Satz 55

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A*

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$.*

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt:*

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.
(ii)

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.
(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.
(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.
(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.
(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii)

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.
(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.
(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$
(iv) $V = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.
(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$
(iv) $V = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$

Schema des Beweises: (i) $\overset{\text{Bereits bewiesen}}{\Longrightarrow}$ (ii) $\overset{\text{Bereits bewiesen}}{\Longrightarrow}$ (iii)

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.
(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$
(iv) $V = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$

Schema des Beweises: (i) $\overset{\text{Bereits bewiesen}}{\Longrightarrow}$ (ii) $\overset{\text{Bereits bewiesen}}{\Longrightarrow}$ (iii) $\overset{\text{Jetzt zu zeigen}}{\Longrightarrow}$ (iv) $\overset{\text{Jetzt zu zeigen}}{\Longrightarrow}$ (i)

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.
(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$
(iv) $V = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$

Schema des Beweises: (i) $\overset{\text{Bereits bewiesen}}{\Longrightarrow}$ (ii) $\overset{\text{Bereits bewiesen}}{\Longrightarrow}$ (iii) $\overset{\text{Jetzt zu zeigen}}{\Longrightarrow}$ (iv) $\overset{\text{Jetzt zu zeigen}}{\Longrightarrow}$ (i)

Wiederholung – Satz 54. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) A ist diagonalisierbar.
(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$
(iv) $V = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$

Schema des Beweises: (i) $\overset{\text{Bereits bewiesen}}{\Longrightarrow}$ (ii) $\overset{\text{Bereits bewiesen}}{\Longrightarrow}$ (iii) $\overset{\text{Jetzt zu zeigen}}{\Longrightarrow}$ (iv) $\overset{\text{Jetzt zu zeigen}}{\Longrightarrow}$ (i)

Wiederholung – Satz 54. Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

Die darstellende Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$ ist eine Diagonalmatrix	$\iff$	jedes b_i ist ein Eigenvektor von f.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

(iii) $\implies$ (iv) $\implies$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage:

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist

$$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist

$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene

Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist

$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, \ldots, u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $w = v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, \ldots, u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \dots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + \dots + v_m = v_1' + \dots + v_m'$, so ist

$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, \dots, u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + \dots + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, \dots, b_{k_1})$,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist

$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, \ldots, u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. □

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + \ldots + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \stackrel{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist

$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. □

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. □

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $w = v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, \ldots, u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. □

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + \ldots + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes

w

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, \ldots, u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + \ldots + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes

$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=}$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes

$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, \ldots, u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + \ldots + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes

$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + \ldots + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$

$\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i +$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, \ldots, u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + \ldots + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes

$$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + \ldots + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=} \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + \ldots + \sum_{i=k_1+\ldots+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes

$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=} \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes

$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=} \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b

(iii) $\implies$ (iv) $\implies$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \stackrel{Z.z.}{\implies} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \stackrel{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \stackrel{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$
$\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes

$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=} \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. □

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$
$\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$
$\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$, ist $W = V$, ((iii) $\Longrightarrow$ (iv) ist bewiesen.)

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, \ldots, u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + \ldots + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes

$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + \ldots + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$ $\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + \ldots + \sum_{i=k_1+\ldots+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$, ist $W = V$, ($(iii) \Longrightarrow (iv)$ ist bewiesen.)

$(b_1, \ldots, b_n)$ ist deswegen eine Basis in V.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. □

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$
$\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$, ist $W = V$, ($(iii) \Longrightarrow (iv)$ ist bewiesen.)
$(b_1, ..., b_n)$ ist deswegen eine Basis in V. Da jedes b_i ein Eigenvektor ist,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes

$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$ $\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$, ist $W = V$, ($(iii) \Longrightarrow (iv)$ ist bewiesen.)

$(b_1, ..., b_n)$ ist deswegen eine Basis in V. Da jedes b_i ein Eigenvektor ist, ist A nach Satz 54 diagonalisierbar.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $w = v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind die von $\vec{0}$ verschiedene Eigenvektoren aus $\{u_1, ..., u_m\}$ linear unabhängig, folglich $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Ziel: $\underbrace{geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n}_{(iii)} \overset{Z.z.}{\Longrightarrow} \underbrace{V = W}_{(iv)}$.

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes $w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=} \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$, ist $W = V$, ($(iii) \Longrightarrow (iv)$ ist bewiesen.)

$(b_1, ..., b_n)$ ist deswegen eine Basis in V. Da jedes b_i ein Eigenvektor ist, ist A nach Satz 54 diagonalisierbar.

Satz 55 als ein Algorithmus

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$$

$$\downarrow$$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Berechne alle versch.}\\ \text{NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A\end{array}}$$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Berechne alle versch.} \\ \text{NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A\end{array}}$$

$$\downarrow$$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Berechne alle versch.}\\ \text{NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A\end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}}$$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Berechne alle versch.}\\ \text{NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A\end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \quad \stackrel{\text{nein}}{\longrightarrow}$$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \xrightarrow{\text{nein}} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{Berechne } \aleph_A} & & \\
\downarrow & & \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{Berechne alle versch.} \\ \text{NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A\end{array}} & & \\
\downarrow & & \\
\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} & \xrightarrow{\text{nein}} & \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}} \\
\downarrow \text{Ja} & &
\end{array}$$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

Berechne $\aleph_A$

$\downarrow$

Berechne alle versch. NSt. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von $\aleph_A$

$\downarrow$

Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren? $\xrightarrow{\text{nein}}$ A ist nicht diagonalisierbar

$\downarrow$ Ja

Berechne alle $geo_A(\lambda_i)$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \xrightarrow{\text{nein}} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

$\boxed{\text{Berechne alle } geo_A(\lambda_i)}$

$\downarrow$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \overset{\text{nein}}{\longrightarrow} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

$\boxed{\text{Berechne alle } geo_A(\lambda_i)}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Ist } \sum_{i=1}^m geo_A(\lambda_i) = n?}$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \xrightarrow{\text{nein}} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

$\boxed{\text{Berechne alle } geo_A(\lambda_i)}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Ist } \sum_{i=1}^{m} geo_A(\lambda_i) = n?} \xrightarrow{\text{nein}}$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \xrightarrow{\text{nein}} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

$\boxed{\text{Berechne alle } geo_A(\lambda_i)}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Ist } \sum_{i=1}^{m} geo_A(\lambda_i) = n?} \xrightarrow{\text{nein}} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \xrightarrow{\text{nein}} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

$\boxed{\text{Berechne alle } geo_A(\lambda_i)}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Ist } \sum_{i=1}^{m} geo_A(\lambda_i) = n?} \xrightarrow{\text{nein}} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \xrightarrow{\text{nein}} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

$\boxed{\text{Berechne alle } geo_A(\lambda_i)}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Ist } \sum_{i=1}^{m} geo_A(\lambda_i) = n?} \xrightarrow{\text{nein}} \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$

$\downarrow$ Ja

$\boxed{A \text{ ist diagonalisierbar}}$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Berechne alle versch.}\\ \text{NSt. } \lambda_1, \ldots, \lambda_m \text{ von } \aleph_A\end{array}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \quad \overset{\text{nein}}{\longrightarrow} \quad \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$$
$$\downarrow \text{Ja}$$
$$\boxed{\text{Berechne alle } geo_A(\lambda_i)}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Ist } \sum_{i=1}^{m} geo_A(\lambda_i) = n?} \quad \overset{\text{nein}}{\longrightarrow} \quad \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$$
$$\downarrow \text{Ja}$$
$$\boxed{A \text{ ist diagonalisierbar}}$$

Satz 54: Wenn wir außerdem in jedem Eig_{λ_i} eine Basis B_i finden,

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{Berechne } \aleph_A} & & \\
\downarrow & & \\
\boxed{\text{Berechne alle versch. NSt. } \lambda_1, ..., \lambda_m \text{ von } \aleph_A} & & \\
\downarrow & & \\
\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} & \xrightarrow{\text{nein}} & \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}} \\
\downarrow \text{Ja} & & \\
\boxed{\text{Berechne alle } geo_A(\lambda_i)} & & \\
\downarrow & & \\
\boxed{\text{Ist } \sum_{i=1}^{m} geo_A(\lambda_i) = n?} & \xrightarrow{\text{nein}} & \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}} \\
\downarrow \text{Ja} & & \\
\boxed{A \text{ ist diagonalisierbar}} & &
\end{array}
$$

Satz 54: Wenn wir außerdem in jedem Eig_{λ_i} eine Basis B_i finden, dann ist die Vereinigung $\cup_{i=1}^{m} B_i$

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

$$\boxed{\text{Berechne } \aleph_A}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Berechne alle versch.}\\ \text{NSt. } \lambda_1, ..., \lambda_m \text{ von } \aleph_A\end{array}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Zerfällt } \aleph_A \text{ in Linearfaktoren?}} \quad \overset{\text{nein}}{\longrightarrow} \quad \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$$
$$\downarrow \text{Ja}$$
$$\boxed{\text{Berechne alle } geo_A(\lambda_i)}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Ist } \sum_{i=1}^m geo_A(\lambda_i) = n?} \quad \overset{\text{nein}}{\longrightarrow} \quad \boxed{A \text{ ist nicht diagonalisierbar}}$$
$$\downarrow \text{Ja}$$
$$\boxed{A \text{ ist diagonalisierbar}}$$

Satz 54: Wenn wir außerdem in jedem Eig_{λ_i} eine Basis B_i finden, dann ist die Vereinigung $\cup_{i=1}^m B_i$ eine Basis in V,

Satz 55 als ein Algorithmus

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix.

Berechne $\aleph_A$

$\downarrow$

Berechne alle versch. NSt. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von $\aleph_A$

$\downarrow$

Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren? $\xrightarrow{\text{nein}}$ A ist nicht diagonalisierbar

$\downarrow$ Ja

Berechne alle $geo_A(\lambda_i)$

$\downarrow$

Ist $\sum_{i=1}^{m} geo_A(\lambda_i) = n$? $\xrightarrow{\text{nein}}$ A ist nicht diagonalisierbar

$\downarrow$ Ja

A ist diagonalisierbar

Satz 54: Wenn wir außerdem in jedem Eig_{λ_i} eine Basis B_i finden, dann ist die Vereinigung $\cup_{i=1}^{m} B_i$ eine Basis in V, und A ist in der Basis diagonal.

Def. 50

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$.

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A.

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert*

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp.

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2$$

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) =$

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A)$

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A) = (Q \cdot P)(A)$.

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist* $P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A) = (Q \cdot P)(A)$. (Obwohl $P(A) \cdot Q(B) \overset{\text{in der regel}}{\neq} Q(B) \cdot P(A)$.)

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

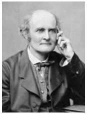
Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A) = (Q \cdot P)(A)$. (Obwohl

$P(A) \cdot Q(B) \overset{\text{in der regel}}{\neq} Q(B) \cdot P(A)$.)

Satz 56 (Hamilton-Cayley)  — 

1805 --1856

1821 --1895

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

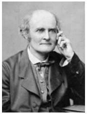
Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A) = (Q \cdot P)(A)$. (Obwohl $P(A) \cdot Q(B) \overset{\text{in der regel}}{\neq} Q(B) \cdot P(A)$.)

Satz 56 (Hamilton-Cayley)

1805 --1856



1821 --1895

$\aleph_A(A) = \mathbf{0}$

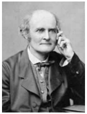
Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A) = (Q \cdot P)(A)$. (Obwohl $P(A) \cdot Q(B) \overset{\text{in der regel}}{\neq} Q(B) \cdot P(A)$.)

Satz 56 (Hamilton-Cayley)  —  $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$

1805 --1856

1821 --1895

In worten: Charakteristisches Polynom einer Matrix annihiliert die Matrix.

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

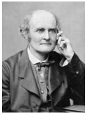
Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A) = (Q \cdot P)(A)$. (Obwohl $P(A) \cdot Q(B) \overset{\text{in der regel}}{\neq} Q(B) \cdot P(A)$.)

Satz 56 (Hamilton-Cayley)

1805 --1856



1821 --1895

$\aleph_A(A) = \mathbf{0}$

In worten: Charakteristisches Polynom einer Matrix annihiliert die Matrix.

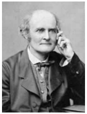
Falscher Beweis:

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*
$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A) = (Q \cdot P)(A)$. (Obwohl
$P(A) \cdot Q(B) \overset{\text{in der regel}}{\neq} Q(B) \cdot P(A)$.)

Satz 56 (Hamilton-Cayley)  —  $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$

1805 --1856

1821 --1895

In worten: Charakteristisches Polynom einer Matrix annihiliert die Matrix.
Falscher Beweis: $\aleph_A(A) =$

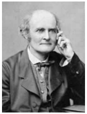
Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A) = (Q \cdot P)(A)$. (Obwohl $P(A) \cdot Q(B) \overset{\text{in der regel}}{\neq} Q(B) \cdot P(A)$.)

Satz 56 (Hamilton-Cayley)  —  $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$

1805 --1856

1821 --1895

In worten: Charakteristisches Polynom einer Matrix annihiliert die Matrix.
Falscher Beweis: $\aleph_A(A) = det(A - A \cdot Id) =$

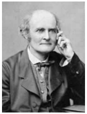
Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A) = (Q \cdot P)(A)$. (Obwohl $P(A) \cdot Q(B) \overset{\text{in der regel}}{\neq} Q(B) \cdot P(A)$.)

Satz 56 (Hamilton-Cayley)  —  $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$

1805 --1856

1821 --1895

In worten: Charakteristisches Polynom einer Matrix annihiliert die Matrix.

Falscher Beweis: $\aleph_A(A) = det(A - A \cdot Id) = det(\mathbf{0})$

Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ *und* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Dann heißt die* $n \times n$ *Matrix* $P(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 Id$ *das Polynom von Matrix* A. *Wir sagen, dass ein Polynom* $P \in \mathbb{K}[x]$ *annihiliert* A, *falls* $P(A) = 0$.

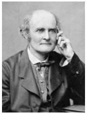
Bsp. *Für* $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *und* $P := x^2 - 3x + 2$ *ist*

$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und* P *annihiliert die Matrix* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A) = (Q \cdot P)(A)$. (Obwohl $P(A) \cdot Q(B) \overset{\text{in der regel}}{\neq} Q(B) \cdot P(A)$.)

Satz 56 (Hamilton-Cayley)

1805 --1856



1821 --1895

$\aleph_A(A) = \mathbf{0}$

In worten: Charakteristisches Polynom einer Matrix annihiliert die Matrix.

Falscher Beweis: $\aleph_A(A) = det(A - A \cdot Id) = det(\mathbf{0}) = 0$.

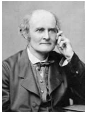
Ziel für heute: Noch einen Algorithmus.

Def. 50 *Sei $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ und A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Dann heißt die $n \times n$ Matrix $P(A) := a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 Id$ das Polynom von Matrix A. Wir sagen, dass ein Polynom $P \in \mathbb{K}[x]$ annihiliert A, falls $P(A) = 0$.*

Bsp. *Für $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ und $P := x^2 - 3x + 2$ ist*

$P(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *und P annihiliert die Matrix $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.*

Bemerkung $P(A) \cdot Q(A) = (P \cdot Q)(A) = (Q \cdot P)(A)$. (Obwohl $P(A) \cdot Q(B) \overset{\text{in der regel}}{\neq} Q(B) \cdot P(A)$.)

Satz 56 (Hamilton-Cayley)  —  $\aleph_A(A) = \mathbf{0}$

1805 --1856

1821 --1895

In worten: Charakteristisches Polynom einer Matrix annihiliert die Matrix.
Falscher Beweis: $\aleph_A(A) = det(A - A \cdot Id) = det(\mathbf{0}) = 0$.
(Bitte, überlegen Sie selbst warum der Beweis falsch ist.)

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda =$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$.

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$.Dann ist

$P(A) =$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + \ldots + a_0$.Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + \ldots + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$.Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$.Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) =$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$.Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$.Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \stackrel{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar,

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$.Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.

Dann ist $A^k =$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$.Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.
Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$.Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.
Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} =$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.

Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + \ldots + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + \ldots + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.
Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} \ldots B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + \ldots + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + \ldots + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.
Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} \ldots B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} =$$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + \ldots + a_0$.Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + \ldots + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.
Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} \ldots B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.

Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1} B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) =$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.

Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) = a_k B\Lambda^k B^{-1}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.

Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) = a_k B\Lambda^k B^{-1} + a_{k-1} B\Lambda^{k-1} B^{-1}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + \ldots + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + \ldots + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.
Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1} B}_{Id} \Lambda B^{-1} \ldots B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) = a_k B\Lambda^k B^{-1} + a_{k-1} B\Lambda^{k-1} B^{-1} + \ldots + a_0 BB^{-1}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + \ldots + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + \ldots + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.

Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} \ldots B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) = a_k B\Lambda^k B^{-1} + a_{k-1} B\Lambda^{k-1} B^{-1} + \ldots + a_0 BB^{-1} \overset{\text{Linearität}}{=}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.
Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1} B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) = a_k B\Lambda^k B^{-1} + a_{k-1} B\Lambda^{k-1} B^{-1} + ... + a_0 BB^{-1} \overset{\text{Linearität}}{=}$
$B(a_k\Lambda^k + ... + a_0 Id)B^{-1}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.
Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) = a_k B\Lambda^k B^{-1} + a_{k-1} B\Lambda^{k-1} B^{-1} + ... + a_0 BB^{-1} \overset{\text{Linearität}}{=}$
$B(a_k\Lambda^k + ... + a_0 Id)B^{-1} = BP(\Lambda)B^{-1}$. Dann

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + \ldots + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + \ldots + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.

Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1} B}_{Id} \Lambda B^{-1} \ldots B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) = a_k B\Lambda^k B^{-1} + a_{k-1} B\Lambda^{k-1} B^{-1} + \ldots + a_0 BB^{-1} \overset{\text{Linearität}}{=}$
$B(a_k \Lambda^k + \ldots + a_0 Id)B^{-1} = BP(\Lambda)B^{-1}$. Dann
$\aleph_A(A) = B\aleph_A(\Lambda)B^{-1}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.
Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1} B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) = a_k B\Lambda^k B^{-1} + a_{k-1} B\Lambda^{k-1} B^{-1} + ... + a_0 BB^{-1} \overset{\text{Linearität}}{=}$
$B(a_k \Lambda^k + ... + a_0 Id)B^{-1} = BP(\Lambda)B^{-1}$. Dann
$\aleph_A(A) = B\aleph_A(\Lambda)B^{-1} \overset{\text{Satz 51}}{=}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.
Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) = a_k B\Lambda^k B^{-1} + a_{k-1} B\Lambda^{k-1} B^{-1} + ... + a_0 BB^{-1} \overset{\text{Linearität}}{=}$
$B(a_k\Lambda^k + ... + a_0 Id)B^{-1} = BP(\Lambda)B^{-1}$. Dann
$\aleph_A(A) = B\aleph_A(\Lambda)B^{-1} \overset{\text{Satz 51}}{=} B\aleph_\Lambda(\Lambda)B^{-1}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + \ldots + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + \ldots + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.

Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} \ldots B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) = a_k B\Lambda^k B^{-1} + a_{k-1} B\Lambda^{k-1} B^{-1} + \ldots + a_0 BB^{-1} \overset{\text{Linearität}}{=}$
$B(a_k\Lambda^k + \ldots + a_0 Id)B^{-1} = BP(\Lambda)B^{-1}$. Dann
$\aleph_A(A) = B\aleph_A(\Lambda)B^{-1} \overset{\text{Satz 51}}{=} B\aleph_\Lambda(\Lambda)B^{-1} = B\mathbf{0}B^{-1}$

Zum Aufwärmen: Beweis für diagonale und diagonalisierbare Matrizen

Sei $A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $P = a_k x^k + ... + a_0$. Dann ist

$$P(A) = a_k \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k + ... + a_0 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\aleph_A(A) = \begin{pmatrix} \aleph_A(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \aleph_A(\lambda_n) \end{pmatrix} \overset{\text{Satz 52}}{=} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Sei A diagonalisierbar, also $A := B\Lambda B^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ.

Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} = B\Lambda^k B^{-1} =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Also, $P(A) = a_k B\Lambda^k B^{-1} + a_{k-1} B\Lambda^{k-1} B^{-1} + ... + a_0 BB^{-1} \overset{\text{Linearität}}{=}$
$B(a_k \Lambda^k + ... + a_0 Id)B^{-1} = BP(\Lambda)B^{-1}$. Dann
$\aleph_A(A) = B\aleph_A(\Lambda)B^{-1} \overset{\text{Satz 51}}{=} B\aleph_\Lambda(\Lambda)B^{-1} = B\mathbf{0}B^{-1} = \mathbf{0}$.

Hilfssatz 1

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$,

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind.*

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$.

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$.

Beweis.

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$*, wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$*.*

Beweis. Ist $det(B) = 0$,

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B) det(C)$.

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$,

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$*.*

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, $x \neq \vec{0}$

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$*.*

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, $x \neq \vec{0}$ s.d.

$Bx = \vec{0}$.

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$.

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, $x \neq \vec{0}$ s.d.

$Bx = \vec{0}$. Dann liegt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$.

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, $x \neq \vec{0}$ s.d.

$Bx = \vec{0}$. Dann liegt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ in $Kern_A$,

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$.

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, $x \neq \vec{0}$ s.d.

$Bx = \vec{0}$. Dann liegt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ in $Kern_A$, weil

$$\begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$*.*

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, $x \neq \vec{0}$ s.d.

$Bx = \vec{0}$. Dann liegt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ in $Kern_A$, weil

$$\begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$.

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, $x \neq \vec{0}$ s.d.

$Bx = \vec{0}$. Dann liegt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ in $Kern_A$, weil

$$\begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$.

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, $x \neq \vec{0}$ s.d.

$Bx = \vec{0}$. Dann liegt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ in $Kern_A$, weil

$$\begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Wir sehen, dass A einen nichttrivialen Kern hat,

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$.

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, $x \neq \vec{0}$ s.d. $Bx = \vec{0}$. Dann liegt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ in $Kern_A$, weil

$$\begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Wir sehen, dass A einen nichttrivialen Kern hat, und deswegen $det(A) = 0$.

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$.

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, $x \neq \vec{0}$ s.d.

$Bx = \vec{0}$. Dann liegt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ in $Kern_A$, weil

$$\begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Wir sehen, dass A einen nichttrivialen Kern hat, und deswegen $det(A) = 0$. Also, die Formel $\underbrace{det(A)}_{=0} = \underbrace{det(B)}_{=0} det(C)$ ist richtig,

Hilfssatz 1 *Sei* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$, *wobei* B *eine* $(k \times k)$*-Matrix und* C *eine* $(m \times m)$*-Matrix sind. Dann ist* $det(A) = det(B)det(C)$*.*

Beweis. Ist $det(B) = 0$, so gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^k$, $x \neq \vec{0}$ s.d.

$Bx = \vec{0}$. Dann liegt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ in $Kern_A$, weil

$$\begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Wir sehen, dass A einen nichttrivialen Kern hat, und deswegen $det(A) = 0$. Also, die Formel $\underbrace{det(A)}_{=0} = \underbrace{det(B)}_{=0} det(C)$ ist richtig, falls B ausgeartet ist.

Sei $det(B) \neq 0$.

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst,

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$,

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass

$$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten
$(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$.

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i):

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^k \lambda_j^i (b_i)$.

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form (a_j)

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^k \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A in die Form $det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ bringen, weil solche Elementarspaltenumtauschungen die Matricen B, C nicht ändern.

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A in die Form
$det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ bringen, weil solche
Elementarspaltenumtauschungen die Matricen B, C nicht ändern. Da solche Elementarumtauschungen die Determinante nicht ändern,

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^k \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A in die Form $det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ bringen, weil solche Elementarspaltenumtauschungen die Matricen B, C nicht ändern. Da solche Elementarumtauschungen die Determinante nicht ändern, ist
$$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}.$$

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A in die Form
$det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ bringen, weil solche
Elementarspaltenumtauschungen die Matricen B, C nicht ändern. Da solche Elementarumtauschungen die Determinante nicht ändern, ist
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$.
Offensichtlich,

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^k \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A in die Form
$det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ bringen, weil solche
Elementarspaltenumtauschungen die Matricen B, C nicht ändern. Da solche Elementarumtauschungen die Determinante nicht ändern, ist
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$.
Offensichtlich, ist
$\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} =$

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A in die Form $det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ bringen, weil solche Elementarspaltenumtauschungen die Matricen B, C nicht ändern. Da solche Elementarumtauschungen die Determinante nicht ändern, ist
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$.
Offensichtlich, ist
$$\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}.$$

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass

$$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$$ ist.

Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j^i (b_i)$. Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A in die Form

$$det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$$ bringen, weil solche

Elementarspaltenumtauschungen die Matricen B, C nicht ändern. Da solche Elementarumtauschungen die Determinante nicht ändern, ist

$$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich, ist

$$\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}.$$ Dann ist

$$det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} =$$

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det\begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^k \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A in die Form
$det\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ bringen, weil solche
Elementarspaltenumtauschungen die Matricen B, C nicht ändern. Da solche Elementarumtauschungen die Determinante nicht ändern, ist
$det\begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$.
Offensichtlich, ist
$\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$. Dann ist
$det\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det\left(\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}\right) =$

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det\begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^k \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A in die Form
$det\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ bringen, weil solche
Elementarspaltenumtauschungen die Matricen B, C nicht ändern. Da solche Elementarumtauschungen die Determinante nicht ändern, ist
$det\begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$.
Offensichtlich, ist
$\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$. Dann ist
$det\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det\left(\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}\right) =$
$det\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot det\begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} =$

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A in die Form $det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ bringen, weil solche Elementarspaltenumtauschungen die Matricen B, C nicht ändern. Da solche Elementarumtauschungen die Determinante nicht ändern, ist
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$.
Offensichtlich, ist
$\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$. Dann ist
$det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \left(\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} \right) =$
$det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot det \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det(B) \cdot det(C)$.

Sei $det(B) \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ ist.
Da $det(B) \neq 0$, ist $rk_s(B) = k$ und deswegen bilden die Spalten $(b_1), (b_2), ..., (b_k) \in \mathbb{K}^k$ eine Basis in $\mathbb{K}^k$. Dann sind die Spalten $(d_1), ..., (d_m)$ von D Linearkombinationen von (b_i): $(d_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j^i (b_i)$.
Dann kann mann mit Hilfe von Elementarspaltenumtauschungen der Form $(a_j) \mapsto (a_j) + \lambda(a_i)$ mit $j > k$ und $i \leq k$ die Matrix A in die Form $det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$ bringen, weil solche Elementarspaltenumtauschungen die Matricen B, C nicht ändern. Da solche Elementarumtauschungen die Determinante nicht ändern, ist
$det \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$.
Offensichtlich, ist
$\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix}$. Dann ist
$det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det \left(\begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} \right) =$
$det \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & Id_m \end{pmatrix} \cdot det \begin{pmatrix} Id_k & \mathbf{0}_{k,m} \\ \mathbf{0}_{m,k} & C \end{pmatrix} = det(B) \cdot det(C)$. □

Hilfssatz 2.

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*

$\aleph_A =$

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*
$\aleph_A = (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0)$.

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*
$\aleph_A = (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + \ldots + \alpha_0)$.

Beweis: Ausrechnen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & -t & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} - t \end{pmatrix}$$

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*

$\aleph_A = (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0)$.

Beweis: Ausrechnen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & -t & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} - t \end{pmatrix} \stackrel{\text{Entwickl. nach der } m\text{-ten Spalte}}{=}$$

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*

$\aleph_A = (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0)$.

Beweis: Ausrechnen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & -t & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} - t \end{pmatrix} \overset{\text{Entwickl. nach der } m\text{-ten Spalte}}{=}$$

$$(-1)^{m+1}\alpha_0$$

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*

$\aleph_A = (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0)$.

Beweis: Ausrechnen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & -t & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} - t \end{pmatrix} \overset{\text{Entwickl. nach der } m\text{-ten Spalte}}{=}$$

$$(-1)^{m+1}\alpha_0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -t & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -t \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*

$\aleph_A = (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0)$.

Beweis: Ausrechnen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & -t & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} - t \end{pmatrix} \overset{\text{Entwickl. nach der } m\text{-ten Spalte}}{=}$$

$$(-1)^{m+1}\alpha_0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -t & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -t \\ & & & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{m+2}\alpha_1 \cdot$$

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*
$\aleph_A = (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0)$.

Beweis: Ausrechnen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & -t & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} - t \end{pmatrix} \overset{\text{Entwickl. nach der } m\text{-ten Spalte}}{=}$$

$$(-1)^{m+1}\alpha_0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -t & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -t \\ & & & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{m+2}\alpha_1 \cdot det \begin{pmatrix} -t & 0 & & & \\ 0 & 1 & -t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*

$\aleph_A = (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0)$.

Beweis: Ausrechnen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & -t & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} - t \end{pmatrix} \overset{\text{Entwickl. nach der } m\text{-ten Spalte}}{=}$$

$$(-1)^{m+1}\alpha_0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -t & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -t \\ & & & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{m+2}\alpha_1 \cdot det \begin{pmatrix} -t & 0 & & & \\ 0 & 1 & -t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} +$$

$$... + (-1)^{m+m}(\alpha_{m-1} - t) \cdot det \begin{pmatrix} -t & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -t \end{pmatrix} =$$

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*

$\aleph_A = (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0)$.

Beweis: Ausrechnen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & -t & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} - t \end{pmatrix} \overset{\text{Entwickl. nach der } m\text{-ten Spalte}}{=}$$

$$(-1)^{m+1}\alpha_0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -t & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -t \\ & & & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{m+2}\alpha_1 \cdot det \begin{pmatrix} -t & 0 & & & \\ 0 & 1 & -t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} +$$

$$... + (-1)^{m+m}(\alpha_{m-1} - t) \cdot det \begin{pmatrix} -t & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -t \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{m+1}\alpha_0 + (-1)^{m+2}\alpha_1(-t) + ... + a_{m-1}(-t)^{m-1} + (-t)^m$$

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*
$\aleph_A = (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0)$.

Beweis: Ausrechnen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & -t & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} - t \end{pmatrix} \overset{\text{Entwickl. nach der } m\text{-ten Spalte}}{=}$$

$$(-1)^{m+1}\alpha_0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -t & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -t \\ & & & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{m+2}\alpha_1 \cdot det \begin{pmatrix} -t & 0 & & & \\ 0 & 1 & -t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} +$$

$$... + (-1)^{m+m}(\alpha_{m-1} - t) \cdot det \begin{pmatrix} -t & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -t \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{m+1}\alpha_0 + (-1)^{m+2}\alpha_1(-t) + ... + a_{m-1}(-t)^{m-1} + (-t)^m =$$
$$(-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0),$$

Hilfssatz 2. *Für* $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{pmatrix}$ *ist*

$\aleph_A = (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0)$.

Beweis: Ausrechnen.

$$\det \begin{pmatrix} -t & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & -t & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} - t \end{pmatrix} \overset{\text{Entwickl. nach der } m\text{-ten Spalte}}{=}$$

$$(-1)^{m+1}\alpha_0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -t & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -t \\ & & & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{m+2}\alpha_1 \cdot det \begin{pmatrix} -t & 0 & & & \\ 0 & 1 & -t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} +$$

$$... + (-1)^{m+m}(\alpha_{m-1} - t) \cdot det \begin{pmatrix} -t & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -t \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{m+1}\alpha_0 + (-1)^{m+2}\alpha_1(-t) + ... + a_{m-1}(-t)^{m-1} + (-t)^m =$$
$$(-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0), \qquad \square$$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig.

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$.

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$.

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$.
Setze $v_1 = v$,

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$.
Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$,

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$.
Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1}$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$.
Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$.

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig,

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist.

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$.

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} =$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$,

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$.
Nach Basisergänzungssatz

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen:

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d.
$(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m,$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d.
$(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$.

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \quad B^{-1}AB =$$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \quad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... $,v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \qquad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, in dem Fall

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \quad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, in dem Fall

$\aleph_A$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \quad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, in dem Fall

$$\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=}$$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \qquad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, in dem Fall

$$\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=} \aleph_{B^{-1}AB}$$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \quad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, in dem Fall

$$\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} \overset{\text{HS 1,HA 2}}{=}$$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1}v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \qquad B^{-1}AB = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{array}\right).$$

Tatsächlich, in dem Fall

$$\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} \overset{\text{HS 1,HA 2}}{=} (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C.$$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \qquad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, in dem Fall

$$\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} \overset{\text{HS 1,HA 2}}{=} (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C.$$

Also,

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \qquad B^{-1}AB = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{array} \right).$$

Tatsächlich, in dem Fall

$$\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} \overset{\text{HS 1,HA 2}}{=} (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C.$$

Also, $\aleph_A(A)v =$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \qquad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, in dem Fall

$\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} \overset{\text{HS 1,HA 2}}{=} (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C$.
Also, $\aleph_A(A)v = (-1)^{m+1}(-A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C(A)v =$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \quad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, in dem Fall

$\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} \overset{\text{HS 1,HA 2}}{=} (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C$.
Also, $\aleph_A(A)v = (-1)^{m+1}(-A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C(A)v =$
$\aleph_C(A) \cdot (-1)^{m+1}(-A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + ... + \alpha_0)v =$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... $,v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1}v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \quad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, in dem Fall

$$\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} \overset{\text{HS 1,HA 2}}{=} (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C.$$

Also, $\aleph_A(A)v = (-1)^{m+1}(-A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C(A)v =$
$\aleph_C(A) \cdot (-1)^{m+1}(-A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + ... + \alpha_0)v =$
$\aleph_C(A) \cdot (-1)^{m+1}(-A^m v + \alpha_{m-1}A^{m-1}v + ... + \alpha_0 v)$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \quad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, in dem Fall

$\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} \overset{\text{HS 1,HA 2}}{=} (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C$.
Also, $\aleph_A(A)v = (-1)^{m+1}(-A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C(A)v =$
$\aleph_C(A) \cdot (-1)^{m+1}(-A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + ... + \alpha_0)v =$
$\aleph_C(A) \cdot (-1)^{m+1}(-A^m v + \alpha_{m-1}A^{m-1}v + ... + \alpha_0 v) =$
$\aleph_C(A) \cdot (-1)^{m+1}(-v_{m+1} + \alpha_{m-1}v_m + ... + \alpha_0 v_1)$

Beweis des Satzes 56 (Hamilton-Cayley)

Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Z.z.: $\aleph_A(A)v = 0$. Ohne Einschränkung sei $v \neq \vec{0}$. Setze $v_1 = v$, $v_2 := Av_1$, ... ,$v_i := Av_{i-1} = A^{i-1}v_1$. Wähle m so, dass $\{v_1, ..., v_m\}$ linear unabhängig, aber $\{v_1, ..., v_{m+1}\}$ linear abhängig ist. Dann ist $1 \leq m \leq n$. Schreibe $v_{m+1} = \alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1} v_m$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Menge v_1, ..., v_m bis zu einer Basis in $\mathbb{K}^n$ ergänzen: es gibt Vektoren $u_{m+1}, ..., u_n$ s.d. $(b_1 := v_1, ..., b_m := v_m, b_{m+1} := u_{m+1}, ..., b_n := u_n)$ eine Basis ist. Sei B die Matrix s.d. $Be_i = b_i$. Es genügend z.z., dass

$$(*) \quad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, in dem Fall

$$\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} \overset{\text{HS 1,HA 2}}{=} (-1)^{m+1}(-t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C.$$

Also, $\aleph_A(A)v = (-1)^{m+1}(-A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + ... + \alpha_0) \cdot \aleph_C(A)v =$
$\aleph_C(A) \cdot (-1)^{m+1}(-A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + ... + \alpha_0)v =$
$\aleph_C(A) \cdot (-1)^{m+1}(-A^m v + \alpha_{m-1}A^{m-1}v + ... + \alpha_0 v) =$
$\aleph_C(A) \cdot (-1)^{m+1}(-v_{m+1} + \alpha_{m-1}v_m + ... + \alpha_0 v_1) = \vec{0}$.

Wir zeigen: $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$

Wir zeigen: $B^{-1}AB = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{\text{C}} \end{array}\right).$

Die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$

Wir zeigen: $$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist
$B^{-1}AB\ e_i = B^{-1}Ab_i$

Wir zeigen: $B^{-1}AB = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{\text{C}} \end{array}\right).$

Die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist
$B^{-1}AB\ e_i = B^{-1}Ab_i \overset{\text{für } i < m}{=}$

Wir zeigen: $B^{-1}AB = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{\text{C}} \end{array}\right).$

Die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

$B^{-1}AB\ e_i = B^{-1}Ab_i \overset{\text{für } i < m}{=} B^{-1}Av_i = B^{-1}v_{i+1} =$

Wir zeigen: $B^{-1}AB = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{array}\right).$

Die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

$B^{-1}AB\ e_i = B^{-1}Ab_i \overset{\text{für } i<m}{=} B^{-1}Av_i = B^{-1}v_{i+1} = e_{i+1}.$

Die $m-$te Spalte von $B^{-1}AB$

$$\text{Wir zeigen: } B^{-1}AB = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{\text{C}} \end{array}\right).$$

Die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

$B^{-1}AB\ e_i = B^{-1}Ab_i \overset{\text{für } i<m}{=} B^{-1}Av_i = B^{-1}v_{i+1} = e_{i+1}$.

Die $m-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

$B^{-1}AB\ e_m =$

Wir zeigen: $B^{-1}AB = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{array}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{array}\right).$

Die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

$B^{-1}AB\ e_i = B^{-1}Ab_i \overset{\text{für } i<m}{=} B^{-1}Av_i = B^{-1}v_{i+1} = e_{i+1}.$

Die $m-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

$B^{-1}AB\ e_m = B^{-1}Av_m =$

Wir zeigen: $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{C} \end{pmatrix}.$

Die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

$B^{-1}AB\ e_i = B^{-1}Ab_i \overset{\text{für } i < m}{=} B^{-1}Av_i = B^{-1}v_{i+1} = e_{i+1}.$

Die $m-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

$B^{-1}AB\ e_m = B^{-1}Av_m = B^{-1}v_{m+1} =$

Wir zeigen: $$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{\text{C}} \end{pmatrix}.$$

Die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

$B^{-1}AB\ e_i = B^{-1}Ab_i \overset{\text{für } i<m}{=} B^{-1}Av_i = B^{-1}v_{i+1} = e_{i+1}$.

Die $m-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

$B^{-1}AB\ e_m = B^{-1}Av_m = B^{-1}v_{m+1} =$

$B^{-1}(\alpha_0 v_1 + \dots + \alpha_{m-1}v_m) =$

Wir zeigen: $B^{-1}AB = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{array}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{\text{C}} \end{array} \right).$

Die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

$B^{-1}AB\ e_i = B^{-1}Ab_i \overset{\text{für } i<m}{=} B^{-1}Av_i = B^{-1}v_{i+1} = e_{i+1}$.

Die $m-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

$B^{-1}AB\ e_m = B^{-1}Av_m = B^{-1}v_{m+1} =$

$B^{-1}(\alpha_0 v_1 + ... + \alpha_{m-1}v_m) = \alpha_0 e_1 + ... + \alpha_{m-1}e_m$.

Wir zeigen: $B^{-1}AB = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \alpha_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{m-1} \end{matrix}} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \boxed{\text{C}} \end{array}\right).$

Die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist
$B^{-1}AB\ e_i = B^{-1}Ab_i \overset{\text{für } i<m}{=} B^{-1}Av_i = B^{-1}v_{i+1} = e_{i+1}$.
Die $m-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist
$B^{-1}AB\ e_m = B^{-1}Av_m = B^{-1}v_{m+1} =$
$B^{-1}(\alpha_0 v_1 + \ldots + \alpha_{m-1}v_m) = \alpha_0 e_1 + \ldots + \alpha_{m-1}e_m$. $\square$

Minimalpolynom

Minimalpolynom

Def. 51

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$.*

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$,*

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$,*

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Ein* $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, *des kleinsten Grads s.d.* $P(A) = \mathbf{0}$

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A.*

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Ein* $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, *des kleinsten Grads s.d.* $P(A) = \mathbf{0}$ *heißt* *Minimalpolynom* *zu* A.
Bezeichnung: Min_A.

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei* A *eine* $n \times n$ *Matrix über* $\mathbb{K}$. *Ein* $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, *des kleinsten Grads s.d.* $P(A) = \mathbf{0}$ *heißt* *Minimalpolynom* *zu* A.
Bezeichnung: Min_A.

Satz 57

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert*

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig*

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A.*
Bezeichnung: Min_A.

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt:*

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt* Minimalpolynom *zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$*

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt* Minimalpolynom *zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \; \vdots \; Min_A$.*

Beweis:

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A.*
Bezeichnung: Min_A.

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \; \vdots \; Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A.*
Bezeichnung: Min_A.
Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*
Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert).

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \,\vdots\, Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \,\vdots\, Min_A$,

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt* Minimalpolynom *zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$,

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) =$

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.

Wir zeigen:

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \,\vdots\, Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \,\vdots\, Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$,

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt* Minimalpolynom *zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann
$P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \vdots Min_A$.

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \,\vdots\, Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \,\vdots\, Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \,\vdots\, Min_A$. Wir dividieren mit Rest

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \vdots Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$,

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \,\vdots\, Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \,\vdots\, Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann
$P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \,\vdots\, Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$.

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \vdots Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$. Dann ist $P(A)$

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A.*
Bezeichnung: Min_A.

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \;\vdots\; Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \;\vdots\; Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann
$P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \;\vdots\; Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$.
Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} =$

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt* *Minimalpolynom* *zu A.*
Bezeichnung: Min_A.
Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \,\vdots\, Min_A$.*
Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \,\vdots\, Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann
$P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \,\vdots\, Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$.
Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=}$

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt* Minimalpolynom *zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \;\vdots\; Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \;\vdots\; Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \;\vdots\; Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$. Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$.

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt* *Minimalpolynom zu A.*
Bezeichnung: Min_A.
Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \ \vdots \ Min_A$.*
Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \ \vdots \ Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann
$P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \ \vdots \ Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$.
Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$. Dann ist $r(A) = 0$.

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt* *Minimalpolynom zu A.*
Bezeichnung: Min_A.
Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*
Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \vdots Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$.
Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$. Dann ist $r(A) = 0$. Da Min_A der Annihilator des kleinsten Grades ist,

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt* *Minimalpolynom* *zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \,\vdots\, Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \,\vdots\, Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \,\vdots\, Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$. Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$. Dann ist $r(A) = 0$. Da Min_A der Annihilator des kleinsten Grades ist, ist $r \equiv \mathbf{0}$.

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.

Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \vdots Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$. Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$. Dann ist $r(A) = 0$. Da Min_A der Annihilator des kleinsten Grades ist, ist $r \equiv \mathbf{0}$.

Eindeutigkeit.

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A.*
Bezeichnung: Min_A.
Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*
Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann
$P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \vdots Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$.
Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$. Dann ist $r(A) = 0$. Da Min_A der Annihilator des kleinsten Grades ist, ist $r \equiv \mathbf{0}$.
Eindeutigkeit. Angennomen $P(A) = \mathbf{0}$,

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt* *Minimalpolynom* *zu A.*
Bezeichnung: Min_A.
Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*
Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \vdots Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$. Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$. Dann ist $r(A) = 0$. Da Min_A der Annihilator des kleinsten Grades ist, ist $r \equiv \mathbf{0}$.
Eindeutigkeit. Angenommen $P(A) = \mathbf{0}$, $Grad(P) = Grad(Min_A)$.

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \vdots Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$. Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$. Dann ist $r(A) = 0$. Da Min_A der Annihilator des kleinsten Grades ist, ist $r \equiv \mathbf{0}$.

Eindeutigkeit. Angennomen $P(A) = \mathbf{0}$, $Grad(P) = Grad(Min_A)$. Da $P \vdots Min_A$,

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \vdots Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$. Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$. Dann ist $r(A) = 0$. Da Min_A der Annihilator des kleinsten Grades ist, ist $r \equiv \mathbf{0}$.
Eindeutigkeit. Angennomen $P(A) = \mathbf{0}$, $Grad(P) = Grad(Min_A)$. Da $P \vdots Min_A$, ist $P = Min_A \cdot g$.

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \vdots Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$. Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$. Dann ist $r(A) = 0$. Da Min_A der Annihilator des kleinsten Grades ist, ist $r \equiv \mathbf{0}$.
Eindeutigkeit. Angennomen $P(A) = \mathbf{0}$, $Grad(P) = Grad(Min_A)$. Da $P \vdots Min_A$, ist $P = Min_A \cdot g$. Also $Grad(P) = Grad(Min_A) + Grad(g)$.

Minimalpolynom

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt* Minimalpolynom *zu A. Bezeichnung: Min_A.*

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \vdots Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \vdots Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \vdots Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$. Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$. Dann ist $r(A) = 0$. Da Min_A der Annihilator des kleinsten Grades ist, ist $r \equiv \mathbf{0}$.

Eindeutigkeit. Angennomen $P(A) = \mathbf{0}$, $Grad(P) = Grad(Min_A)$. Da $P \vdots Min_A$, ist $P = Min_A \cdot g$. Also $Grad(P) = Grad(Min_A) + Grad(g)$. Dann $Grad(g) = 0$,

Def. 51 *Sei A eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$. Ein $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$, des kleinsten Grads s.d. $P(A) = \mathbf{0}$ heißt Minimalpolynom zu A.*
Bezeichnung: Min_A.

Satz 57 *Minimalpolynom zu A existiert und ist eindeutig bis zur Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ferner gilt: $P(A) = \mathbf{0}$ g.d.w. $P \,\vdots\, Min_A$.*

Beweis: Existenz ist trivial wegen Satz 56 (weil $\aleph_A$ die Matrix A annihiliert). Falls $P \,\vdots\, Min_A$, also $Min_A \cdot g = P$, dann $P(A) = Min_A(A) \cdot g(A) = \mathbf{0} \cdot g(A) = \mathbf{0}$.
Wir zeigen: Ist $P(A) = \mathbf{0}$, so $P \,\vdots\, Min_A$. Wir dividieren mit Rest (Vorl. Fricke) und bekommen $P = Min_A \cdot g + r$, wobei $Grad(r) < Grad(Min_A)$. Dann ist $\underbrace{P(A)}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{Min_A(A)}_{=\mathbf{0}} \cdot g(A) + r(A)$. Dann ist $r(A) = 0$. Da Min_A der Annihilator des kleinsten Grades ist, ist $r \equiv \mathbf{0}$.
Eindeutigkeit. Angennomen $P(A) = \mathbf{0}$, $Grad(P) = Grad(Min_A)$. Da $P \,\vdots\, Min_A$, ist $P = Min_A \cdot g$. Also $Grad(P) = Grad(Min_A) + Grad(g)$. Dann $Grad(g) = 0$, also g ist eine Konstante. $\square$

Lemma 33

Lemma 33 *Sei* $P = (t - \lambda_1)^{k_1} ... (t - \lambda_m)^{k_m}$.

Lemma 33 *Sei* $P = (t - \lambda_1)^{k_1} ... (t - \lambda_m)^{k_m}$. *Dann gilt: teilt* Q

Lemma 33 *Sei* $P = (t - \lambda_1)^{k_1} \ldots (t - \lambda_m)^{k_m}$. *Dann gilt: teilt* Q P,

Lemma 33 *Sei* $P = (t - \lambda_1)^{k_1} ... (t - \lambda_m)^{k_m}$. *Dann gilt: teilt* Q P, *so ist* $Q = (t - \lambda_1)^{k'_1} ... (t - \lambda_m)^{k'_m}$,

Lemma 33 *Sei* $P = (t - \lambda_1)^{k_1} ... (t - \lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t - \lambda_1)^{k'_1} ... (t - \lambda_m)^{k'_m}$*, wobei* $0 \leq k'_i \leq k_i$*.*

Lemma 33 *Sei* $P = (t - \lambda_1)^{k_1} ... (t - \lambda_m)^{k_m}$. *Dann gilt: teilt* Q P, *so ist* $Q = (t - \lambda_1)^{k_1'} ... (t - \lambda_m)^{k_m'}$, *wobei* $0 \leq k_i' \leq k_i$.

Wiederspruchsbeweis:

Lemma 33 *Sei* $P = (t - \lambda_1)^{k_1} \ldots (t - \lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t - \lambda_1)^{k'_1} \ldots (t - \lambda_m)^{k'_m}$*, wobei* $0 \leq k'_i \leq k_i$*.*
Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden.

Lemma 33 *Sei* $P = (t - \lambda_1)^{k_1} ... (t - \lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t - \lambda_1)^{k'_1} ... (t - \lambda_m)^{k'_m}$*, wobei* $0 \leq k'_i \leq k_i$*.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$,

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m}$*, wobei* $0 \leq k'_i \leq k_i$*.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden.
Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$,

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m}$*, wobei* $0 \leq k'_i \leq k_i$*.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m} \cdot Q'$

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. *Dann gilt: teilt* Q P, *so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m}$, *wobei* $0 \leq k'_i \leq k_i$.

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden.
Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und
$Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$,

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'}$*, wobei* $0 \leq k_i' \leq k_i$*.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k_i' \geq 0$, $j_i \geq 0$,

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'}$*, wobei* $0 \leq k_i' \leq k_i$*.*
Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden.
Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und
$Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$,
wobei $k_i' \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q'

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'}$*, wobei* $0 \leq k_i' \leq k_i$*.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k_i' \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g',

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m}$*, wobei* $0 \leq k'_i \leq k_i$*.*
Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden.
Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und
$Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$,
wobei $k'_i \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$.

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. *Dann gilt: teilt* Q P, *so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'}$, *wobei* $0 \leq k_i' \leq k_i$.
Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k_i' \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist
$(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m}$

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. *Dann gilt: teilt* Q P, *so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'}$, *wobei* $0 \le k_i' \le k_i$.
Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden.
Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und
$Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$,
wobei $k_i' \ge 0$, $j_i \ge 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \ge 0$. Dann ist
$(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m} \cdot Q' \cdot g' =$

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m}$*, wobei* $0 \leq k'_i \leq k_i$*.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden.
Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und
$Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k'_i \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist
$(t-\lambda_1)^{k'_1+j_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$.

Lemma 33 *Sei $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Dann gilt: teilt Q P, so ist $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'}$, wobei $0 \le k_i' \le k_i$.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k_i' \ge 0$, $j_i \ge 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \ge 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Wir dividieren beide Seiten durch

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'}$*, wobei* $0 \leq k_i' \leq k_i$*.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k_i' \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Wir dividieren beide Seiten durch $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m}$

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m}$*, wobei* $0 \leq k'_i \leq k_i$*.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \not\vdots\ Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k'_i \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k'_1+j_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Wir dividieren beide Seiten durch $(t-\lambda_1)^{k'_1+j_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m+j_m}$ und erhalten $Q' \cdot g' =$

Lemma 33 *Sei $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Dann gilt: teilt Q P, so ist $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'}$, wobei $0 \leq k_i' \leq k_i$.*

Wiedersspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k_i' \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Wir dividieren beide Seiten durch $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m}$ und erhalten $Q' \cdot g' = (t-\lambda_1)^{k_1-k_1'-j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m-k_m'-j_m}$.

Lemma 33 *Sei* $P = (t - \lambda_1)^{k_1} ... (t - \lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t - \lambda_1)^{k'_1} ... (t - \lambda_m)^{k'_m}$*, wobei* $0 \leq k'_i \leq k_i$*.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t - \lambda_1)^{k'_1} ... (t - \lambda_m)^{k'_m} \cdot Q'$ und $g = (t - \lambda_1)^{j_1} ... (t - \lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k'_i \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist

$(t - \lambda_1)^{k'_1 + j_1} ... (t - \lambda_m)^{k'_m + j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t - \lambda_1)^{k_1} ... (t - \lambda_m)^{k_m}$.

Wir dividieren beide Seiten durch $(t - \lambda_1)^{k'_1 + j_1} ... (t - \lambda_m)^{k'_m + j_m}$ und erhalten $Q' \cdot g' = (t - \lambda_1)^{k_1 - k'_1 - j_1} ... (t - \lambda_m)^{k_m - k'_m - j_m}$. Ist

$k_i - k'_i - j_i =$

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. *Dann gilt: teilt* Q P, *so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m}$, *wobei* $0 \le k'_i \le k_i$.

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k'_i \ge 0$, $j_i \ge 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \ge 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k'_1+j_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Wir dividieren beide Seiten durch $(t-\lambda_1)^{k'_1+j_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m+j_m}$ und erhalten $Q' \cdot g' = (t-\lambda_1)^{k_1-k'_1-j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m-k'_m-j_m}$. Ist $k_i - k'_i - j_i = 0$

Lemma 33 *Sei $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Dann gilt: teilt Q P, so ist $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m}$, wobei $0 \leq k'_i \leq k_i$.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k'_i \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k'_1+j_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Wir dividieren beide Seiten durch $(t-\lambda_1)^{k'_1+j_1}...(t-\lambda_m)^{k'_m+j_m}$ und erhalten $Q' \cdot g' = (t-\lambda_1)^{k_1-k'_1-j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m-k'_m-j_m}$. Ist $k_i - k'_i - j_i = 0$ für alle i,

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1} \ldots (t-\lambda_m)^{k_m}$. *Dann gilt: teilt* Q P, *so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1} \ldots (t-\lambda_m)^{k'_m}$, *wobei* $0 \leq k'_i \leq k_i$.

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k'_1} \ldots (t-\lambda_m)^{k'_m} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1} \ldots (t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k'_i \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k'_1+j_1} \ldots (t-\lambda_m)^{k'_m+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1} \ldots (t-\lambda_m)^{k_m}$. Wir dividieren beide Seiten durch $(t-\lambda_1)^{k'_1+j_1} \ldots (t-\lambda_m)^{k'_m+j_m}$ und erhalten $Q' \cdot g' = (t-\lambda_1)^{k_1-k'_1-j_1} \ldots (t-\lambda_m)^{k_m-k'_m-j_m}$. Ist $k_i - k'_i - j_i = 0$ für alle i, so bekommen wir ein Widerspruch mit $Grad(Q') \geq 0$.

Lemma 33 *Sei $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Dann gilt: teilt Q P, so ist $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'}$, wobei $0 \leq k_i' \leq k_i$.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k_i' \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Wir dividieren beide Seiten durch $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m}$ und erhalten $Q' \cdot g' = (t-\lambda_1)^{k_1-k_1'-j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m-k_m'-j_m}$. Ist $k_i - k_i' - j_i = 0$ für alle i, so bekommen wir ein Widerspruch mit $Grad(Q') \geq 0$. Ist ein $k_i - k_i' - j_i \geq 0$,

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1} \ldots (t-\lambda_m)^{k_m}$. *Dann gilt: teilt* Q P, *so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'} \ldots (t-\lambda_m)^{k_m'}$, *wobei* $0 \leq k_i' \leq k_i$.

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \,\vdots\, Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'} \ldots (t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1} \ldots (t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k_i' \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1} \ldots (t-\lambda_m)^{k_m'+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1} \ldots (t-\lambda_m)^{k_m}$. Wir dividieren beide Seiten durch $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1} \ldots (t-\lambda_m)^{k_m'+j_m}$ und erhalten $Q' \cdot g' = (t-\lambda_1)^{k_1-k_1'-j_1} \ldots (t-\lambda_m)^{k_m-k_m'-j_m}$. Ist $k_i - k_i' - j_i = 0$ für alle i, so bekommen wir ein Widerspruch mit $Grad(Q') \geq 0$. Ist ein $k_i - k_i' - j_i \geq 0$, so ist $Q'(\lambda_i) \cdot g'(\lambda_i) = 0$.

Lemma 33 *Sei $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Dann gilt: teilt Q P, so ist $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'}$, wobei $0 \le k_i' \le k_i$.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \,\vdots\, Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k_i' \ge 0$, $j_i \ge 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \ge 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Wir dividieren beide Seiten durch $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m}$ und erhalten $Q' \cdot g' = (t-\lambda_1)^{k_1-k_1'-j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m-k_m'-j_m}$. Ist $k_i - k_i' - j_i = 0$ für alle i, so bekommen wir ein Widerspruch mit $Grad(Q') \ge 0$. Ist ein $k_i - k_i' - j_i \ge 0$, so ist $Q'(\lambda_i) \cdot g'(\lambda_i) = 0$. Wir bekommen Widerspruch mit der Bedienung $Q'(\lambda_i) \ne 0$,

Lemma 33 *Sei* $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$*. Dann gilt: teilt* Q P*, so ist* $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'}$*, wobei* $0 \leq k_i' \leq k_i$*.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \,\vdots\, Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k_i' \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Wir dividieren beide Seiten durch $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m}$ und erhalten $Q' \cdot g' = (t-\lambda_1)^{k_1-k_1'-j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m-k_m'-j_m}$. Ist $k_i - k_i' - j_i = 0$ für alle i, so bekommen wir ein Widerspruch mit $Grad(Q') \geq 0$. Ist ein $k_i - k_i' - j_i \geq 0$, so ist $Q'(\lambda_i) \cdot g'(\lambda_i) = 0$. Wir bekommen Widerspruch mit der Bedienung $Q'(\lambda_i) \neq 0$, $g'(\lambda_i) \neq 0$.

Lemma 33 *Sei $P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Dann gilt: teilt Q P, so ist $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'}$, wobei $0 \leq k_i' \leq k_i$.*

Wiederspruchsbeweis: OBdA sind λ_i paarweise verschieden. Angenommen, $P \vdots Q$, also $P = Q \cdot g$, und $Q = (t-\lambda_1)^{k_1'}...(t-\lambda_m)^{k_m'} \cdot Q'$ und $g = (t-\lambda_1)^{j_1}...(t-\lambda_m)^{j_m} g'$, wobei $k_i' \geq 0$, $j_i \geq 0$, kein von λ_i ist Nullstelle des Polynoms Q' oder g', und $Grad(Q') \geq 0$. Dann ist $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m} \cdot Q' \cdot g' = P = (t-\lambda_1)^{k_1}...(t-\lambda_m)^{k_m}$. Wir dividieren beide Seiten durch $(t-\lambda_1)^{k_1'+j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m'+j_m}$ und erhalten $Q' \cdot g' = (t-\lambda_1)^{k_1-k_1'-j_1}...(t-\lambda_m)^{k_m-k_m'-j_m}$. Ist $k_i - k_i' - j_i = 0$ für alle i, so bekommen wir ein Widerspruch mit $Grad(Q') \geq 0$. Ist ein $k_i - k_i' - j_i \geq 0$, so ist $Q'(\lambda_i) \cdot g'(\lambda_i) = 0$. Wir bekommen Widerspruch mit der Bedienung $Q'(\lambda_i) \neq 0$, $g'(\lambda_i) \neq 0$. □