} v =$$

$$(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...(\lambda_m Id - A)^{k_m'-1}(\lambda_m - \lambda_i) v =$$

$$(\lambda_1 - \lambda_i)^{k_1'}...(\lambda_m - \lambda_i)^{k_m'} v \overset{\text{Falls } k_i = 0}{\neq} \vec{0} \text{ ist.}$$

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$, wobei λ_i paarweise verschieden sind.*

Beweis. Nach Lemma 33 und Satz 57 ist $Min_A = (\lambda_1 - t)^{k_1'}...(\lambda_m - t)^{k_m'}$. Wir zeigen: alle $k_i' \geq 1$. Tatsächlich, sonst betrachten wir einen Eigenvektor v mit Eigenwert λ_i. Der Vektor $(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...(\lambda_m Id - A)^{k_m'} v =$

$$(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...\underbrace{(\lambda_m Id - A)^{k_m'-1}(\lambda_m Id - A)}_{(\lambda_m Id - A)^{k_m'}} v =$$

$$(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...(\lambda_m Id - A)^{k_m'-1}(\lambda_m - \lambda_i) v =$$

$(\lambda_1 - \lambda_i)^{k_1'}...(\lambda_m - \lambda_i)^{k_m'} v \overset{\text{Falls } k_i = 0}{\neq} \vec{0}$ ist. Also, $Min_A(A) \neq \mathbf{0}$.

Folgerung *Eine Matrix A ist g.d. diagonalisierbar, wenn $Min_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_m - t)$, wobei λ_i paarweise verschieden sind.*

Beweis. Nach Lemma 33 und Satz 57 ist $Min_A = (\lambda_1 - t)^{k_1'}...(\lambda_m - t)^{k_m'}$. Wir zeigen: alle $k_i' \geq 1$. Tatsächlich, sonst betrachten wir einen Eigenvektor v mit Eigenwert λ_i. Der Vektor $(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...(\lambda_m Id - A)^{k_m'} v =$

$$(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...\underbrace{(\lambda_m Id - A)^{k_m'-1}(\lambda_m Id - A)}_{(\lambda_m Id - A)^{k_m'}} v =$$

$$(\lambda_1 Id - A)^{k_1'}...(\lambda_m Id - A)^{k_m'-1}(\lambda_m - \lambda_i)v =$$

$(\lambda_1 - \lambda_i)^{k_1'}...(\lambda_m - \lambda_i)^{k_m'} v \overset{\text{Falls } k_i = 0}{\neq} \vec{0}$ ist. Also, $Min_A(A) \neq \mathbf{0}$. □

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$$
$$\downarrow$$

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

$\downarrow$

Berechne alle versch. NSt. $\lambda_1, ..., \lambda_m$ von $\aleph_A$

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Berechne alle versch.} \\ \text{NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A\end{array}}$$

$$\downarrow$$

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}}$$

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Berechne alle versch.}\\ \text{NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A\end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \quad \xrightarrow{\text{nein}}$$

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{Berechne } \aleph_A} & & \\
\downarrow & & \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{Berechne alle versch.}\\ \text{NSt. } \lambda_1, \dots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A\end{array}} & & \\
\downarrow & & \\
\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} & \xrightarrow{\text{nein}} & \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}
\end{array}
$$

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \xrightarrow{\text{nein}} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \quad \overset{\text{nein}}{\longrightarrow} \quad \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

$\boxed{\text{Man betrachte } P = (\lambda_1 - t)\ldots(\lambda_m - t).}$

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Berechne alle versch.} \\ \text{NSt. } \lambda_1, \dots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A\end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \quad \overset{\text{nein}}{\longrightarrow} \quad \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$$

$$\downarrow \text{Ja}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Man betrachte} \\ P = (\lambda_1 - t)\dots(\lambda_m - t).\end{array}}$$

$$\downarrow$$

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

Berechne $\aleph_A$

$\downarrow$

Berechne alle versch. NSt. $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ von $\aleph_A$

$\downarrow$

Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren? $\xrightarrow{\text{nein}}$ A ist nicht diagonalisierbar

$\downarrow$ Ja

Man betrachte $P = (\lambda_1 - t) \dots (\lambda_m - t)$.

$\downarrow$

Ist $P(A) = \mathbf{0}$?

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{Berechne } \aleph_A} & & \\
\downarrow & & \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{Berechne alle versch.}\\ \text{NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A\end{array}} & & \\
\downarrow & & \\
\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} & \overset{\text{nein}}{\longrightarrow} & \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}} \\
\downarrow \text{Ja} & & \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{Man betrachte}\\ P = (\lambda_1 - t) \ldots (\lambda_m - t).\end{array}} & & \\
\downarrow & & \\
\boxed{\text{Ist } P(A) = \mathbf{0}?} & \overset{\text{nein}}{\longrightarrow} &
\end{array}$$

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \xrightarrow{\text{nein}} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

$\boxed{\text{Man betrachte } P = (\lambda_1 - t) \ldots (\lambda_m - t).}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Ist } P(A) = \mathbf{0}?} \xrightarrow{\text{nein}} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

Satz 58 als Kriterium zur Diagonalisierbarkeit

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

Berechne $\aleph_A$

$\downarrow$

Berechne alle versch. NSt. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von $\aleph_A$

$\downarrow$

Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren? $\xrightarrow{\text{nein}}$ A ist nicht diagonalisierbar

$\downarrow$ Ja

Man betrachte $P = (\lambda_1 - t) \ldots (\lambda_m - t)$.

$\downarrow$

Ist $P(A) = \mathbf{0}$? $\xrightarrow{\text{nein}}$ A ist nicht diagonalisierbar

$\downarrow$ Ja

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

Berechne $\aleph_A$

$\downarrow$

Berechne alle versch. NSt. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von $\aleph_A$

$\downarrow$

Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren? $\xrightarrow{\text{nein}}$ A ist nicht diagonalisierbar

$\downarrow$ Ja

Man betrachte $P = (\lambda_1 - t) \ldots (\lambda_m - t)$.

$\downarrow$

Ist $P(A) = \mathbf{0}$? $\xrightarrow{\text{nein}}$ A ist nicht diagonalisierbar

$\downarrow$ Ja

A ist diagonalisierbar

Definition 52

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum,

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V,

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebiege Skalare.

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebiege Skalare. Bilinearform auf V

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebiege Skalare. Bilinearform auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebiege Skalare. Bilinearform auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

(Bilinearität) $\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebiege Skalare. Bilinearform auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

(Bilinearität) $\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u+, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebiege Skalare. Bilinearform auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

(Bilinearität) $\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u+, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebiege Skalare. Bilinearform auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

(Bilinearität) $\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u+, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebiege Skalare. Bilinearform auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

(Bilinearität) $\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u+, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

(Symmetrie) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebiege Skalare. Bilinearform auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

(Bilinearität) $\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u+, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

(Symmetrie) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebiege Skalare. Bilinearform auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

(Bilinearität) $\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u+, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

(Symmetrie) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Bemerkung $\sigma(\vec{0}, v) = \sigma(u, \vec{0}) = 0$.

Abschnitt: Bilinearformen

Definition 52 Es sei $(V, +, \bullet)$ ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, u, u', u'', v, v', v'' beliebige Vektoren aus V, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{K}$ beliebiege Skalare. Bilinearform auf V ist eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

(Bilinearität) $\sigma(\lambda' u' + \lambda'' u'', v) = \lambda' \sigma(u', v) + \lambda'' \sigma(u'', v)$,
$\sigma(u+, \lambda' v' + \lambda'' v'') = \lambda' \sigma(u, v') + \lambda'' \sigma(u, v'')$.
Eine Bilinearform σ heißt symmetrisch, falls

(Symmetrie) $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.

Bemerkung $\sigma(\vec{0}, v) = \sigma(u, \vec{0}) = 0$. Tatsächlich,
$\sigma(\vec{0}, v) = \sigma(0 \cdot \vec{0}, v) \overset{\text{Linearität}}{=} 0\sigma(\vec{0}, v) = 0$.

Bsp.

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$.

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

setze $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

setze $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = (x_1 \ \ldots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

setze $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = (x_1 \; ... \; x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Das ist eine symmetrische Bilinearform)

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

setze $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = (x_1 \ \ldots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Das ist eine symmetrische Bilinearform)
Symmetrie ist offensichtlich (weil $x_i y_i = y_i x_i$).

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

setze $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = (x_1 \ ... \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Das ist eine symmetrische Bilinearform)
Symmetrie ist offensichtlich (weil $x_i y_i = y_i x_i$).
Bilinearität:
$\sigma(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) =$

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

setze $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = (x_1 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Das ist eine symmetrische Bilinearform)
Symmetrie ist offensichtlich (weil $x_i y_i = y_i x_i$).
Bilinearität:
$\sigma(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) = (\lambda' x_1' + \lambda'' x_1'') y_1 + ... + (\lambda' x_n' + \lambda'' x_n'') y_n =$

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

setze $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = (x_1 \; ... \; x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Das ist eine symmetrische Bilinearform)
Symmetrie ist offensichtlich (weil $x_i y_i = y_i x_i$).
Bilinearität:
$\sigma(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) = (\lambda' x_1' + \lambda'' x_1'') y_1 + ... + (\lambda' x_n' + \lambda'' x_n'') y_n =$
$= \lambda' x_1' y_1 + ... + \lambda' x_n' y_n + \lambda'' x_1'' y_1 + ... + \lambda'' x_n'' y_n =$

Bsp. (Standard-Skalarprodukt) auf $\mathbb{R}^n$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

setze $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = (x_1 \; ... \; x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Das ist eine symmetrische Bilinearform)
Symmetrie ist offensichtlich (weil $x_i y_i = y_i x_i$).
Bilinearität:
$\sigma(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) = (\lambda' x'_1 + \lambda'' x''_1) y_1 + ... + (\lambda' x'_n + \lambda'' x''_n) y_n =$
$= \lambda' x'_1 y_1 + ... + \lambda' x'_n y_n + \lambda'' x''_1 y_1 + ... + \lambda'' x''_n y_n =$
$= \lambda' \sigma(x', y) + \lambda'' \sigma(x'', y)$.

HauptBsp:

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V.

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$.

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$.

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt:*

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit*

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$\sigma_A(u, v)$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y$$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K})$$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$.*)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$.*)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2)

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$*.)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$*.)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist

$\sigma_A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, \ldots, b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten*

$$C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ bzw. } C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ setze}$$

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$*.)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist

$$\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, \ldots, b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten*

$C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$.*)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist

$$\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$.*)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist

$$\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2)$$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$.*)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist $\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2)$ (Dies ist Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$).

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$*.)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist $\sigma_A \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2)$ (Dies ist Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$).

Die Form σ_A ist bilinear: tatsächlich,

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n,n,\mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n,1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1,1,\mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u,v) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1,1,\mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$*.)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist $\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1y_1 + x_2y_2)$ (Dies ist Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$).

Die Form σ_A ist bilinear: tatsächlich,
$\sigma_A(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) =$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V*. Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*. Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$*. Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$*.)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist $\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2)$ (Dies ist Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$).

Die Form σ_A ist bilinear: tatsächlich,
$\sigma_A(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) = (\lambda' x' + \lambda'' x'')^t A y =$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V*. Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*. Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$*. Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten*

$$C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ bzw. } C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ setze}$$

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$*.)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist $\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2)$ (Dies ist Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$).

Die Form σ_A ist bilinear: tatsächlich,
$\sigma_A(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) = (\lambda' x' + \lambda'' x'')^t A y = (\lambda' x'^t + \lambda'' x''^t) A y$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$*.)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist $\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2)$ (Dies ist Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$).

Die Form σ_A ist bilinear: tatsächlich, $\sigma_A(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) = (\lambda' x' + \lambda'' x'')^t A y = (\lambda' x'^t + \lambda'' x''^t) A y = \lambda' x'^t A y + \lambda'' x''^t A y$

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$*.)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist $\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2)$ (Dies ist Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$).

Die Form σ_A ist bilinear: tatsächlich,
$\sigma_A(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) = (\lambda' x' + \lambda'' x'')^t A y = (\lambda' x'^t + \lambda'' x''^t) A y =$
$\lambda' x'^t A y + \lambda'' x''^t A y = \lambda' \sigma_A(u', v) + \lambda'' \sigma_A(u'', v)$.

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, \ldots, b_n)$ *eine Basis in* V*. Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*. Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$*. Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten* $C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$*.)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist $\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2)$ (Dies ist Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$).

Die Form σ_A ist bilinear: tatsächlich,
$\sigma_A(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) = (\lambda' x' + \lambda'' x'')^t A y = (\lambda' x'^t + \lambda'' x''^t) A y = \lambda' x'^t A y + \lambda'' x''^t A y = \lambda' \sigma_A(u', v) + \lambda'' \sigma_A(u'', v)$.
Linearität bzgl. zweiter Variabel ist ähnlich.

HauptBsp:

Sei $B := (b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* V. *Sei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. *Wir identifizieren* $Mat(n, 1)$ *mit* $\mathbb{K}^n$ *und* $Mat(1, 1, \mathbb{K})$ *mit* $\mathbb{K}$. *Definiere* $\sigma_A : V \times V \to \mathbb{K}$ *wie folgt: Für die Vektoren* u, v *mit Koordinaten*

$C_B(u) := x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *bzw.* $C_B(v) := y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *setze*

$$\sigma_A(u, v) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in Mat(1, 1, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}.$$

(In einer Formel: $\sigma_A(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$.*)*

Bsp. Für $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis (e_1, e_2) und $A = Id$ ist $\sigma_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2)$ (Dies ist Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$).

Die Form σ_A ist bilinear: tatsächlich,
$\sigma_A(\lambda' x' + \lambda'' x'', y) = (\lambda' x' + \lambda'' x'')^t A y = (\lambda' x'^t + \lambda'' x''^t) A y =$
$\lambda' x'^t A y + \lambda'' x''^t A y = \lambda' \sigma_A(u', v) + \lambda'' \sigma_A(u'', v)$.
Linearität bzgl. zweiter Variabel ist ähnlich.

Noch einmal: wir brauchen die folgende Daten für σ_A: eine Matrix A und eine Basis.

Lemma 34

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$.*

Lemma 34 *Die Bilinearform* σ_A *ist symmetrisch* $\Longleftrightarrow A^t = A$. *(Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\iff A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$.

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\iff A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$.

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$Mat(1, 1) \ni (\alpha)$

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$Mat(1, 1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t A y$

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$Mat(1, 1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t Ay \qquad (*)$

Lemma 34 *Die Bilinearform* σ_A *ist symmetrisch* $\Longleftrightarrow A^t = A$. *(Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist
$Mat(1, 1) \ni (\alpha) \stackrel{Def.}{=} x^t Ay \qquad (*)$
Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t A y \qquad (*)$$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$Mat(1, 1) \ni (\alpha) \stackrel{Def.}{=} x^t Ay \qquad (*)$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$(\alpha) =$

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow$ $A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$Mat(1, 1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t Ay \qquad (*)$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$(\alpha) = \left(x^t Ay\right)^t$

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow$ $A^t = A$. (Solche Matrizen heißen* *symmetrische* *Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$Mat(1,1) \ni (\alpha) \stackrel{Def.}{=} x^t A y \qquad (*)$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$(\alpha) = \ (x^t A y)^t \stackrel{\text{Folg. B Satz 48}}{=}$

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u,v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v,u) = \alpha$. Nach Definition ist

$$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t A y \qquad (*)$$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$$(\alpha) = (x^t A y)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t$$

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$Mat(1, 1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t Ay \qquad (*)$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$(\alpha) = \ (x^t Ay)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t Ax$

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t Ay \qquad (*)$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$(\alpha) = (x^t Ay)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t Ax = \sigma_A(v, u)$.

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow$ $A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t A y \qquad (*)$$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$$(\alpha) = (x^t A y)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t A x = \sigma_A(v, u).$$

Wicht. Frage vor dem Beweis in $\Longrightarrow$:

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u,v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v,u) = \alpha$. Nach Definition ist

$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t Ay \qquad (*)$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$(\alpha) = (x^t Ay)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t Ax = \sigma_A(v,u)$.

Wicht. Frage vor dem Beweis in $\Longrightarrow$: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$Mat(1, 1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t Ay \qquad (*)$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$(\alpha) = (x^t Ay)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t Ax = \sigma_A(v, u)$.

Wicht. Frage vor dem Beweis in $\Longrightarrow$: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Antwort:

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$Mat(1, 1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t Ay \qquad (*)$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$, $(\alpha) = (x^t Ay)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t Ax = \sigma_A(v, u)$.

Wicht. Frage vor dem Beweis in $\Longrightarrow$: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Antwort:

$\sigma_A(b_i, b_j) =$

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow$ $A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t Ay \qquad (*)$$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$$(\alpha) = (x^t Ay)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t Ax = \sigma_A(v, u).$$

Wicht. Frage vor dem Beweis in $\Longrightarrow$: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Antwort:

$$\sigma_A(b_i, b_j) = (0 \ldots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \ldots 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Platz j} \\ \\ \\ \end{array}$$

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow$ $A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t A y \qquad (*)$$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$$(\alpha) = (x^t A y)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t A x = \sigma_A(v, u).$$

Wicht. Frage vor dem Beweis in $\Longrightarrow$: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Antwort:

$$\sigma_A(b_i, b_j) = (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Platz j} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u,v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v,u) = \alpha$. Nach Definition ist

$$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t A y \qquad (*)$$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$$(\alpha) = (x^t A y)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t A x = \sigma_A(v,u).$$

Wicht. Frage vor dem Beweis in $\Longrightarrow$: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Antwort:

$$\sigma_A(b_i,b_j) = (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Platz j} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}.$$

Beweis des Lemmas 34 in $\Longrightarrow$:

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow$ $A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t A y \qquad (*)$$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$$(\alpha) = (x^t A y)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t A x = \sigma_A(v, u).$$

Wicht. Frage vor dem Beweis in $\Longrightarrow$: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Antwort:

$$\sigma_A(b_i, b_j) = (0 \ldots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \ldots 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Platz j} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= (0 \ldots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \ldots 0) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}.$$

Beweis des Lemmas 34 in $\Longrightarrow$: Angennommen, σ_A ist symmetrisch.

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow$ $A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t A y \qquad (*)$$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$$(\alpha) = (x^t A y)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t A x = \sigma_A(v, u).$$

Wicht. Frage vor dem Beweis in $\Longrightarrow$: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Antwort:

$$\sigma_A(b_i, b_j) = (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Platz j} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}.$$

Beweis des Lemmas 34 in $\Longrightarrow$: Angennommen, σ_A ist symmetrisch. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_A(b_j, b_i)$.

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\Longleftrightarrow$ $A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$$Mat(1,1) \ni (\alpha) \stackrel{Def.}{=} x^t Ay \qquad (*)$$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$$(\alpha) = (x^t Ay)^t \stackrel{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t Ax = \sigma_A(v, u).$$

Wicht. Frage vor dem Beweis in $\Longrightarrow$: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Antwort:

$$\sigma_A(b_i, b_j) = (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Platz j} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}.$$

Beweis des Lemmas 34 in $\Longrightarrow$: Angennommen, σ_A ist symmetrisch. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_A(b_j, b_i)$. Dann ist $a_{ij} = a_{ji}$,

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\iff A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u,v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v,u) = \alpha$. Nach Definition ist

$$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t A y \qquad (*)$$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$$(\alpha) = (x^t A y)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t A x = \sigma_A(v,u).$$

Wicht. Frage vor dem Beweis in $\Longrightarrow$: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Antwort:

$$\sigma_A(b_i,b_j) = (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Platz j} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$= (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}.$$

Beweis des Lemmas 34 in $\Longrightarrow$: Angennommen, σ_A ist symmetrisch. Dann ist $\sigma_A(b_i,b_j) = \sigma_A(b_j,b_i)$. Dann ist $a_{ij} = a_{ji}$, und deswegen $A^t = A$. $\square$

Lemma 34 *Die Bilinearform σ_A ist symmetrisch $\iff A^t = A$. (Solche Matrizen heißen symmetrische Matrizen)*

Beweis: $\Longleftarrow$ Angenommen, $A^t = A$. Setze $\sigma_A(u, v) = \alpha$. Z.z.: $\sigma_A(v, u) = \alpha$. Nach Definition ist

$$Mat(1,1) \ni (\alpha) \overset{Def.}{=} x^t A y \qquad (*)$$

Wir transponieren die beiden Seiten der Gleichung $(*)$. Da $(\alpha)^t = (\alpha)$,

$$(\alpha) = (x^t A y)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} y^t A^t (x^t)^t = y^t A x = \sigma_A(v, u).$$

Wicht. Frage vor dem Beweis in $\Longrightarrow$: Was ist $\sigma_A(b_i, b_j)$?

Antwort:

$$\sigma_A(b_i, b_j) = (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Platz j} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= (0 \dots \underbrace{1}_{\text{Platz i}} \dots 0) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}.$$

Beweis des Lemmas 34 in $\Longrightarrow$: Angennommen, σ_A ist symmetrisch. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_A(b_j, b_i)$. Dann ist $a_{ij} = a_{ji}$, und deswegen $A^t = A$. $\square$

Satz 59

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V).

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V)*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$.

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt:*

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V)*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$*. Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$*.*

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V)*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$*. Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$*.*
Diese Matrix $A =$

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V)*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$*. Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$*.*
Diese Matrix $A = (a_{ij})$

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.

Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform,

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.

Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.

Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp.

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ ist Id.

Beweis.

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V)*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$*. Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$*.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit.

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V)*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$*. Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$*.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$.

Satz 59 *Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in (V). Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf $\mathbb{K}^n$ gibt es genau eine $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das (i, j) Element der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist,

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$.

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$,

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$.

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V)*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$*. Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$*.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + ... + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Seien

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V)*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$*. Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$*.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + ... + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Seien $u = x_1b_1 + ... + x_nb_n$

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + ... + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Seien $u = x_1b_1 + ... + x_nb_n$ und $v = y_1b_1 + ... + y_nb_n$.

Satz 59 *Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in (V). Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf $\mathbb{K}^n$ gibt es genau eine $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das (i, j) Element der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + ... + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Seien $u = x_1b_1 + ... + x_nb_n$ und $v = y_1b_1 + ... + y_nb_n$. Dann ist $\sigma_0(u, v) =$

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V)*. Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, so dass* $\sigma = \sigma_A$*. Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$*.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + ... + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Seien $u = x_1b_1 + ... + x_nb_n$ und $v = y_1b_1 + ... + y_nb_n$. Dann ist $\sigma_0(u, v) = \sigma_0(x_1b_1 + ... + x_nb_n, y_1b_1 + ... + y_nb_n) =$

Satz 59 *Sei* $(b_1, ..., b_n)$ *eine Basis in* (V). *Dann gilt: für jede Bilinearform* σ *auf* $\mathbb{K}^n$ *gibt es genau eine* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *so dass* $\sigma = \sigma_A$. *Ferner gilt: das* (i, j) *Element der Matrix* A *ist gleich* $\sigma(b_i, b_j)$.
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + ... + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Seien $u = x_1b_1 + ... + x_nb_n$ und $v = y_1b_1 + ... + y_nb_n$. Dann ist
$\sigma_0(u, v) = \sigma_0(x_1b_1 + ... + x_nb_n, y_1b_1 + ... + y_nb_n) =$
$x_1\sigma_0(b_1, y_1b_1 + ... + y_nb_n) + ... + x_n\sigma_0(b_n, y_1b_1 + ... + y_nb_n) =$

Satz 59 *Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in (V). Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf $\mathbb{K}^n$ gibt es genau eine $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das (i, j) Element der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Seien $u = x_1b_1 + ... + x_nb_n$ und $v = y_1b_1 + ... + y_nb_n$. Dann ist
$\sigma_0(u, v) = \sigma_0(x_1b_1 + ... + x_nb_n, y_1b_1 + ... + y_nb_n) =$
$x_1\sigma_0(b_1, y_1b_1 + ... + y_nb_n) + ... + x_n\sigma_0(b_n, y_1b_1 + ... + y_nb_n) =$
$= x_1\big(y_1\sigma_0(b_1, b_1) + ... + y_n\sigma_0(b_1, b_n)\big) +$

Satz 59 *Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in (V). Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf $\mathbb{K}^n$ gibt es genau eine $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das (i, j) Element der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Seien $u = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$ und $v = y_1 b_1 + \dots + y_n b_n$. Dann ist
$\sigma_0(u, v) = \sigma_0(x_1 b_1 + \dots + x_n b_n, y_1 b_1 + \dots + y_n b_n) =$
$x_1 \sigma_0(b_1, y_1 b_1 + \dots + y_n b_n) + \dots + x_n \sigma_0(b_n, y_1 b_1 + \dots + y_n b_n) =$
$= x_1 \big(y_1 \sigma_0(b_1, b_1) + \dots + y_n \sigma_0(b_1, b_n)\big) + \dots + x_n \big(y_1 \sigma_0(b_n, b_1) + \dots + y_n \sigma_0(b_n, b_n)\big)$

Satz 59 *Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in (V). Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf $\mathbb{K}^n$ gibt es genau eine $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das (i, j) Element der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Seien $u = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$ und $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Dann ist
$\sigma_0(u, v) = \sigma_0(x_1 b_1 + ... + x_n b_n, y_1 b_1 + ... + y_n b_n) =$
$x_1 \sigma_0(b_1, y_1 b_1 + ... + y_n b_n) + ... + x_n \sigma_0(b_n, y_1 b_1 + ... + y_n b_n) =$
$= x_1 \big(y_1 \sigma_0(b_1, b_1) + ... + y_n \sigma_0(b_1, b_n)\big) + ... + x_n \big(y_1 \sigma_0(b_n, b_1) + ... + y_n \sigma_0(b_n, b_n)\big)$.

Da alle $\sigma_0(b_i, b_j) \overset{(*)}{=} 0$,

Satz 59 *Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in (V). Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf $\mathbb{K}^n$ gibt es genau eine $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das (i, j) Element der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$.*
Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Seien $u = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ und $v = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$. Dann ist
$\sigma_0(u, v) = \sigma_0(x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n, y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n) =$
$x_1 \sigma_0(b_1, y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n) + \ldots + x_n \sigma_0(b_n, y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n) =$
$= x_1 \big(y_1 \sigma_0(b_1, b_1) + \ldots + y_n \sigma_0(b_1, b_n)\big) + \ldots + x_n \big(y_1 \sigma_0(b_n, b_1) + \ldots + y_n \sigma_0(b_n, b_n)\big).$

Da alle $\sigma_0(b_i, b_j) \overset{(*)}{=} 0$, ist die Summe oben gleich 0. $\square$

Satz 59 *Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in (V). Dann gilt: für jede Bilinearform σ auf $\mathbb{K}^n$ gibt es genau eine $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, so dass $\sigma = \sigma_A$. Ferner gilt: das (i, j) Element der Matrix A ist gleich $\sigma(b_i, b_j)$.*

Diese Matrix $A = (a_{ij}) = \sigma(b_i, b_j)$ heißt die Matrix der Bilinearform, oder Gram'sche Matrix.

Bsp. Gram'sche Matrix des Standart-Skalarprodukts $\sigma(x, y) := x_1y_1 + ... + x_ny_n$ ist Id.

Beweis. Zuerst Eindeutigkeit. Angenommen $\sigma_A(u, v) = \sigma_B(u, v)$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\sigma_A(b_i, b_j) = \sigma_B(b_i, b_j)$. Da $\sigma_A(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von A ist und $\sigma_B(b_i, b_j)$ gleich (i, j)-Element von B ist, sind die Matrizen gleich.

Betrachte die Matrix A mit $a_{ij} = \sigma(b_i, b_j)$. Betrachte die Bilinearform $\sigma_0 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\sigma_0(u, v) := \sigma(u, v) - \sigma_A(u, v)$.
Z.z.: $\sigma_0(u, v) = 0$. Nach Konstruktion ist

$$\sigma_0(b_i, b_j) = \underbrace{\sigma(b_i, b_j)}_{a_{ij}} - \underbrace{a_{ij}}_{\text{Wicht. Bsp}} = 0. \qquad (*)$$

Seien $u = x_1b_1 + ... + x_nb_n$ und $v = y_1b_1 + ... + y_nb_n$. Dann ist
$\sigma_0(u, v) = \sigma_0(x_1b_1 + ... + x_nb_n, y_1b_1 + ... + y_nb_n) =$
$x_1\sigma_0(b_1, y_1b_1 + ... + y_nb_n) + ... + x_n\sigma_0(b_n, y_1b_1 + ... + y_nb_n) =$
$= x_1\big(y_1\sigma_0(b_1, b_1) + ... + y_n\sigma_0(b_1, b_n)\big) + ... + x_n\big(y_1\sigma_0(b_n, b_1) + ... + y_n\sigma_0(b_n, b_n)\big)$.

Da alle $\sigma_0(b_i, b_j) \overset{(*)}{=} 0$, ist die Summe oben gleich 0. $\square$

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung:

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\quad (*)$

Wiederholung — Satz 37 $\forall v$ *gilt:*

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt: $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,*
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\quad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u, v) \overset{(*)}{=}$

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt: $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,*
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u, v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\quad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b'_i in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u, v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t ATC_{B'}(v)$

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t A T C_{B'}(v) \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\quad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t ATC_{B'}(v) \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$, $(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b'_i in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \stackrel{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \stackrel{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t ATC_{B'}(v) \stackrel{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen).

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t A T C_{B'}(v) \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Sei A die Gramm'sche Matrix der Bilinearform σ

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt: $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,*
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t ATC_{B'}(v) \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^tAT}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Sei A die Gramm'sche Matrix der Bilinearform σ bzgl. Basis B.

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\quad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt: $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,*
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t ATC_{B'}(v) \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Sei A die Gramm'sche Matrix der Bilinearform σ bzgl. Basis B. Dann ist
$A' := T^t A T$

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \stackrel{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \stackrel{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t ATC_{B'}(v) \stackrel{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t AT}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Sei A die Gramm'sche Matrix der Bilinearform σ bzgl. Basis B. Dann ist $A' := T^t AT$ die Gramm'sche Matrix von σ bzgl. Basis B',

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$, $(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b'_i in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t ATC_{B'}(v) \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Sei A die Gramm'sche Matrix der Bilinearform σ bzgl. Basis B. Dann ist $A' := T^t A T$ die Gramm'sche Matrix von σ bzgl. Basis B', wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist.

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t A T C_{B'}(v) \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Sei A die Gramm'sche Matrix der Bilinearform σ bzgl. Basis B. Dann ist $A' := T^t A T$ die Gramm'sche Matrix von σ bzgl. Basis B', wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist.

Kleine Übung:

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 $\forall v$ *gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,
$(**)$
wobei T *die Transforamtionsmatrix von* B *nach* B'*,d.h., die Spalten von* T *Koordinaten von* b_i' *in Basis* B *sind.*

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t A T C_{B'}(v) \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Sei A die Gramm'sche Matrix der Bilinearform σ bzgl. Basis B. Dann ist $A' := T^t A T$ die Gramm'sche Matrix von σ bzgl. Basis B', wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist.

Kleine Übung: Ist A symmetrisch

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\quad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt: $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,*
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t ATC_{B'}(v) \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Sei A die Gramm'sche Matrix der Bilinearform σ bzgl. Basis B. Dann ist $A' := T^t A T$ die Gramm'sche Matrix von σ bzgl. Basis B', wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist.

Kleine Übung: Ist A symmetrisch (d.h., $A^t = A$),

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 $\forall v$ *gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$, $(**)$
wobei T *die Transforamtionsmatrix von* B *nach* B'*,d.h., die Spalten von* T *Koordinaten von* b'_i *in Basis* B *sind.*

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=} (TC_{B'}(u))^t ATC_{B'}(v) \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t AT}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Sei A die Gramm'sche Matrix der Bilinearform σ bzgl. Basis B. Dann ist $A' := T^t AT$ die Gramm'sche Matrix von σ bzgl. Basis B', wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist.

Kleine Übung: Ist A symmetrisch (d.h., $A^t = A$), so ist $T^t AT$ auch symmetrisch.

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\quad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt: $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,*
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b'_i in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t A T C_{B'}(v) \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Sei A die Gramm'sche Matrix der Bilinearform σ bzgl. Basis B. Dann ist $A' := T^t A T$ die Gramm'sche Matrix von σ bzgl. Basis B', wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist.

Kleine Übung: Ist A symmetrisch (d.h., $A^t = A$), so ist $T^t A T$ auch symmetrisch. In der Tat, $(T^t A T)^t$

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt: $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,*
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \overset{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \overset{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t ATC_{B'}(v) \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t AT}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Sei A die Gramm'sche Matrix der Bilinearform σ bzgl. Basis B. Dann ist $A' := T^t AT$ die Gramm'sche Matrix von σ bzgl. Basis B', wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist.

Kleine Übung: Ist A symmetrisch (d.h., $A^t = A$), so ist $T^t AT$ auch symmetrisch. In der Tat, $(T^t AT)^t \overset{\text{Folg. B Satz 48}}{=}$

Wie ändert sich die Gram'sche Matrix, wenn wir die Basis wechseln?

Wiederholung: Gramm'sche Matrix zu σ bzgl. Basis B ist die Matrix A sodass $\sigma(u,v) = (C_B(u))^t A C_B(v)$. $\qquad (*)$

Wiederholung — Satz 37 *$\forall v$ gilt:* $TC_{B'}(v) = C_B(v)$,
$(**)$
wobei T die Transforamtionsmatrix von B nach B',d.h., die Spalten von T Koordinaten von b_i' in Basis B sind.

Also, ist $\sigma(u,v) \stackrel{(*)}{=} (C_B(u))^t A C_B(v) \stackrel{(**)}{=}$
$(TC_{B'}(u))^t A T C_{B'}(v) \stackrel{\text{Folg. B Satz 48}}{=} (C_{B'}(u))^t \underbrace{T^t A T}_{A'} C_{B'}(v)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Sei A die Gramm'sche Matrix der Bilinearform σ bzgl. Basis B. Dann ist $A' := T^t A T$ die Gramm'sche Matrix von σ bzgl. Basis B', wobei T die Transformationsmatrix von B nach B' ist.

Kleine Übung: Ist A symmetrisch (d.h., $A^t = A$), so ist $T^t A T$ auch symmetrisch. In der Tat, $(T^t A T)^t \stackrel{\text{Folg. B Satz 48}}{=} T^t A^t (T^t)^t = T^t A T$.

Zielsetzung:

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Wiederholung – Satz 60 (Transformationsregel für Gramm’sche Matirzen).

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Wiederholung – Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Nach Basiswechseln mit der Transformationsmatrix T wird die Gramm'sche Matrix A der Bilinearform σ wie folgt geändert: $A \mapsto T^t A T$.

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Wiederholung – Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Nach Basiswechseln mit der Transformationsmatrix T wird die Gramm'sche Matrix A der Bilinearform σ wie folgt geändert: $A \mapsto T^t AT$.
Ziel Umformulieren:

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Wiederholung – Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Nach Basiswechseln mit der Transformationsmatrix T wird die Gramm'sche Matrix A der Bilinearform σ wie folgt geändert: $A \mapsto T^t AT$.
Ziel Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine Matrix

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Wiederholung – Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Nach Basiswechseln mit der Transformationsmatrix T wird die Gramm'sche Matrix A der Bilinearform σ wie folgt geändert: $A \mapsto T^t AT$.
Ziel Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine Matrix mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t AT$,

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Wiederholung – Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Nach Basiswechseln mit der Transformationsmatrix T wird die Gramm'sche Matrix A der Bilinearform σ wie folgt geändert: $A \mapsto T^t AT$.
Ziel Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine Matrix mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t AT$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Wiederholung – Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Nach Basiswechseln mit der Transformationsmatrix T wird die Gramm'sche Matrix A der Bilinearform σ wie folgt geändert: $A \mapsto T^t AT$.
Ziel Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine Matrix mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t AT$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Wiederholung – Satz 60 (Transformationsregel für Gramm'sche Matirzen). Nach Basiswechseln mit der Transformationsmatrix T wird die Gramm'sche Matrix A der Bilinearform σ wie folgt geändert: $A \mapsto T^t A T$.
Ziel Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine Matrix mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t A T$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Wir geben die Antwort,

Zielsetzung:

Ziel: Symmetrische Bilinearformen untersuchen.
Methode: Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.
Wiederholung – Satz 60 (Transformationsregel für Gramm’sche Matirzen). Nach Basiswechseln mit der Transformationsmatrix T wird die Gramm’sche Matrix A der Bilinearform σ wie folgt geändert: $A \mapsto T^t AT$.
Ziel Umformulieren: In welche „einfachste“ Form kann man eine Matrix mit Hilfe der Transformation $A \mapsto T^t AT$, wobei $T \in GL(n, \mathbb{K})$ bringen?

Wir geben die Antwort, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist.

Skalarprodukt:

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: Innerprodukt).

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: Innerprodukt).
Bemerkung: Positivdefinitheit hat nur dann Sinn,

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: Innerprodukt).
Bemerkung: Positivdefinitheit hat nur dann Sinn, falls der Körper geordnet ist,

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: Innerprodukt).
Bemerkung: Positivdefinitheit hat nur dann Sinn, falls der Körper geordnet ist, d.h., es die Relation $\geq$ auf dem Körper gibt.

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: Innerprodukt).
Bemerkung: Positivdefinitheit hat nur dann Sinn, falls der Körper geordnet ist, d.h., es die Relation $\geq$ auf dem Körper gibt.
Deswegen betrachten wir nur $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Bsp.

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: Innerprodukt).
Bemerkung: Positivdefinitheit hat nur dann Sinn, falls der Körper geordnet ist, d.h., es die Relation $\geq$ auf dem Körper gibt.
Deswegen betrachten wir nur $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Bsp. Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: Innerprodukt).
Bemerkung: Positivdefinitheit hat nur dann Sinn, falls der Körper geordnet ist, d.h., es die Relation $\geq$ auf dem Körper gibt.
Deswegen betrachten wir nur $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Bsp. Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

Für $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: Innerprodukt).
Bemerkung: Positivdefinitheit hat nur dann Sinn, falls der Körper geordnet ist, d.h., es die Relation $\geq$ auf dem Körper gibt. Deswegen betrachten wir nur $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Bsp. Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

Für $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = (x_1 \; ... \; x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ist ein

Skalarprodukt:

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u,u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: Innerprodukt).
Bemerkung: Positivdefinitheit hat nur dann Sinn, falls der Körper geordnet ist, d.h., es die Relation $\geq$ auf dem Körper gibt.
Deswegen betrachten wir nur $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Bsp. Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

Für $\sigma(x,y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n = (x_1 \ ... \ x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ist ein

Skalarprodukt:
Bilinearität und Symmertrie haben wir bereits bewiesen.

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: Innerprodukt).
Bemerkung: Positivdefinitheit hat nur dann Sinn, falls der Körper geordnet ist, d.h., es die Relation $\geq$ auf dem Körper gibt.
Deswegen betrachten wir nur $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Bsp. Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

Für $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = (x_1 \ ... \ x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ist ein

Skalarprodukt:
Bilinearität und Symmertrie haben wir bereits bewiesen.

Z.z.: (Positivdefinitheit):

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: Innerprodukt).
Bemerkung: Positivdefinitheit hat nur dann Sinn, falls der Körper geordnet ist, d.h., es die Relation $\geq$ auf dem Körper gibt.
Deswegen betrachten wir nur $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Bsp. Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

Für $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = (x_1 \; ... \; x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ist ein

Skalarprodukt:
Bilinearität und Symmertrie haben wir bereits bewiesen.

Z.z.: (Positivdefinitheit): $\sigma(x, x) = x_1^1 + ... + x_n^2$

Skalarprodukt:

Def. 52 – Vorsetzung: Sie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Eine Bilinearform heißt positiv definite, falls

(Positivdefinitheit) $\sigma(u, u) > 0$ für $u \neq \vec{0}$.
Symmetrische positiv definite Bilinearform heißt ein Skalarprodukt (oder: Innerprodukt).
Bemerkung: Positivdefinitheit hat nur dann Sinn, falls der Körper geordnet ist, d.h., es die Relation $\geq$ auf dem Körper gibt.
Deswegen betrachten wir nur $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Bsp. Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

Für $\sigma(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = (x_1 \; ... \; x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ist ein

Skalarprodukt:
Bilinearität und Symmertrie haben wir bereits bewiesen.

Z.z.: (Positivdefinitheit): $\sigma(x, x) = x_1^1 + ... + x_n^2 \overset{\text{für } x \neq \vec{0}}{\neq} 0$

Bsp.

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$.

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$.
Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage:

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?*

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:**

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$,

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab.

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).
Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*
Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$,

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).
Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*
Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist
$\sigma(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x,y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).
Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x,x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*
Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x,x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).
Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*
Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.
Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist,

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$\sigma(e_i, e_i) =$

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$$\sigma(e_i, e_i) = 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i-\text{te Summante}}$$

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$$\sigma(e_i, e_i) = 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i-\text{te Summante}} + ... + 0 = \alpha_i \leq 0,$$

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x,y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x,x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x,x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$$\sigma(e_i, e_i) = 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i-\text{te Summante}} + ... + 0 = \alpha_i \leq 0,$$

also gibt es ein $u \neq \vec{0}$,

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$$\sigma(e_i, e_i) = 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i-\text{te Summante}} + ... + 0 = \alpha_i \leq 0,$$ also gibt es

ein $u \neq \vec{0}$, so dass $\sigma(u, u) \leq 0$,

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$$\sigma(e_i, e_i) = 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i-\text{te Summante}} + ... + 0 = \alpha_i \leq 0,$$

also gibt es ein $u \neq \vec{0}$, so dass $\sigma(u, u) \leq 0$, und die Bilinearform ist nicht positiv definit.

Frage:

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x,y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x,x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x,x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$$\sigma(e_i, e_i) = 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i-\text{te Summante}} + ... + 0 = \alpha_i \leq 0,$$

also gibt es ein $u \neq \vec{0}$, so dass $\sigma(u,u) \leq 0$, und die Bilinearform ist nicht positiv definit.

Frage: Was ist die Gram'sche Matrix von σ?

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$$\sigma(e_i, e_i) = 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i-\text{te Summante}} + ... + 0 = \alpha_i \leq 0,$$

also gibt es ein $u \neq \vec{0}$, so dass $\sigma(u, u) \leq 0$, und die Bilinearform ist nicht positiv definit.

Frage: Was ist die Gram'sche Matrix von σ?

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$\sigma(e_i, e_i) = 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i-\text{te Summante}} + ... + 0 = \alpha_i \leq 0$, also gibt es ein $u \neq \vec{0}$, so dass $\sigma(u, u) \leq 0$, und die Bilinearform ist nicht positiv definit.

Frage: Was ist die Gram'sche Matrix von σ?

Antwort: $a_{ij} \overset{\text{Satz 59}}{=}$

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x,y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x,x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x,x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$$\sigma(e_i, e_i) = 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i\text{-te Summante}} + ... + 0 = \alpha_i \leq 0,$$

also gibt es ein $u \neq \vec{0}$, so dass $\sigma(u,u) \leq 0$, und die Bilinearform ist nicht positiv definit.

Frage: Was ist die Gram'sche Matrix von σ?

Antwort: $a_{ij} \overset{\text{Satz 59}}{=} \sigma(e_i, e_j)$

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$$\sigma(e_i, e_i) = 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i-\text{te Summante}} + ... + 0 = \alpha_i \leq 0,$$ also gibt es ein $u \neq \vec{0}$, so dass $\sigma(u, u) \leq 0$, und die Bilinearform ist nicht positiv definit.

Frage: Was ist die Gram'sche Matrix von σ?

Antwort: $a_{ij} \overset{\text{Satz 59}}{=} \sigma(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$

Bsp. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$. Setze $\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$. Das ist eine symmetrische Bilnearform auf $\mathbb{R}^n$ (beweis wie in Bsp. mit Standard-Skalarprodukt).

Frage: *Ist sie positiv definit?* **Frage umformulieren:** *ist* $\sigma(x, x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ *?*

Antwort hängt von α_i ab. Sind alle $\alpha_i > 0$, so ist $\sigma(x, x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 \geq 0$ und ist gleich 0 nur für $u = \vec{0}$.

Falls ein $\alpha_i \leq 0$ ist, dann ist

$$\sigma(e_i, e_i) = 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 1}_{i-\text{te Summante}} + ... + 0 = \alpha_i \leq 0,$$ also gibt es

ein $u \neq \vec{0}$, so dass $\sigma(u, u) \leq 0$, und die Bilinearform ist nicht positiv definit.

Frage: Was ist die Gram'sche Matrix von σ?

Antwort: $a_{ij} \overset{\text{Satz 59}}{=} \sigma(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \alpha_i & \text{für } i = j \end{cases}$

Also, die Gram'sche Matrix ist $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, ..., b_n)$

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, \ldots, b_n)$ *heißt* *orthogonal*

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, \ldots, b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ*,*

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, \ldots, b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ*, falls für alle* $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_j) = 0$*.*

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, ..., b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ*, falls für alle* $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_j) = 0$*. Falls zusäzlich für jedes* $i \in \{1, ..., n\}$ *gilt*

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, \ldots, b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ*, falls für alle* $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_j) = 0$*. Falls zusäzlich für jedes* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_i) = 1$*, dann heißt die Basis* *orthonormal*

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, ..., b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ*, falls für alle* $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_j) = 0$*. Falls zusäzlich für jedes* $i \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_i) = 1$*, dann heißt die Basis* *orthonormal*

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthogonalbasis für die Bilinearform* $\sigma(x, y) := \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$.

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, ..., b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ, *falls für alle* $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_j) = 0$. *Falls zusäzlich für jedes* $i \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_i) = 1$, *dann heißt die Basis* *orthonormal*

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthogonalbasis für die Bilinearform* $\sigma(x, y) := \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$.
(In der Tat, für $i < j$ *gilt*
$\sigma(e_i, e_j) :=$

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, ..., b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ*, falls für alle* $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_j) = 0$*. Falls zusäzlich für jedes* $i \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_i) = 1$*, dann heißt die Basis* *orthonormal*

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthogonalbasis für die Bilinearform* $\sigma(x, y) := \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$.
(In der Tat, für $i < j$ *gilt*
$$\sigma(e_i, e_j) := 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 0}_{i-te\ Summante} + ... + \underbrace{\alpha_j \cdot 0 \cdot 1}_{j-te\ Summante} + ... + 0$$

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis $(b_1, ..., b_n)$ heißt* orthogonal *bzgl. einer Bilinearform σ, falls für alle $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_j) = 0$. Falls zusäzlich für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sigma(b_i, b_i) = 1$, dann heißt die Basis* orthonormal

Bsp. *Standard-Basis in $\mathbb{R}^n$ is eine Orthogonalbasis für die Bilinearform $\sigma(x, y) := \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$.*
(In der Tat, für $i < j$ gilt
$\sigma(e_i, e_j) := 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 0}_{i-te\ Summante} + ... + \underbrace{\alpha_j \cdot 0 \cdot 1}_{j-te\ Summante} + ... + 0 = 0.$*)*

Bsp. *Standard-Basis in $\mathbb{R}^n$ is eine Orthonormalbasis*

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, ..., b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ*, falls für alle* $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_j) = 0$*. Falls zusäzlich für jedes* $i \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_i) = 1$*, dann heißt die Basis* *orthonormal*

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthogonalbasis für die Bilinearform* $\sigma(x, y) := \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$.
(In der Tat, für $i < j$ *gilt*

$$\sigma(e_i, e_j) := 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 0}_{i-te\ Summante} + ... + \underbrace{\alpha_j \cdot 0 \cdot 1}_{j-te\ Summante} + ... + 0 = 0.)$$

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthonormalbasis für das Standard-Skalarprodukt* $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + ... + x_n y_n$.

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, ..., b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ*, falls für alle* $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_j) = 0$*. Falls zusäzlich für jedes* $i \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_i) = 1$*, dann heißt die Basis* *orthonormal*

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthogonalbasis für die Bilinearform* $\sigma(x, y) := \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$.
(In der Tat, für $i < j$ *gilt*
$\sigma(e_i, e_j) := 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 0}_{i-te\ Summante} + ... + \underbrace{\alpha_j \cdot 0 \cdot 1}_{j-te\ Summante} + ... + 0 = 0.$*)*

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthonormalbasis für das Standard-Skalarprodukt* $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + ... + x_n y_n$*. In der Tat, wie wir oben bewiesen haben, ist sie orthogonal.*

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, ..., b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ, *falls für alle* $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_j) = 0$. *Falls zusäzlich für jedes* $i \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_i) = 1$, *dann heißt die Basis* *orthonormal*

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthogonalbasis für die Bilinearform* $\sigma(x, y) := \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$.
(In der Tat, für $i < j$ *gilt*
$$\sigma(e_i, e_j) := 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 0}_{i-te\ Summante} + ... + \underbrace{\alpha_j \cdot 0 \cdot 1}_{j-te\ Summante} + ... + 0 = 0.)$$

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthonormalbasis für das Standard-Skalarprodukt* $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + ... + x_n y_n$. *In der Tat, wie wir oben bewiesen haben, ist sie orthogonal. Da zusätzlich*
$\sigma(e_i, e_i) :=$

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, ..., b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ*, falls für alle* $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_j) = 0$*. Falls zusäzlich für jedes* $i \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_i) = 1$*, dann heißt die Basis* *orthonormal*

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthogonalbasis für die Bilinearform* $\sigma(x, y) := \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$.
(In der Tat, für $i < j$ *gilt*
$$\sigma(e_i, e_j) := 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 0}_{i-te\ Summante} + ... + \underbrace{\alpha_j \cdot 0 \cdot 1}_{j-te\ Summante} + ... + 0 = 0.)$$

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthonormalbasis für das Standard-Skalarprodukt* $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + ... + x_n y_n$*. In der Tat, wie wir oben bewiesen haben, ist sie orthogonal. Da zusätzlich*
$$\sigma(e_i, e_i) := 0 + ... + \underbrace{1 \cdot 1}_{i-te\ Summante} + ... + 0$$

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, ..., b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ, *falls für alle* $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_j) = 0$. *Falls zusäzlich für jedes* $i \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_i) = 1$, *dann heißt die Basis* *orthonormal*

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthogonalbasis für die Bilinearform* $\sigma(x, y) := \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$.
(In der Tat, für $i < j$ *gilt*
$\sigma(e_i, e_j) := 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 0}_{i-te\ Summante} + ... + \underbrace{\alpha_j \cdot 0 \cdot 1}_{j-te\ Summante} + ... + 0 = 0.$*)*

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthonormalbasis für das Standard-Skalarprodukt* $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + ... + x_n y_n$. *In der Tat, wie wir oben bewiesen haben, ist sie orthogonal. Da zusätzlich*
$\sigma(e_i, e_i) := 0 + ... + \underbrace{1 \cdot 1}_{i-te\ Summante} + ... + 0 = 1,$

Orthogonale und orthonormale Basen

Definition 53 *Eine Basis* $(b_1, ..., b_n)$ *heißt* *orthogonal* *bzgl. einer Bilinearform* σ, *falls für alle* $i \neq j \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_j) = 0$. *Falls zusäzlich für jedes* $i \in \{1, ..., n\}$ *gilt* $\sigma(b_i, b_i) = 1$, *dann heißt die Basis* *orthonormal*

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthogonalbasis für die Bilinearform* $\sigma(x, y) := \alpha_1 x_1 y_1 + ... + \alpha_n x_n y_n$.
(In der Tat, für $i < j$ *gilt*
$$\sigma(e_i, e_j) := 0 + ... + \underbrace{\alpha_i \cdot 1 \cdot 0}_{i-te\ Summante} + ... + \underbrace{\alpha_j \cdot 0 \cdot 1}_{j-te\ Summante} + ... + 0 = 0.)$$

Bsp. *Standard-Basis in* $\mathbb{R}^n$ *is eine Orthonormalbasis für das Standard-Skalarprodukt* $\sigma(x, y) := x_1 y_1 + ... + x_n y_n$. *In der Tat, wie wir oben bewiesen haben, ist sie orthogonal. Da zusätzlich*
$$\sigma(e_i, e_i) := 0 + ... + \underbrace{1 \cdot 1}_{i-te\ Summante} + ... + 0 = 1,$$ *ist sie orthonormal.*