Wiederholung

Wiederholung

Ziel: Lineare Endomorphismen untersuchen.

Wiederholung

Ziel: Lineare Endomorphismen untersuchen. **Methode:** Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist.

Wiederholung

Ziel: Lineare Endomorphismen untersuchen. **Methode:** Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach" ist. (Z.B., Diagonal — Heute)

Wiederholung

Ziel: Lineare Endomorphismen untersuchen. **Methode:** Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist. (Z.B., Diagonal — Heute)

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich,

Wiederholung

Ziel: Lineare Endomorphismen untersuchen. **Methode:** Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach" ist. (Z.B., Diagonal — Heute)

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Satz 47 für Endomorphismen: Die Matrix von linearer $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ sei A. Sei $B \in Gl(n, \mathbb{K})$. Dann ist die darstellende Matrix von f in der Basis $\underbrace{\left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} \right)}_{\text{Spalten von } B}$ gleich $B^{-1}AB$.

Def. 43

Wiederholung

Ziel: Lineare Endomorphismen untersuchen. **Methode:** Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach" ist. (Z.B., Diagonal — Heute)

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Satz 47 für Endomorphismen: Die Matrix von linearer $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ sei A. Sei $B \in Gl(n, \mathbb{K})$. Dann ist die darstellende Matrix von f in der Basis $\underbrace{\left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} \right)}_{\text{Spalten von } B}$ gleich $B^{-1}AB$.

Def. 43 *Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix A*

Wiederholung

Ziel: Lineare Endomorphismen untersuchen. **Methode:** Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist. (Z.B., Diagonal — Heute)

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Satz 47 für Endomorphismen: Die Matrix von linearer $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ sei A. Sei $B \in Gl(n, \mathbb{K})$. Dann ist die darstellende Matrix von f in der Basis $\underbrace{\left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} \right)}_{\text{Spalten von } B}$ gleich $B^{-1}AB$.

Def. 43 *Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix A ist das Polynom $\aleph_A := det(A - t \cdot Id)$*

Wiederholung

Ziel: Lineare Endomorphismen untersuchen. **Methode:** Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach" ist. (Z.B., Diagonal — Heute)
Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Satz 47 für Endomorphismen: Die Matrix von linearer $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ sei A. Sei $B \in Gl(n, \mathbb{K})$. Dann ist die darstellende Matrix von f in der Basis $\underbrace{\left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} \right)}_{\text{Spalten von } B}$ gleich $B^{-1}AB$.
Def. 43 *Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix A ist das Polynom $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.*
Lemma 30

Wiederholung

Ziel: Lineare Endomorphismen untersuchen. **Methode:** Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist. (Z.B., Diagonal — Heute)
Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Satz 47 für Endomorphismen: Die Matrix von linearer $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ sei A. Sei $B \in Gl(n, \mathbb{K})$. Dann ist die darstellende Matrix von f in der Basis $\underbrace{\left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} \right)}_{\text{Spalten von } B}$ gleich $B^{-1}AB$.
Def. 43 *Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix A ist das Polynom $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.*
Lemma 30 *Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist*

Wiederholung

Ziel: Lineare Endomorphismen untersuchen. **Methode:** Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist. (Z.B., Diagonal — Heute)

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Satz 47 für Endomorphismen: Die Matrix von linearer $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ sei A. Sei $B \in Gl(n, \mathbb{K})$. Dann ist die darstellende Matrix von f in der Basis $\underbrace{\left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} \right)}_{\text{Spalten von } B}$ gleich $B^{-1}AB$.

Def. 43 *Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix A ist das Polynom $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.*

Lemma 30 *Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist $\aleph_A = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} tr(A) t^{n-1} + \dots + det(A)$, wobei $tr(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$*

Satz 51

Wiederholung

Ziel: Lineare Endomorphismen untersuchen. **Methode:** Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach" ist. (Z.B., Diagonal — Heute)

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Satz 47 für Endomorphismen: Die Matrix von linearer $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ sei A. Sei $B \in Gl(n, \mathbb{K})$. Dann ist die darstellende Matrix von f in der Basis $\underbrace{\left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} \right)}_{\text{Spalten von } B}$ gleich $B^{-1}AB$.

Def. 43 *Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix A ist das Polynom $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.*

Lemma 30 *Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist $\aleph_A = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} tr(A) t^{n-1} + \dots + det(A)$, wobei $tr(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$*

Satz 51 Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome (und deswegen auch Koeffiziente: Determinant, Spur, etc., und auch Nullstellen) gleich: $\aleph_A = \aleph_{A'}$.

Wiederholung

Ziel: Lineare Endomorphismen untersuchen. **Methode:** Suche eine Basis sodass die Matrix „einfach“ ist. (Z.B., Diagonal — Heute)

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Satz 47 für Endomorphismen: Die Matrix von linearer $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ sei A. Sei $B \in Gl(n, \mathbb{K})$. Dann ist die darstellende Matrix von f in der Basis $\underbrace{\left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} \right)}_{\text{Spalten von } B}$ gleich $B^{-1}AB$.

Def. 43 *Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix A ist das Polynom $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.*

Lemma 30 *Das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist $\aleph_A = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} tr(A) t^{n-1} + \dots + det(A)$, wobei $tr(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$*

Satz 51 Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome (und deswegen auch Koeffiziente: Determinant, Spur, etc., und auch Nullstellen) gleich: $\aleph_A = \aleph_{A'}$. (In anderen Worten, charakteristisches Polynom hängt nicht von der Basis, sondern nur vom Endomorphismus ab)

Folgerung

Folgerung *Ist* $n = dim(V)$,

Folgerung *Ist* $n = dim(V)$, *so hat jeder Endomorphismus* $f : V \to V$

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis:

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$.*

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$,*

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$*

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$.*

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*
Beweis:

Folgerung *Ist* $n = dim(V)$, *so hat jeder Endomorphismus* $f : V \to V$ *höchstens* n *paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper, sei* $P \in \mathbb{K}[x]$. *Ist* $\lambda \in \mathbb{K}$ *eine Nullstelle von* $P \in \mathbb{K}[x]$, *so existiert genau ein* $Q \in \mathbb{K}[x]$ *mit* $Q = (x - \lambda)Q$. *Ferner gilt* $Grad(g) = Grad(f) - 1$.
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda)$

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$.

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda)$

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$

Folgerung *Ist* $n = dim(V)$, *so hat jeder Endomorphismus* $f : V \to V$ *höchstens* n *paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper, sei* $P \in \mathbb{K}[x]$. *Ist* $\lambda \in \mathbb{K}$ *eine Nullstelle von* $P \in \mathbb{K}[x]$, *so existiert genau ein* $Q \in \mathbb{K}[x]$ *mit* $Q = (x - \lambda)Q$. *Ferner gilt* $Grad(g) = Grad(f) - 1$.
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$.

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist,

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) =$

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$.

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g).$$

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g).$$ $\square$

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. $\square$

Beweis der Folgerung.

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g).$$ □

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. $\square$

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:
I.A.:

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. □

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:
I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. $\square$

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:

I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. □

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:

I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.

I.V.:

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. $\square$

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:

I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.

I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. □

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:
I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.
I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.
I.S.:

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. $\square$

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:

I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.

I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.

I.S.: Z.z., dass die Aussage auch für n stimmt.

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. □

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:
I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \Longrightarrow f$ hat keine Nullstelle.
I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.
I.S.: Z.z., dass die Aussage auch für n stimmt. Hat P keine Nullstelle,

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. □

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:
I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.
I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.
I.S.: Z.z., dass die Aussage auch für n stimmt. Hat P keine Nullstelle,so ist $k = 0$ und die Aussage trivial.

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist $Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. $\square$

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:

I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.

I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.

I.S.: Z.z., dass die Aussage auch für n stimmt. Hat P keine Nullstelle,so ist $k = 0$ und die Aussage trivial.Ist dagegen λ eine Nullstelle von f,

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. $\square$

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:
I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.
I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.
I.S.: Z.z., dass die Aussage auch für n stimmt. Hat P keine Nullstelle,so ist $k = 0$ und die Aussage trivial.Ist dagegen λ eine Nullstelle von f, dann existiert $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Grad(Q) = n - 1$

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. □

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:

I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.

I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.

I.S.: Z.z., dass die Aussage auch für n stimmt. Hat P keine Nullstelle,so ist $k = 0$ und die Aussage trivial.Ist dagegen λ eine Nullstelle von f, dann existiert $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Grad(Q) = n - 1$ und $P = (x - \lambda) \cdot Q$.

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*
Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*
Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. □

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:
I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.
I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.
I.S.: Z.z., dass die Aussage auch für n stimmt. Hat P keine Nullstelle,so ist $k = 0$ und die Aussage trivial.Ist dagegen λ eine Nullstelle von f, dann existiert $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Grad(Q) = n - 1$ und $P = (x - \lambda) \cdot Q$. Jede andere Nullstelle $\mu \neq \lambda$ von P ist auch Nullstelle von Q.

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. □

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:

I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.

I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.

I.S.: Z.z., dass die Aussage auch für n stimmt. Hat P keine Nullstelle,so ist $k = 0$ und die Aussage trivial.Ist dagegen λ eine Nullstelle von f, dann existiert $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Grad(Q) = n - 1$ und $P = (x - \lambda) \cdot Q$. Jede andere Nullstelle $\mu \neq \lambda$ von P ist auch Nullstelle von Q. Nach IV hat g höchstens $n - 1$ verschiedene Nullstellen.

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. □

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:

I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.

I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.

I.S.: Z.z., dass die Aussage auch für n stimmt. Hat P keine Nullstelle,so ist $k = 0$ und die Aussage trivial.Ist dagegen λ eine Nullstelle von f, dann existiert $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Grad(Q) = n - 1$ und $P = (x - \lambda) \cdot Q$. Jede andere Nullstelle $\mu \neq \lambda$ von P ist auch Nullstelle von Q. Nach IV hat g höchstens $n - 1$ verschiedene Nullstellen. $\implies P$

Folgerung *Ist $n = dim(V)$, so hat jeder Endomorphismus $f : V \to V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

Lemma 31 vor dem Beweis: *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $P \in \mathbb{K}[x]$. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[x]$, so existiert genau ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Q = (x - \lambda)Q$. Ferner gilt $Grad(g) = Grad(f) - 1$.*

Beweis: Polynomdivision mit Rest von P durch $(x - \lambda)$ ergibt $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, so dass $P = (x - \lambda)Q + R$ und $Grad(R) < Grad(x - \lambda) = 1$. Der Rest R hat Grad $< Grad(x - \lambda) = 1$ und ist deswegen ein Skalar $r \in \mathbb{K}$. Da λ eine Nullstelle von P ist, ist $0 = P(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)Q(\lambda)}_{=0} + \underbrace{R(\lambda)}_{=r} = r$ und somit $P = (x - \lambda)g$. Also ist

$Grad(P) = Grad(x - \lambda) + Grad(Q) = 1 + Grad(g)$. □

Beweis der Folgerung. Wir beweisen, dass ein Polynom P von Grad n höhstens n verschidenen Nullstellen hat. Induktion nach $n = Grad(P)$:

I.A.: Für $n = 0$ ist $P = r \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \implies f$ hat keine Nullstelle.

I.V.: Die Aussage sei richtig für ein $n - 1$.

I.S.: Z.z., dass die Aussage auch für n stimmt. Hat P keine Nullstelle,so ist $k = 0$ und die Aussage trivial.Ist dagegen λ eine Nullstelle von f, dann existiert $Q \in \mathbb{K}[x]$ mit $Grad(Q) = n - 1$ und $P = (x - \lambda) \cdot Q$. Jede andere Nullstelle $\mu \neq \lambda$ von P ist auch Nullstelle von Q. Nach IV hat g höchstens $n - 1$ verschiedene Nullstellen. $\implies P$ hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Bemerkung

Bemerkung *Eigenwerten von* f_A *werden wir auch Eigenwerte von* A *nennen*

Bemerkung *Eigenwerten von* f_A *werden wir auch Eigenwerte von* A *nennen*

Bsp.

Bemerkung *Eigenwerten von* f_A *werden wir auch Eigenwerte von* A *nennen*

Bsp. *Eigenwert von* Id

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms* $\aleph_{Id} = (1 - t)^n$

Bemerkung *Eigenwerten von* f_A *werden wir auch Eigenwerte von* A *nennen*

Bsp. *Eigenwert von* Id *ist die Nullstelle des Polynoms* $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ *und ist* $\lambda = 1$.

Bemerkung *Eigenwerten von* f_A *werden wir auch Eigenwerte von* A *nennen*

Bsp. *Eigenwert von* Id *ist die Nullstelle des Polynoms* $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ *und ist* $\lambda = 1$*.* $Eig_1 = \mathbb{K}^n$*.*

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ und ist $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.*

Eigenwert von $\mathbf{0}$

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ und ist $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.*
Eigenwert von $\mathbf{0}$ ist die Nullstelle von $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ und ist $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.*
Eigenwert von $\mathbf{0}$ ist die Nullstelle von $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ und ist 0.

Bemerkung *Eigenwerten von* f_A *werden wir auch Eigenwerte von* A *nennen*

Bsp. *Eigenwert von* Id *ist die Nullstelle des Polynoms* $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ *und ist* $\lambda = 1$*.* $Eig_1 = \mathbb{K}^n$*.*
Eigenwert von $\mathbf{0}$ *ist die Nullstelle von* $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ *und ist* 0*.* $Eig_0 = \mathbb{K}^n$*.*

Bsp.

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms* $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ *und ist* $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.
Eigenwert von $\mathbf{0}$ *ist die Nullstelle von* $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ *und ist* 0.
$Eig_0 = \mathbb{K}^n$.

Bsp. *Eigenwerte von*

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ und ist $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.*
Eigenwert von $\mathbf{0}$ ist die Nullstelle von $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ und ist 0. $Eig_0 = \mathbb{K}^n$.

Bsp. *Eigenwerte von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ und ist $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.*

Eigenwert von $\mathbf{0}$ ist die Nullstelle von $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ und ist 0. $Eig_0 = \mathbb{K}^n$.

Bsp. *Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ sind die Nullstellen von*

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms* $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ *und ist* $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.
Eigenwert von $\mathbf{0}$ *ist die Nullstelle von* $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ *und ist* 0. $Eig_0 = \mathbb{K}^n$.

Bsp. *Eigenwerte von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *sind die Nullstellen von* $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}}$

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ und ist $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.*
Eigenwert von $\mathbf{0}$ ist die Nullstelle von $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ und ist 0. $Eig_0 = \mathbb{K}^n$.

Bsp. *Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ sind die Nullstellen von*
$\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms* $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ *und ist* $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.

Eigenwert von $\mathbf{0}$ *ist die Nullstelle von* $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ *und ist* 0. $Eig_0 = \mathbb{K}^n$.

Bsp. *Eigenwerte von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *sind die Nullstellen von* $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ *und sind* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ und ist $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.*
Eigenwert von $\mathbf{0}$ ist die Nullstelle von $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ und ist 0. $Eig_0 = \mathbb{K}^n$.

Bsp. *Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ sind die Nullstellen von $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ und sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.*

Bsp.

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ und ist $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.*
Eigenwert von $\mathbf{0}$ ist die Nullstelle von $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ und ist 0. $Eig_0 = \mathbb{K}^n$.

Bsp. *Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ sind die Nullstellen von $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ und sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.*

Bsp. Eigenwerte einer Diagonalmatrix

Bemerkung *Eigenwerten von* f_A *werden wir auch Eigenwerte von* A *nennen*

Bsp. *Eigenwert von* Id *ist die Nullstelle des Polynoms* $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ *und ist* $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.
Eigenwert von $\mathbf{0}$ *ist die Nullstelle von* $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ *und ist* 0. $Eig_0 = \mathbb{K}^n$.

Bsp. *Eigenwerte von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *sind die Nullstellen von* $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ *und sind* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Bsp. Eigenwerte einer Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ und ist $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.*
Eigenwert von $\mathbf{0}$ ist die Nullstelle von $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ und ist 0. $Eig_0 = \mathbb{K}^n$.

Bsp. *Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ sind die Nullstellen von $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ und sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.*

Bsp. Eigenwerte einer Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ sind die Diagonalelemente λ_i,

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ und ist $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.*
Eigenwert von $\mathbf{0}$ ist die Nullstelle von $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ und ist 0. $Eig_0 = \mathbb{K}^n$.

Bsp. *Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ sind die Nullstellen von $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ und sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.*

Bsp. Eigenwerte einer Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ sind die Diagonalelemente λ_i, die Eigenvektoren sind (u.a.) die Basisvektoren e_i

Bemerkung *Eigenwerten von f_A werden wir auch Eigenwerte von A nennen*

Bsp. *Eigenwert von Id ist die Nullstelle des Polynoms $\aleph_{Id} = (1-t)^n$ und ist $\lambda = 1$. $Eig_1 = \mathbb{K}^n$.*
Eigenwert von $\mathbf{0}$ ist die Nullstelle von $\aleph_{\mathbf{0}} = (-t)^n$ und ist 0. $Eig_0 = \mathbb{K}^n$.

Bsp. *Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ sind die Nullstellen von $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ und sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.*

Bsp. Eigenwerte einer Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ sind die Diagonalelemente λ_i, die Eigenvektoren sind (u.a.) die Basisvektoren e_i

Frage

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben.

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte,

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren,

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,...

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id}$

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen.)

Bsp. *Eigenraum von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen.)

Bsp. *Eigenraum von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* $\lambda = 1$

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen.)

Bsp. *Eigenraum von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* $\lambda = 1$ *ist die Lösungmenge von* $\Big(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen.)

Bsp. *Eigenraum von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* $\lambda = 1$ *ist die Lösungmenge von* $\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen.)

Bsp. *Eigenraum von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* $\lambda = 1$ *ist die Lösungmenge von* $\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen.)

Bsp. *Eigenraum von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* $\lambda = 1$ *ist die Lösungmenge von* $\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Mit Gauss-Algorithmus bekommen wir,*

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen.)

Bsp. *Eigenraum von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* $\lambda = 1$ *ist die Lösungmenge von* $\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *. Mit Gauss-Algorithmus bekommen wir, dass*
$Eig_1 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \right.$

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen.)

Bsp. *Eigenraum von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* $\lambda = 1$ *ist die Lösungmenge von* $\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Mit Gauss-Algorithmus bekommen wir, dass*
$Eig_1 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},\right.$

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen.)

Bsp. *Eigenraum von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* $\lambda = 1$ *ist die Lösungmenge von* $\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *. Mit Gauss-Algorithmus bekommen wir, dass*
$Eig_1 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R} \right\}$.

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen.)

Bsp. *Eigenraum von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* $\lambda = 1$ *ist die Lösungmenge von* $\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Mit Gauss-Algorithmus bekommen wir, dass*
$Eig_1 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \textit{ wobei } t \in \mathbb{R} \right\}$.

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen.)

Bsp. *Eigenraum von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* $\lambda = 1$ *ist die Lösungmenge von* $\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Mit Gauss-Algorithmus bekommen wir, dass*
$Eig_1 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R} \right\}$.

Frage Eine lineare Abbildung ist durch deren Matrix A gegeben. Wie findet man Eigenwerte, Eigenvektoren, und Eigenräumen?

1. Man konstruiere das charakteristische Polynom und finde dessen Nullstellen λ_1, λ_2,... (Nicht immer explizit möglich)
2. Für jede λ_i finde $Kern_{A-\lambda_i \cdot Id} =: Eig_{\lambda_i}$ (man muss das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot Id)x = \vec{0}$ lösen.)

Bsp. *Eigenraum von* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *zum Eigenwert* $\lambda = 1$ *ist die Lösungmenge von* $\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Mit Gauss-Algorithmus bekommen wir, dass*
$Eig_1 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R} \right\}$.

Satz 53

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus.*

Satz 53 *Sei* $f : V \to V$ *ein Endomorphismus. Seien* $v_1, ..., v_m \in V$ *Eigenvektoren von* f

Satz 53 *Sei* $f : V \to V$ *ein Endomorphismus. Seien* $v_1, ..., v_m \in V$ *Eigenvektoren von* f *zu den paarweise verschiedenen* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$.

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis.

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

Satz 53 *Sei* $f : V \to V$ *ein Endomorphismus. Seien* $v_1, ..., v_m \in V$ *Eigenvektoren von* f *zu den paarweise verschiedenen* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. *Dann sind* $v_1, ..., v_m$ *linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A.

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$.

Satz 53 *Sei* $f : V \to V$ *ein Endomorphismus. Seien* $v_1, ..., v_m \in V$ *Eigenvektoren von* f *zu den paarweise verschiedenen* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$*. Dann sind* $v_1, ..., v_m$ *linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$,

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V.

Satz 53 *Sei* $f : V \to V$ *ein Endomorphismus. Seien* $v_1, ..., v_m \in V$ *Eigenvektoren von* f *zu den paarweise verschiedenen* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. *Dann sind* $v_1, ..., v_m$ *linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

Satz 53 *Sei* $f : V \to V$ *ein Endomorphismus. Seien* $v_1, ..., v_m \in V$ *Eigenvektoren von* f *zu den paarweise verschiedenen* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$*. Dann sind* $v_1, ..., v_m$ *linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S.

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}$,

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$.

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben:

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m)$

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$

$a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m)$

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$

$a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=}$

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$

$a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m.$

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$ $a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m

Satz 53 *Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:
I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .
I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.
I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$
wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.
Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$
$a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab:

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$
$a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$ $a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:

$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 +$

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=} a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:

$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_m$

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}$, $\qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=} a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:

$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_m = \vec{0}$.

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}$, $\qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$ $a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:

$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_m = \vec{0}$. Nach I.V. sind die Vektoren $v_1, ..., v_{m-1}$ linear unabhängig.

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$ $a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:

$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_m = \vec{0}$. Nach I.V. sind die Vektoren $v_1, ..., v_{m-1}$ linear unabhängig. Dann sind

$a_i \quad \underbrace{(\lambda_i - \lambda_m)}$

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=} a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:

$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_m = \vec{0}$. Nach I.V. sind die Vektoren $v_1, ..., v_{m-1}$ linear unabhängig. Dann sind

$a_i \quad \underbrace{(\lambda_i - \lambda_m)}_{\neq 0 \text{Nach Voraussetz.}}$

Satz 53 *Sei* $f : V \to V$ *ein Endomorphismus. Seien* $v_1, ..., v_m \in V$ *Eigenvektoren von* f *zu den paarweise verschiedenen* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$*. Dann sind* $v_1, ..., v_m$ *linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$
$a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:
$a_1(\lambda_1 - \lambda_m) v_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) v_m = \vec{0}$. Nach I.V. sind die Vektoren $v_1, ..., v_{m-1}$ linear unabhängig. Dann sind
$a_i \quad \underbrace{(\lambda_i - \lambda_m)}_{\neq 0 \text{Nach Voraussetz.}} \quad = 0,$

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$ $a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:

$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_m = \vec{0}$. Nach I.V. sind die Vektoren $v_1, ..., v_{m-1}$ linear unabhängig. Dann sind

$a_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_m)}_{\neq 0 \text{Nach Voraussetz.}} = 0$, also $a_1,\ a_2,...a_{m-1} = 0$,

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=} a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:

$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_m = \vec{0}$. Nach I.V. sind die Vektoren $v_1, ..., v_{m-1}$ linear unabhängig. Dann sind

$a_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_m)}_{\neq 0 \text{Nach Voraussetz.}} = 0$, also a_1, a_2,...$a_{m-1} = 0$, und $(*)$ ist $a_m v_m = \vec{0}$.

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:

I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .

I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.

I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}$, $\qquad (*)$

wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.

Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=}$ $a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:

$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_m = \vec{0}$. Nach I.V. sind die Vektoren $v_1, ..., v_{m-1}$ linear unabhängig. Dann sind

$a_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_m)}_{\neq 0 \text{Nach Voraussetz.}} = 0$, also a_1, a_2,...$a_{m-1} = 0$, und $(*)$ ist $a_m v_m = \vec{0}$.

Dann ist auch $a_m = 0$.

Satz 53 *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Seien $v_1, ..., v_m \in V$ Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion nach m:
I.A. Sei $m = 1$. Da $v_1 \neq \vec{0}$, ist $\{v_1\}$ linear unabhängig (Lemma 15) .
I.V. Satz sei richtig für $m - 1$.
I.S. Sei $a_1 v_1 + ... + a_m v_m = \vec{0}, \qquad (*)$
wobei $a_i \in \mathbb{K}$. Z. z.: $a_1 = ... = a_m = 0$.
Wir haben: $\vec{0} = f(\vec{0}) = f(a_1 v_1 + ... + a_m v_m) \overset{\text{Linearität}}{=} a_1 f(v_1) + ... + a_m f(v_m) \overset{\text{Def. Eigenvektor}}{=} a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_m \lambda_m v_m$. Wir ziehen λ_m mal die Gleichung $(*)$ ab: Wir bekommen:
$a_1(\lambda_1 - \lambda_m) v_1 + ... + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) v_m = \vec{0}$. Nach I.V. sind die Vektoren $v_1, ..., v_{m-1}$ linear unabhängig. Dann sind
$a_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_m)}_{\neq 0 \text{Nach Voraussetz.}} = 0$, also $a_1, a_2, ... a_{m-1} = 0$, und $(*)$ ist $a_m v_m = \vec{0}$.
Dann ist auch $a_m = 0$. $\square$

Def. 46

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar,*

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis*

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat*

Def. 46 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat* ($=$ *nur die Diagonalelemente können von* 0 *verschieden sein.)*

Def. 46 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat* (= *nur die Diagonalelemente können von* 0 *verschieden sein.) Eine quadratische Matrix* A *ist diagonalisierbar,*

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt* diagonalisierbar, *falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist* diagonalisierbar, *falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist.*

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist,*

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V*

Def. 46 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *heißt* *diagonalisierbar*, *falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (* $=$ *nur die Diagonalelemente können von* 0 *verschieden sein.) Eine quadratische Matrix* A *ist* *diagonalisierbar*, *falls deren Endomorphismus* f_A *diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen* V *ist g.d. diagonalisierbar,*

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt,*

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis.

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$".

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar,

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$,

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal

ist:

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal

ist: $A =$

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist $f(b_i) = \lambda_i \, b_i$

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist $f(b_i) = \lambda_i \, b_i$

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i$ (weil die Koordinaten von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$

Def. 46 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von* 0 *verschieden sein.) Eine quadratische Matrix* A *ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus* f_A *diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen* V *ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i$ (weil die Koordinaten von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$ die $i-$te Spalte von A ist).

Def. 46 *Ein Endomorphismus* $f : V \to V$ *heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von* 0 *verschieden sein.) Eine quadratische Matrix* A *ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus* f_A *diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen* V *ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist $f(b_i) = \lambda_i \, b_i$ (weil die Koordinaten von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$ die $i-$te Spalte von A ist).

" $\Longleftarrow$ ".

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i$ (weil die Koordinaten von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$ die $i-$te Spalte von A ist).

" $\Longleftarrow$ ". Sind die Basisvektoren b_i Eigenvektoren,

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i$ (weil die Koordinaten von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$ die $i-$te Spalte von A ist).

" $\Longleftarrow$ ". Sind die Basisvektoren b_i Eigenvektoren, so ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i = 0\, b_1 + ... + \lambda_i b_i + ... + 0\, b_n$,

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i$ (weil die Koordinaten von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$ die $i-$te Spalte von A ist).

" $\Longleftarrow$ ". Sind die Basisvektoren b_i Eigenvektoren, so ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i = 0\, b_1 + ... + \lambda_i b_i + ... + 0\, b_n$, also der Koordinatenvektor von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist $f(b_i) = \lambda_i \, b_i$ (weil die Koordinaten von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$ die $i-$te Spalte von A ist).

" $\Longleftarrow$ ". Sind die Basisvektoren b_i Eigenvektoren, so ist $f(b_i) = \lambda_i \, b_i = 0 \, b_1 + ... + \lambda_i b_i + ... + 0 \, b_n$, also der Koordinatenvektor von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$ ist $\lambda_i \cdot e_i$,

Def. 46 *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt diagonalisierbar, falls deren Matrix in einer Basis Diagonalgestalt hat (= nur die Diagonalelemente können von 0 verschieden sein.) Eine quadratische Matrix A ist diagonalisierbar, falls deren Endomorphismus f_A diagonalisierbar ist. (Äquivalent: falls sie zu einer diagonalen Matrix ähnlich ist, s. Satz 47)*

Satz 54 *Ein Endomorphismus von endlichdimensionalen V ist g.d. diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. jeder Basisvektor ein Eigenvektor ist.*

Beweis. Zuerst "$\Longrightarrow$". Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $(b_1, ..., b_n)$, s.d. die Matrix des Endomorphismus diagonal ist: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Dann ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i$ (weil die Koordinaten von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$ die $i-$te Spalte von A ist).

" $\Longleftarrow$ ". Sind die Basisvektoren b_i Eigenvektoren, so ist $f(b_i) = \lambda_i\, b_i = 0\, b_1 + ... + \lambda_i b_i + ... + 0\, b_n$, also der Koordinatenvektor von $f(b_i)$ in der Basis $(b_1, ..., b_n)$ ist $\lambda_i \cdot e_i$, und die Matrix der Abbildung ist eine Diagonalmatrix. $\square$

Folgerung

Folgerung

Folgerung *Ist* $dim(V) = n$

Folgerung *Ist* $dim(V) = n$ *und hat der Endormorphismus* $f : V \to V$

Folgerung *Ist* $dim(V) = n$ *und hat der Endormorphismus* $f : V \to V$ n *paarweise verschiedene Eigenwerte,*

Folgerung *Ist* $dim(V) = n$ *und hat der Endormorphismus* $f : V \to V$ n *paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist* f *diagonalisierbar.*

Folgerung *Ist* $dim(V) = n$ *und hat der Endormorphismus* $f : V \to V$ n *paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist* f *diagonalisierbar.*
Beweis.

Folgerung *Ist* $dim(V) = n$ *und hat der Endormorphismus* $f : V \to V$ n *paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist* f *diagonalisierbar.*
Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$

Folgerung *Ist* $dim(V) = n$ *und hat der Endormorphismus* $f : V \to V$ n *paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist* f *diagonalisierbar.*
Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten.

Folgerung *Ist* $dim(V) = n$ *und hat der Endormorphismus* $f : V \to V$ n *paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist* f *diagonalisierbar.*
Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun,

Folgerung *Ist dim*$(V) = n$ *und hat der Endormorphismus* $f : V \to V$ n *paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist* f *diagonalisierbar.*
Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind.

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt,

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden.

Folgerung *Ist* $dim(V) = n$ *und hat der Endormorphismus* $f : V \to V$ n *paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist* f *diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. □

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*
Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp.

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Folgerung *Ist* $dim(V) = n$ *und hat der Endormorphismus* $f : V \to V$ n *paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist* f *diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich,

$\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}}$

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*
Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich,
$\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2.

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B$.)

Bsp.

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*
Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich,
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B.$)
Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B.$)

Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar.

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B$.)

Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich,

$\aleph_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*
Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B.$)
Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$

Folgerung *Ist* $dim(V) = n$ *und hat der Endormorphismus* $f : V \to V$ n *paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist* f *diagonalisierbar.*
Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B.$)

Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2.$

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B.$)

Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2.$

Wir haben nur eine Nullstelle $\lambda = 0$.

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B.$)

Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2.$

Wir haben nur eine Nullstelle $\lambda = 0$. Kann man eine Basis aus Eigenvektoren finden?

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B.$)

Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2.$

Wir haben nur eine Nullstelle $\lambda = 0$. Kann man eine Basis aus Eigenvektoren finden? Nein, weil $Kern_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich,
$\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich,
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B.$)

Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich,
$\aleph_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2.$
Wir haben nur eine Nullstelle $\lambda = 0$. Kann man eine Basis aus Eigenvektoren finden? Nein, weil $Kern_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ hat nach Dimensionsformel die Dimension $\underbrace{2}_{dim(V)} - \underbrace{1}_{rk(A)}$

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*
Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich,
$\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich,
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B.$)
Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich,
$\aleph_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2.$
Wir haben nur eine Nullstelle $\lambda = 0$. Kann man eine Basis aus Eigenvektoren finden? Nein, weil $Kern_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ hat nach Dimensionsformel die Dimension $\underbrace{2}_{dim(V)} - \underbrace{1}_{rk(A)} = 1$. Also, es gibt keine 2 linear unabhängige Eigenvektoren,

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B.$)

Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2.$

Wir haben nur eine Nullstelle $\lambda = 0$. Kann man eine Basis aus Eigenvektoren finden? Nein, weil $Kern_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ hat nach Dimensionsformel die Dimension $\underbrace{2}_{dim(V)} - \underbrace{1}_{rk(A)} = 1$. Also, es gibt keine 2 linear unabhängige Eigenvektoren, und die Matrix ist nach Satz 54 nich diagonalizierbar.

Folgerung *Ist $dim(V) = n$ und hat der Endormorphismus $f : V \to V$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.*

Beweis. Seien $v_1, ..., v_n$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten. Satz 53 liefert nun, dass sie linear unabhängig sind. Wegen $dim(V) = n$ folgt, dass sie eine Basis von V bilden. Nach Satz 54 ist dann der Endomorphismus diagonalisierbar. $\square$

Bsp. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2$ hat zwei Nullstellen 1 und 2. (Tatsächlich, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} B.$)

Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich, $\aleph_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2.$

Wir haben nur eine Nullstelle $\lambda = 0$. Kann man eine Basis aus Eigenvektoren finden? Nein, weil $Kern_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ hat nach Dimensionsformel die Dimension $\underbrace{2}_{dim(V)} - \underbrace{1}_{rk(A)} = 1$. Also, es gibt keine 2 linear unabhängige Eigenvektoren, und die Matrix ist nach Satz 54 nich diagonalizierbar.

Bemerkung

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information,*

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet,*

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist,*

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom* $n = dim(V)$ *verschiedene Eigenwerte hat:*

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom* $n = dim(V)$ *verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom $n = dim(V)$ verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Anwendung

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom* $n = \dim(V)$ *verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Anwendung *Sei* A *eine diagonalisierbare Matrix.*

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom $n = dim(V)$ verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*
Anwendung *Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man A^k*

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom* $n = dim(V)$ *verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*
Anwendung *Sei* A *eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man* A^k *für beliebige* k *ausrechnen?*

1. Finde eine Matrix B

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom $n = dim(V)$ verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Anwendung *Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man A^k für beliebige k ausrechnen?*

1. Finde eine Matrix B s.d. $B^{-1}AB$ diagonal ist,

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom $n = dim(V)$ verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Anwendung *Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man A^k für beliebige k ausrechnen?*

1. Finde eine Matrix B s.d. $B^{-1}AB$ diagonal ist, also
$$B^{-1}AB := \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},.$$

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom $n = dim(V)$ verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Anwendung *Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man A^k für beliebige k ausrechnen?*

1. Finde eine Matrix B s.d. $B^{-1}AB$ diagonal ist, also $B^{-1}AB := \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,. Wir haben $B\Lambda B^{-1} = A$.

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom $n = dim(V)$ verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Anwendung *Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man A^k für beliebige k ausrechnen?*

1. Finde eine Matrix B s.d. $B^{-1}AB$ diagonal ist, also $B^{-1}AB := \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,. Wir haben $B\Lambda B^{-1} = A$.
2. Dann ist A^k

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom $n = dim(V)$ verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Anwendung *Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man A^k für beliebige k ausrechnen?*

1. Finde eine Matrix B s.d. $B^{-1}AB$ diagonal ist, also $B^{-1}AB := \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,. Wir haben $B\Lambda B^{-1} = A$.
2. Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}$

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom $n = dim(V)$ verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Anwendung *Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man A^k für beliebige k ausrechnen?*

1. Finde eine Matrix B s.d. $B^{-1}AB$ diagonal ist, also $B^{-1}AB := \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,. Wir haben $B\Lambda B^{-1} = A$.
2. Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1}$

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom $n = dim(V)$ verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Anwendung *Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man A^k für beliebige k ausrechnen?*

1. Finde eine Matrix B s.d. $B^{-1}AB$ diagonal ist, also $B^{-1}AB := \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,. Wir haben $B\Lambda B^{-1} = A$.
2. Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} =$

   $B\Lambda^k B^{-1} =$

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom $n = dim(V)$ verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Anwendung *Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man A^k für beliebige k ausrechnen?*

1. Finde eine Matrix B s.d. $B^{-1}AB$ diagonal ist, also $B^{-1}AB := \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,. Wir haben $B\Lambda B^{-1} = A$.
2. Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} =$

   $B\Lambda^k B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} =$

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom $n = dim(V)$ verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Anwendung *Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man A^k für beliebige k ausrechnen?*

1. Finde eine Matrix B s.d. $B^{-1}AB$ diagonal ist, also $B^{-1}AB := \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,. Wir haben $B\Lambda B^{-1} = A$.
2. Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} =$

   $B\Lambda^k B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$

Bemerkung *Satz 54 und Folgerung enthalten auch die Information, wie man die Basis findet, in welcher die Matrix einer gegebenen Abbildung diagonal ist, falls das charakteristische Polynom $n = dim(V)$ verschiedene Eigenwerte hat: die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.*

Anwendung *Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Wie kann man A^k für beliebige k ausrechnen?*

1. Finde eine Matrix B s.d. $B^{-1}AB$ diagonal ist, also $B^{-1}AB := \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,. Wir haben $B\Lambda B^{-1} = A$.
2. Dann ist $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k\text{mal}} = B\Lambda \underbrace{B^{-1}B}_{Id} \Lambda B^{-1} ... B\Lambda B^{-1} =$

$$B\Lambda^k B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k \cdot B^{-1} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}.$$

Bsp.

Bsp. Die Fibonacci-Folge

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte
$f_0 := 0,\ f_1 := 1$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da,

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden.

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n :=$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n}$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$,

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \binom{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}}$,

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n =$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 =$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen.

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \binom{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar.

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \binom{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_{\pm} := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_{\pm}$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_{\pm} \cdot Id \right)$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichttriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \binom{x}{y} = \binom{0}{0}$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \binom{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \iff$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \binom{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \iff$

$(1 - \lambda_\pm)x + y = 0$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$
$(1 - \lambda_\pm)x + y = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$ $(1-\lambda_\pm)x + y = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm - 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$
$(1 - \lambda_\pm)x + y = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm - 1 \end{pmatrix}$.
Also, die Basisvektoren, s.d. die Abbildung eine diagonale Matrix hat,

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichttriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \iff$ $(1 - \lambda_\pm)x + y = 0 \iff \binom{x}{y} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm - 1 \end{pmatrix}$.
Also, die Basisvektoren, s.d. die Abbildung eine diagonale Matrix hat, sind $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ - 1 \end{pmatrix}$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id \right) \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \iff$
$(1-\lambda_\pm)x + y = 0 \iff \binom{x}{y} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm - 1 \end{pmatrix}$.

Also, die Basisvektoren, s.d. die Abbildung eine diagonale Matrix hat, sind $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ - 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- - 1 \end{pmatrix}$,

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \binom{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \iff$
$(1-\lambda_\pm)x + y = 0 \iff \binom{x}{y} = t \cdot \binom{1}{\lambda_\pm - 1}$.
Also, die Basisvektoren, s.d. die Abbildung eine diagonale Matrix hat, sind $\binom{1}{\lambda_+ - 1}$ und $\binom{1}{\lambda_- - 1}$, und in dieser Basis hat die Abbildung die

Matrix

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$
$(1 - \lambda_\pm)x + y = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm - 1 \end{pmatrix}$.
Also, die Basisvektoren, s.d. die Abbildung eine diagonale Matrix hat, sind $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ - 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- - 1 \end{pmatrix}$, und in dieser Basis hat die Abbildung die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$. Die Matrix B ist

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0,\ f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \binom{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \iff$
$(1-\lambda_\pm)x + y = 0 \iff \binom{x}{y} = t \cdot \binom{1}{\lambda_\pm - 1}$.
Also, die Basisvektoren, s.d. die Abbildung eine diagonale Matrix hat, sind $\binom{1}{\lambda_+ - 1}$ und $\binom{1}{\lambda_- - 1}$, und in dieser Basis hat die Abbildung die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$. Die Matrix B ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ - 1 & \lambda_- - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id \right) \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \iff$
$(1 - \lambda_\pm)x + y = 0 \iff \binom{x}{y} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm - 1 \end{pmatrix}$.

Also, die Basisvektoren, s.d. die Abbildung eine diagonale Matrix hat, sind $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ - 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- - 1 \end{pmatrix}$, und in dieser Basis hat die Abbildung die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$. Die Matrix B ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ - 1 & \lambda_- - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- - 1 & -1 \\ 1 - \lambda_+ & 1 \end{pmatrix}$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$ $(1 - \lambda_\pm)x + y = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm - 1 \end{pmatrix}$.

Also, die Basisvektoren, s.d. die Abbildung eine diagonale Matrix hat, sind $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ - 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- - 1 \end{pmatrix}$, und in dieser Basis hat die Abbildung die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$. Die Matrix B ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ - 1 & \lambda_- - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- - 1 & -1 \\ 1 - \lambda_+ & 1 \end{pmatrix}$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$
$(1-\lambda_\pm)x + y = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm - 1 \end{pmatrix}$.
Also, die Basisvektoren, s.d. die Abbildung eine diagonale Matrix hat, sind $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ - 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- - 1 \end{pmatrix}$, und in dieser Basis hat die Abbildung die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$. Die Matrix B ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ - 1 & \lambda_- - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+}\begin{pmatrix} \lambda_- - 1 & -1 \\ 1 - \lambda_+ & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?
Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$
$(1 - \lambda_\pm)x + y = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm - 1 \end{pmatrix}$.
Also, die Basisvektoren, s.d. die Abbildung eine diagonale Matrix hat, sind $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ - 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- - 1 \end{pmatrix}$, und in dieser Basis hat die Abbildung die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$. Die Matrix B ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ - 1 & \lambda_- - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- - 1 & -1 \\ 1 - \lambda_+ & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Bsp. Die Fibonacci-Folge f_n ist definiert durch zwei Anfangswerte $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Wie sieht eine explizite Formel für diese Folge aus?

Trick: Wir stellen die rekursive Vorschrift in Matrixsprache da, und lösen mit den heute gelernten Methoden. Dazu setze $v_n := \binom{f_{n+1}}{f_n} \in \mathbb{R}^2$, es gilt dann $v_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, also $v_n = A^n v_0 = A^n \binom{1}{0}$

Lass uns jetzt die Matrix A^n ausrechnen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (1-t)(-t) - 1 = t^2 - t - 1$ und sind $\lambda_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Nach Folgerung aus Satz 54 ist die Matrix diagonalisierbar. Ein Eigenvektor zu $\lambda_\pm$ ist eine (nichtriviale) Lösung des linearen Gleichungssystems $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_\pm \cdot Id\right) \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \iff$ $(1-\lambda_\pm)x + y = 0 \iff \binom{x}{y} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm - 1 \end{pmatrix}$.

Also, die Basisvektoren, s.d. die Abbildung eine diagonale Matrix hat, sind $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ - 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- - 1 \end{pmatrix}$, und in dieser Basis hat die Abbildung die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$. Die Matrix B ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ - 1 & \lambda_- - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- - 1 & -1 \\ 1 - \lambda_+ & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Dann ist (s. Anwendung)

Dann ist (s. Anwendung)
$A^k =$

Dann ist (s. Anwendung)

$A^k =$

$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$

Dann ist (s. Anwendung)

$A^k =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Dann ist (s. Anwendung)

$$A^k = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{pmatrix}$$

Dann ist (s. Anwendung)

$$A^k =$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{pmatrix}$$

Dann ist (s. Anwendung)

$A^k =$

$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$

$\left(\begin{matrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{matrix} \right.$

Dann ist (s. Anwendung)

$$A^k =$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k . \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Dann ist (s. Anwendung)

$$A^k =$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k . \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} & * \end{pmatrix}$$

Dann ist (s. Anwendung)

$$A^k = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k . \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} & * \end{pmatrix}$$

Dann ist (s. Anwendung)

$A^k =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k. \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} & * \end{pmatrix}$$

Dann ist (s. Anwendung)

$$A^k = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k . \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} & * \end{pmatrix}$$

Dann ist (s. Anwendung)

$$A^k =$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k . \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} & * \end{pmatrix}$$

Dann ist (s. Anwendung)

$$A^k =$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k . \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} & * \end{pmatrix}$$

Da $\binom{f_{k+1}}{f_k}$

Dann ist (s. Anwendung)

$A^k =$

$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k . \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} & * \end{pmatrix}$$

Da $\binom{f_{k+1}}{f_k} = A^k \binom{1}{0}$,

Dann ist (s. Anwendung)

$A^k =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k . \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} & * \end{pmatrix}$$

Da $\binom{f_{k+1}}{f_k} = A^k \binom{1}{0}$, ist $f_k := \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}$.

Dann ist (s. Anwendung)

$A^k =$

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_+^k & 0 \\ 0 & \lambda_-^k \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k. \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} & * \end{pmatrix}$$

Da $\binom{f_{k+1}}{f_k} = A^k \binom{1}{0}$, ist $f_k := \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}$.

Def. 47

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$,

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp.

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$.

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)
Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)
Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).
Bsp.

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1,

Def. 47 Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} =$

Def. 47 Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48

Def. 47 Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$.*

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$*

Def. 47 Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit*

Def. 47 Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$)*

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Def. 47 Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung.

Def. 47 Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes

Def. 47 Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $\dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $\dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp.

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)
Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).
Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.
Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*
Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.
Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\aleph_A =$

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} =$

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2$,

Def. 47 Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2$, also der einzige Eigenwert ist 1.

Def. 47 Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2$, also der einzige Eigenwert ist 1.

Dessen algebraische Vielfachheit ist 2

Def. 47 Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2$, also der einzige Eigenwert ist 1.

Dessen algebraische Vielfachheit ist 2

Dessen geometrische Vielfachheit

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2$, also der einzige Eigenwert ist 1.

Dessen algebraische Vielfachheit ist 2

Dessen geometrische Vielfachheit ist

$$dim \left(Kern_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \right)$$

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2$, also der einzige Eigenwert ist 1.

Dessen algebraische Vielfachheit ist 2

Dessen geometrische Vielfachheit ist

$$dim\left(Kern_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}\right) \overset{\text{Bsp. Heute}}{=}$$

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\aleph_A = det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2$, also der einzige Eigenwert ist 1.

Dessen algebraische Vielfachheit ist 2

Dessen geometrische Vielfachheit ist

$$dim\left(Kern_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}\right) \overset{\text{Bsp. Heute}}{=} 2 - dim(Bild_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}) =$$

Def. 47 Zerfält $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2$, also der einzige Eigenwert ist 1.

Dessen algebraische Vielfachheit ist 2

Dessen geometrische Vielfachheit ist

$$dim\left(Kern_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}\right) \overset{\text{Bsp. Heute}}{=} 2 - dim(Bild_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}) = 2 - rk\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def. 47 Zerfällt $\aleph_A$ in Linearfaktoren $\aleph_A = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t)$, so heißt für jeden Eigenwert λ von A die Anzahl von i s.d. $\lambda_i = \lambda$ die algebraische Vielfachheit (Bezeichnung: $alg_A(\lambda)$.)

Bsp. Id_n hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist n (da $\aleph_{Id} = (1-t)^n$).

Bsp. Die Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten $1, 2$ von $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ist gleich 1, da $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = t^2 - 3t + 2 = (1-t)(2-t)$.

Def. 48 *A sei die Matrix eines Endomorphismus $f : V \to V$. Dann heißt die Zahl $dim(Eig_\lambda)$ geometrische Vielfachheit (Bez. $geo_A(\lambda)$) (oder auch geometrische Multiplizität des Eigenwerts λ.*

Bemerkung. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes einer Matrix brauchen nicht Übereinzustimmen.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\aleph_A = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2$, also der einzige Eigenwert ist 1.

Dessen algebraische Vielfachheit ist 2

Dessen geometrische Vielfachheit ist

$$dim\left(Kern_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}\right) \overset{\text{Bsp. Heute}}{=} 2 - dim(Bild_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}) = 2 - rk\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Lemma 32

Lemma 32 *Sei* λ *ein Eigenwert*

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:*

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:*
$1 \leq$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:*
$1 \leq geo_A(\lambda) \leq$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis.

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich.

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$.

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ.

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$.

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen,

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$.

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB =$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \Bigg({}^{\lambda \cdot Id_{k,k}}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \left(\begin{matrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ & \end{matrix} \right.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \left(\begin{array}{ll} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \end{array} \right.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} =$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{|ccc} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{array} \right.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} \right.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} \quad * \right.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:*
$1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{array} \right).$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \le geo_A(\lambda) \le alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \le geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \le alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{array} \right).$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich,

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:*
$1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i =$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\,e_i = B^{-1}Ab_i =$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{array} \right).$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1} b_i =$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & \mathrm{C} \end{array} \right).$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1} b_i = \lambda cbe_i$.

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{array} \right).$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\,e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1}b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{array} \right).$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1} b_i = \lambda cbe_i$.
Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \le geo_A(\lambda) \le alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \le geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \le alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1} b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{array}\right).$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1} b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=}$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1} b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB}$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{array} \right).$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\,e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1}b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det\Bigg($$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{array} \right).$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1}b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det \Bigg(\Bigg.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\,e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1}b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det\left(\vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}} \right.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\,e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1}b_i = \lambda cbe_i$.
Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.
Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det\left(\vphantom{\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}} \right.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\,e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1}b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det\left(\boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} \right.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & \mathrm{C} \end{array} \right).$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\,e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1}b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} & * \end{array} \right.$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & \mathrm{C} \end{array} \right).$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1} b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} & * \\ & (C - t \cdot Id) \end{array} \right)$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1}b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} & * \\ & (C - t \cdot Id) \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1}b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} & * \\ & (C - t \cdot Id) \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \le geo_A(\lambda) \le alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \le geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \le alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1} b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} & * \\ & (C - t \cdot Id) \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\,e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1}b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} & * \\ & (C - t \cdot Id) \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & \mathrm{C} \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1}b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} & * \\ & (C - t \cdot Id) \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt: $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.*

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1} b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} & * \\ & (C - t \cdot Id) \end{pmatrix}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1} b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} & * \\ & (C - t \cdot Id) \end{pmatrix} \overset{\text{Nach } k \text{ Laplace-Spaltenentw. Vorl. 15}}{=}$$

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1} b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} & * \\ & (C - t \cdot Id) \end{pmatrix} \overset{\text{Nach } k \text{ Laplace-Spaltenentw. Vorl. 15}}{=}$$

$(\lambda - t)^k det(C - t \cdot Id)$.

Lemma 32 *Sei λ ein Eigenwert einer $(n \times n)$ Matrix A. Dann gilt:* $1 \leq geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$.

Beweis. Die Ungleichung $1 \leq geo_A(\lambda)$ ist offensichtlich. Wir beweisen $geo_A(\lambda) \leq alg_A(\lambda)$. Sei $k = geo_A(\lambda)$. Nehme eine Basis $(b_1, ..., b_k)$ in Eig_λ. Es gilt: $Ab_i = \lambda b_i$. Nach Basisergänzungssatz kann man die Basis bis zu einer Basis in V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(b_1, ..., b_k, ...b_n)$. Betrachte B s.d. $Be_i = b_i$.Es gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda \cdot Id_{k,k} & \boxed{\text{Egal was}} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \boxed{\text{irgendwas}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix}} & * \\ & C \end{array} \right).$$

Tatsächlich, für $i = 1, ..., k$ ist $B^{-1}AB\, e_i = B^{-1}Ab_i = \lambda B^{-1} b_i = \lambda cbe_i$. Also, die $i-$te Spalte von $B^{-1}AB$ ist $\lambda_i e_i$.

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 18}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

$$det \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda - t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - t \end{matrix}} & * \\ & (C - t \cdot Id) \end{array} \right) \overset{\text{Nach } k \text{ Laplace-Spaltenentw. Vorl. 15}}{=}$$

$(\lambda - t)^k det(C - t \cdot Id)$. $\square$

Def. 49

Def. 49

Def. 49 *Seien*

Def. 49 *Seien* $V_1, ..., V_m$

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V.*

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge* $W := \{v_1 + ... + v_m :$

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge* $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i*

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet.*

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)*

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen,

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung:

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$),

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei \ v_i \in V_i \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig**

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Def. 49 *Seien* $V_1, ..., V_m$ *Unterverktorräume von* V*. Die Menge* $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ *heißt die Summe von* V_i *und wird* $V_1 + ... + V_m$ *bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55

Def. 49 *Seien* $V_1, ..., V_m$ *Unterverktorräume von* V. *Die Menge* $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ *heißt die Summe von* V_i *und wird* $V_1 + ... + V_m$ *bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 $n \times n$ *Matrix* A

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$.*

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei \ v_i \in V_i \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt:*

Def. 49 *Seien* $V_1, ..., V_m$ *Unterverktorräume von* V*. Die Menge* $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ *heißt die Summe von* V_i *und wird* $V_1 + ... + V_m$ *bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 $n \times n$ *Matrix* A *habe die Eigenwerte* $\lambda_1, ..., \lambda_m$*. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) A ist diagonalisierbar.

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) A ist diagonalisierbar.

(ii)

Def. 49 *Seien* $V_1, ..., V_m$ *Unterverktorräume von* V*. Die Menge* $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ *heißt die Summe von* V_i *und wird* $V_1 + ... + V_m$ *bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 $n \times n$ *Matrix* A *habe die Eigenwerte* $\lambda_1, ..., \lambda_m$*. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) A *ist diagonalisierbar.*

(ii) $\aleph_A$ *zerfällt in Linearfaktoren*

Def. 49 *Seien $V_1, \ldots, V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + \ldots + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + \ldots + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + \ldots + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) A ist diagonalisierbar.

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) A ist diagonalisierbar.

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) A ist diagonalisierbar.

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.

(iii)

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) A ist diagonalisierbar.

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.

(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\ \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) A ist diagonalisierbar.

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.

(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$

(iv) $V = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$

Def. 49 *Seien $V_1, ..., V_m$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_m : wobei\ v_i \in V_i\}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_m$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_m$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_m$ mit $v_i \in V_i$

Satz 55 *$n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Es gilt: Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) A ist diagonalisierbar.

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.

(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$

(iv) $V = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$

Schema des Beweises: (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$(iii) $\Longrightarrow$(iv) $\Longrightarrow$ (i)

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sei A diagonalisierbar.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Nach Satz 54 gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, ..., b_n)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Nach Satz 54 gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, ..., b_n)$. Ordne die Basis so an,

(i) $\implies$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Nach Satz 54 gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, ..., b_n)$. Ordne die Basis so an, dass $b_1, ..., b_{k_1}$ Eigenvektoren zu λ_1 sind,

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Nach Satz 54 gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, \dots, b_n)$. Ordne die Basis so an, dass $b_1, \dots, b_{k_1}$ Eigenvektoren zu λ_1 sind, $b_{k_1+1}, \dots, b_{k_1+k_2}$ die Eigenvektoren zu λ_2 sind,

(i) $\implies$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Nach Satz 54 gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, ..., b_n)$. Ordne die Basis so an, dass $b_1, ..., b_{k_1}$ Eigenvektoren zu λ_1 sind, $b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2}$ die Eigenvektoren zu λ_2 sind, usw.,

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Nach Satz 54 gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, ..., b_n)$. Ordne die Basis so an, dass $b_1, ..., b_{k_1}$ Eigenvektoren zu λ_1 sind, $b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2}$ die Eigenvektoren zu λ_2 sind, usw., wobei $k_i := geo_A(\lambda_i)$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Nach Satz 54 gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, ..., b_n)$. Ordne die Basis so an, dass $b_1, ..., b_{k_1}$ Eigenvektoren zu λ_1 sind, $b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2}$ die Eigenvektoren zu λ_2 sind, usw., wobei $k_i := geo_A(\lambda_i)$. In Beweis von Satz 54 haben wir gezeigt, dass

$$B^{-1}AB =$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Nach Satz 54 gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, \ldots, b_n)$. Ordne die Basis so an, dass $b_1, \ldots, b_{k_1}$ Eigenvektoren zu λ_1 sind, $b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2}$ die Eigenvektoren zu λ_2 sind, usw., wobei $k_i := geo_A(\lambda_i)$. In Beweis von Satz 54 haben wir gezeigt, dass

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Nach Satz 54 gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, \ldots, b_n)$. Ordne die Basis so an, dass $b_1, \ldots, b_{k_1}$ Eigenvektoren zu λ_1 sind, $b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2}$ die Eigenvektoren zu λ_2 sind, usw., wobei $k_i := geo_A(\lambda_i)$. In Beweis von Satz 54 haben wir gezeigt, dass

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\aleph_A$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Nach Satz 54 gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, \dots, b_n)$. Ordne die Basis so an, dass $b_1, \dots, b_{k_1}$ Eigenvektoren zu λ_1 sind, $b_{k_1+1}, \dots, b_{k_1+k_2}$ die Eigenvektoren zu λ_2 sind, usw., wobei $k_i := geo_A(\lambda_i)$. In Beweis von Satz 54 haben wir gezeigt, dass

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=}$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Nach Satz 54 gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, \ldots, b_n)$. Ordne die Basis so an, dass $b_1, \ldots, b_{k_1}$ Eigenvektoren zu λ_1 sind, $b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2}$ die Eigenvektoren zu λ_2 sind, usw., wobei $k_i := geo_A(\lambda_i)$. In Beweis von Satz 54 haben wir gezeigt, dass

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} =$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Sei A diagonalisierbar. Nach Satz 54 gibt es eine Basis aus Eigenvektoren $(b_1, \ldots, b_n)$. Ordne die Basis so an, dass $b_1, \ldots, b_{k_1}$ Eigenvektoren zu λ_1 sind, $b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2}$ die Eigenvektoren zu λ_2 sind, usw., wobei $k_i := geo_A(\lambda_i)$. In Beweis von Satz 54 haben wir gezeigt, dass

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Dann ist $\aleph_A \overset{\text{Satz 51}}{=} \aleph_{B^{-1}AB} = (\lambda_1 - t)^{k_1}(\lambda_2 - t)^{k_2} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$,

(ii) $\implies$ (iii)

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$

Nun zerfalle $\aleph_A$ in Linearfaktoren,

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$

Nun zerfalle $\aleph_A$ in Linearfaktoren, d.h.
$\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}(\lambda_2 - t)^{k_2}...(\lambda_m - t)^{k_m}$,

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$

Nun zerfalle $\aleph_A$ in Linearfaktoren, d.h.
$\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}(\lambda_2 - t)^{k_2}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, und es gelte
$geo_A(\lambda_i) = alg_A(\lambda_i) = k_i$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$

Nun zerfalle $\aleph_A$ in Linearfaktoren, d.h.
$\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}(\lambda_2 - t)^{k_2}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, und es gelte
$geo_A(\lambda_i) = alg_A(\lambda_i) = k_i$ für alle λ_i.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$

Nun zerfalle $\aleph_A$ in Linearfaktoren, d.h.
$\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}(\lambda_2 - t)^{k_2}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, und es gelte $geo_A(\lambda_i) = alg_A(\lambda_i) = k_i$ für alle λ_i. Dann ist
$n \overset{\text{Lemma 10}}{=} k_1 + ... + k_m = geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

(ii) $\aleph_A$ zerfällt in Linearfaktoren und $alg_A(\lambda_i) = geo_A(\lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$.
(iii) $geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m) = n$

Nun zerfalle $\aleph_A$ in Linearfaktoren, d.h.
$\aleph_A = (\lambda_1 - t)^{k_1}(\lambda_2 - t)^{k_2}...(\lambda_m - t)^{k_m}$, und es gelte
$geo_A(\lambda_i) = alg_A(\lambda_i) = k_i$ für alle λ_i. Dann ist
$n \overset{\text{Lemma 10}}{=} k_1 + ... + k_m = geo_A(\lambda_1) + ... + geo_A(\lambda_m)$.

(iii) $\implies$ (iv) $\implies$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage:

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$
Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v'_1 + ... + v'_m$, so ist $\underbrace{v_1 - v'_1}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v'_m}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also $v_i = v'_i$. $\square$

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. □

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$
Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes

w

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$
Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=}$

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$
Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$
Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$
$\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i +$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes

$$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + \ldots + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=} \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + \ldots + \sum_{i=k_1+\ldots+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes $w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=} \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$
Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$
$\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$
Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=} \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes $w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + \ldots + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=} \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + \ldots + \sum_{i=k_1+\ldots+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$
Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + \ldots + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$
$\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + \ldots + \sum_{i=k_1+\ldots+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$
Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$
$\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$, ist $W = V$,

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.

Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.

Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also $v_i = v_i'$. $\square$

Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes $w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=} \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$, ist $W = V$, und $(b_1, ..., b_n)$ ist deswegen eine Basis in V.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$
Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$
$\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$, ist $W = V$, und $(b_1, ..., b_n)$ ist deswegen eine Basis in V. Da jedes b_i ein Eigenvektor ist,

(iii) $\implies$ (iv) $\implies$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + \ldots + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + \ldots + v_m = v_1' + \ldots + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$

Seien $(b_1, \ldots, b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + \ldots + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=} \sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + \ldots + \sum_{i=k_1+\ldots+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$, ist $W = V$, und $(b_1, \ldots, b_n)$ ist deswegen eine Basis in V. Da jedes b_i ein Eigenvektor ist, ist A nach Satz 54 diagonalisierbar.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)

Setze $W := Eig_{\lambda_1} + ... + Eig_{\lambda_m}$.
Hilfsaussage: $W = Eig_{\lambda_1} \oplus ... \oplus Eig_{\lambda_m}$.
Beweis. Ist $v_1 + ... + v_m = v_1' + ... + v_m'$, so ist
$\underbrace{v_1 - v_1'}_{u_1 \in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_m - v_m'}_{u_m \in Eig_{\lambda_m}} = \vec{0}$. Nach Satz 53 sind $u_i = 0$, also
$v_i = v_i'$. $\square$
Seien $(b_1, ..., b_{k_1})$, $(b_{k_1+1}, ..., b_{k_1+k_2})$, usw. die Basen von Eig_{λ_1}, Eig_{λ_2}, usw. Dann ist deren Vereinigung $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Tatsächlich, jedes
$w \overset{\text{Eindeutig nach Hilfsaussage}}{=} v_1 + ... + v_m \overset{\text{Eindeutig nach Satz 25b}}{=}$
$\sum_{i=1}^{k_1} \mu_i b_i + ... + \sum_{i=k_1+...+k_{m-1}+1}^{n} \mu_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Nach Satz 25b ist $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in W. Dann ist $dim(W) = n$. Da $dim(V) = n$, ist $W = V$, und $(b_1, ..., b_n)$ ist deswegen eine Basis in V. Da jedes b_i ein Eigenvektor ist, ist A nach Satz 54 diagonalisierbar. $\square$