Hausaufgabenblatt 10 ist in CAJ ein bißchen versteckt: es steht zwischen Blatt 1 und Blatt 2

Wiederholung

Frage. Gegeben ein lineares Gleichungssystem, wie kann man verstehen, ob das System lösbar ist?

Wiederholung

Frage. Gegeben ein lineares Gleichungssystem, wie kann man verstehen, ob das System lösbar ist? Und wie gross der Raum der Lösungen ist?

Wiederholung

Frage. Gegeben ein lineares Gleichungssystem, wie kann man verstehen, ob das System lösbar ist? Und wie gross der Raum der Lösungen ist?

Def. 39 — Lemma 28 Spaltenrank $rk_s(A)$ ist Dimension von

$$\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right) \text{ (in } \mathbb{K}^m \equiv Mat(m,1))$$

Wiederholung

Frage. Gegeben ein lineares Gleichungssystem, wie kann man verstehen, ob das System lösbar ist? Und wie gross der Raum der Lösungen ist?

Def. 39 — Lemma 28 Spaltenrank $rk_s(A)$ ist Dimension von

span $\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ (in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$) und von $Bild_{f_A}$.

Satz 47

(a) **(Lösbarkeitskriterium)**

Wiederholung

Frage. Gegeben ein lineares Gleichungssystem, wie kann man verstehen, ob das System lösbar ist? Und wie gross der Raum der Lösungen ist?

Def. 39 — Lemma 28 Spaltenrank $rk_s(A)$ ist Dimension von

span $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\} \right)$ (in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m,1)$) und von $Bild_{f_A}$.

Satz 47

(a) **(Lösbarkeitskriterium)**

Das System $Ax = b$ (wobei $A \in Mat(m,n,\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$) ist lösbar $\iff rk_s(A) = rk_s(A,b)$.

Wiederholung

Frage. Gegeben ein lineares Gleichungssystem, wie kann man verstehen, ob das System lösbar ist? Und wie gross der Raum der Lösungen ist?

Def. 39 — Lemma 28 Spaltenrank $rk_s(A)$ ist Dimension von

$$\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$$

(in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$) und von $Bild_{f_A}$.

Satz 47

(a) **(Lösbarkeitskriterium)**

Das System $Ax = b$ (wobei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$) ist lösbar $\iff rk_s(A) = rk_s(A, b)$.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist}$$

Wiederholung

Frage. Gegeben ein lineares Gleichungssystem, wie kann man verstehen, ob das System lösbar ist? Und wie gross der Raum der Lösungen ist?

Def. 39 — Lemma 28 Spaltenrank $rk_s(A)$ ist Dimension von $\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ (in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$) und von $Bild_{f_A}$.

Satz 47

(a) **(Lösbarkeitskriterium)**

Das System $Ax = b$ (wobei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$) ist lösbar $\Longleftrightarrow rk_s(A) = rk_s(A, b)$.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist und } v \in Kern_{f_A}\}.$$

Bemerkung. Nach 1te Dimensionsformel ist $dim(Kern_{f_A}) = m - dim(Bild_{f_A})$.

Wiederholung

Frage. Gegeben ein lineares Gleichungssystem, wie kann man verstehen, ob das System lösbar ist? Und wie gross der Raum der Lösungen ist?

Def. 39 — Lemma 28 Spaltenrank $rk_s(A)$ ist Dimension von $\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$ (in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m,1)$) und von $Bild_{f_A}$.

Satz 47

(a) **(Lösbarkeitskriterium)**

Das System $Ax = b$ (wobei $A \in Mat(m,n,\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$) ist lösbar $\iff rk_s(A) = rk_s(A,b)$.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist und } v \in Kern_{f_A}\}.$$

Bemerkung. Nach 1te Dimensionsformel ist $dim(Kern_{f_A}) = m - dim(Bild_{f_A})$.

Wiederholung

Frage. Gegeben ein lineares Gleichungssystem, wie kann man verstehen, ob das System lösbar ist? Und wie gross der Raum der Lösungen ist?

Def. 39 — Lemma 28 Spaltenrank $rk_s(A)$ ist Dimension von span $\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ (in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$) und von $Bild_{f_A}$.

Satz 47

(a) **(Lösbarkeitskriterium)**

Das System $Ax = b$ (wobei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$) ist lösbar $\iff rk_s(A) = rk_s(A, b)$.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist und } v \in Kern_{f_A}\}.$$

Bemerkung. Nach 1te Dimensionsformel ist $dim(Kern_{f_A}) = m - dim(Bild_{f_A})$.

Wiederholung

Frage. Gegeben ein lineares Gleichungssystem, wie kann man verstehen, ob das System lösbar ist? Und wie gross der Raum der Lösungen ist?

Def. 39 — Lemma 28 Spaltenrank $rk_s(A)$ ist Dimension von span$\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ (in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m,1)$) und von $Bild_{f_A}$.

Satz 47

(a) **(Lösbarkeitskriterium)**

Das System $Ax = b$ (wobei $A \in Mat(m,n,\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$) ist lösbar $\iff rk_s(A) = rk_s(A,b)$.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist und } v \in Kern_{f_A}\}.$$

Bemerkung. Nach 1te Dimensionsformel ist $dim(Kern_{f_A}) = m - dim(Bild_{f_A})$.

Wiederholung

Frage. Gegeben ein lineares Gleichungssystem, wie kann man verstehen, ob das System lösbar ist? Und wie gross der Raum der Lösungen ist?

Def. 39 — Lemma 28 Spaltenrank $rk_s(A)$ ist Dimension von span $\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ (in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$) und von $Bild_{f_A}$.

Satz 47

(a) **(Lösbarkeitskriterium)**

Das System $Ax = b$ (wobei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$) ist lösbar $\Longleftrightarrow rk_s(A) = rk_s(A, b)$.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist und } v \in Kern_{f_A}\}.$$

Bemerkung. Nach 1te Dimensionsformel ist $dim(Kern_{f_A}) = m - dim(Bild_{f_A})$.Also, um beide Fragen zu beantworten,

Wiederholung

Frage. Gegeben ein lineares Gleichungssystem, wie kann man verstehen, ob das System lösbar ist? Und wie gross der Raum der Lösungen ist?

Def. 39 — Lemma 28 Spaltenrank $rk_s(A)$ ist Dimension von

span $\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ (in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$) und von $Bild_{f_A}$.

Satz 47

(a) **(Lösbarkeitskriterium)**

Das System $Ax = b$ (wobei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$) ist lösbar $\iff rk_s(A) = rk_s(A, b)$.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist und } v \in Kern_{f_A}\}.$$

Bemerkung. Nach 1te Dimensionsformel ist $dim(Kern_{f_A}) = m - dim(Bild_{f_A})$.Also, um beide Fragen zu beantworten,bracht man nach Satz 47 nur den Spaltenrang von zwei Matrizen A, (A, b) zu bestimmen.

Satz 49 – Definition 41

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$.*

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$. Diese Zahl werden wir Rang von A nennen und $rk(A)$ bezeichnen.*

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$. Diese Zahl werden wir Rang von A nennen und $rk(A)$ bezeichnen.*

Idee des Beweis:

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$. Diese Zahl werden wir Rang von A nennen und $rk(A)$ bezeichnen.*
Idee des Beweis: Wir zeigen, dass man jede Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto BAC$,

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$. Diese Zahl werden wir Rang von A nennen und $rk(A)$ bezeichnen.*
Idee des Beweis: Wir zeigen, dass man jede Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto BAC$, wobei B, C nichtausgeartet sind,

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$. Diese Zahl werden wir Rang von A nennen und $rk(A)$ bezeichnen.*
Idee des Beweis: Wir zeigen, dass man jede Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto BAC$, wobei B, C nichtausgeartet sind, in die Form

$$\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$$

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$. Diese Zahl werden wir* *Rang* *von A nennen und $rk(A)$ bezeichnen.*

Idee des Beweis: Wir zeigen, dass man jede Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto BAC$, wobei B, C nichtausgeartet sind, in die Form

$$\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{k -te Zeile} \\ \\ \end{array}$$

bringen kann.

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$. Diese Zahl werden wir Rang von A nennen und $rk(A)$ bezeichnen.*

Idee des Beweis: Wir zeigen, dass man jede Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto BAC$, wobei B, C nichtausgeartet sind, in die Form

$$\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{k -te Zeile} \\ \\ \end{array}$$

bringen kann. und Da diese Transformation weder Spaltenrang (Folg. D aus Satz 47)

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$. Diese Zahl werden wir Rang von A nennen und $rk(A)$ bezeichnen.*

Idee des Beweis: Wir zeigen, dass man jede Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto BAC$, wobei B, C nichtausgeartet sind, in die Form

$$\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & \\ & & & & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{k -te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

bringen kann. und Da diese Transformation weder Spaltenrang (Folg. D aus Satz 47) noch Zeilenrang (Folg. B aus Lemma 28) ändert,

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$. Diese Zahl werden wir* Rang *von A nennen und $rk(A)$ bezeichnen.*

Idee des Beweis: Wir zeigen, dass man jede Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto BAC$, wobei B, C nichtausgeartet sind, in die Form

$$\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{k -te Zeile} \\ \\ \end{array}$$

bringen kann. und Da diese Transformation weder Spaltenrang (Folg. D aus Satz 47) noch Zeilenrang (Folg. B aus Lemma 28) ändert,

und da $rk_s \begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$. Diese Zahl werden wir Rang von A nennen und $rk(A)$ bezeichnen.*

Idee des Beweis: Wir zeigen, dass man jede Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto BAC$, wobei B, C nichtausgeartet sind, in die Form

$$\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{k -te Zeile} \\ \\ \end{array}$$

bringen kann. und Da diese Transformation weder Spaltenrang (Folg. D aus Satz 47) noch Zeilenrang (Folg. B aus Lemma 28) ändert,

und da $rk_s \begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = rk_z \begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$. Diese Zahl werden wir Rang von A nennen und $rk(A)$ bezeichnen.*

Idee des Beweis: Wir zeigen, dass man jede Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto BAC$, wobei B, C nichtausgeartet sind, in die Form

$$\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{k -te Zeile} \\ \\ \end{array}$$

bringen kann. und Da diese Transformation weder Spaltenrang (Folg. D aus Satz 47) noch Zeilenrang (Folg. B aus Lemma 28) ändert,

und da $rk_s \begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = rk_z \begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = k$,

Satz 49 – Definition 41 *Für jede Matrix A ist $rk_z(A) = rk_s(A)$. Diese Zahl werden wir Rang von A nennen und $rk(A)$ bezeichnen.*

Idee des Beweis: Wir zeigen, dass man jede Matrix A mit Hilfe der Transformation $A \mapsto BAC$, wobei B, C nichtausgeartet sind, in die Form

$$\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & \end{array}\right) \longleftarrow \text{k -te Zeile}$$

bringen kann. und Da diese Transformation weder Spaltenrang (Folg. D aus Satz 47) noch Zeilenrang (Folg. B aus Lemma 28) ändert,

und da $rk_s \begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = rk_z \begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = k$, ist $rk_s(A) = rk_z(A)$.

Beweis.

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$.

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$.

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$,

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$.

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging:

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$,

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$.

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$.

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$. Ist ein $\lambda_i \neq 0$,

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$. Ist ein $\lambda_i \neq 0$, so ist die Darstellung des Vektors $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ als Linearkombination der Elementen aus der Basis $(v_1, ..., v_m)$

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$. Ist ein $\lambda_i \neq 0$, so ist die Darstellung des Vektors $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ als Linearkombination der Elementen aus der Basis $(v_1, ..., v_m)$ nicht eindeutig, was Satz 25b widerspricht.

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$. Ist ein $\lambda_i \neq 0$, so ist die Darstellung des Vektors $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ als Linearkombination der Elementen aus der Basis $(v_1, ..., v_m)$ nicht eindeutig, was Satz 25b widerspricht.
Dann kann man die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\}$ bis zu einer Basis ergänzen:

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$. Ist ein $\lambda_i \neq 0$, so ist die Darstellung des Vektors $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ als Linearkombination der Elementen aus der Basis $(v_1, ..., v_m)$ nicht eindeutig, was Satz 25b widerspricht.
Dann kann man die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\}$ bis zu einer Basis ergänzen: $(\underbrace{f(v_1)}_{u_1}, ..., \underbrace{f(v_k)}_{u_k},$

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$. Ist ein $\lambda_i \neq 0$, so ist die Darstellung des Vektors $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ als Linearkombination der Elementen aus der Basis $(v_1, ..., v_m)$ nicht eindeutig, was Satz 25b widerspricht.
Dann kann man die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\}$ bis zu einer Basis ergänzen: $(\underbrace{f(v_1)}_{u_1}, ..., \underbrace{f(v_k)}_{u_k}, u_{k+1}, ..., u_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}^n$.
Die Darstellungmatrix der f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$ und $(u_1, ..., v_n)$ ist

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$. Ist ein $\lambda_i \neq 0$, so ist die Darstellung des Vektors $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ als Linearkombination der Elementen aus der Basis $(v_1, ..., v_m)$ nicht eindeutig, was Satz 25b widerspricht.
Dann kann man die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\}$ bis zu einer Basis ergänzen: $(\underbrace{f(v_1)}_{u_1}, ..., \underbrace{f(v_k)}_{u_k}, u_{k+1}, ..., u_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}^n$.
Die Darstellungmatrix der f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$ und $(u_1, ..., v_n)$ ist

$$\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$$

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$. Ist ein $\lambda_i \neq 0$, so ist die Darstellung des Vektors $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ als Linearkombination der Elementen aus der Basis $(v_1, ..., v_m)$ nicht eindeutig, was Satz 25b widerspricht.
Dann kann man die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\}$ bis zu einer Basis ergänzen: $(\underbrace{f(v_1)}_{u_1}, ..., \underbrace{f(v_k)}_{u_k}, u_{k+1}, ..., u_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}^n$.
Die Darstellungmatrix der f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$ und $(u_1, ..., v_n)$ ist $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (weil der Koordinatenvektor von $f(v_i)$ in der Basis sind e_i für $i \leq k$ und $\vec{0}$ für $i > k$).

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$. Ist ein $\lambda_i \neq 0$, so ist die Darstellung des Vektors $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ als Linearkombination der Elementen aus der Basis $(v_1, ..., v_m)$ nicht eindeutig, was Satz 25b widerspricht.
Dann kann man die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\}$ bis zu einer Basis ergänzen: $(\underbrace{f(v_1)}_{u_1}, ..., \underbrace{f(v_k)}_{u_k}, u_{k+1}, ..., u_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}^n$.
Die Darstellungmatrix der f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$ und $(u_1, ..., v_n)$ ist $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (weil der Koordinatenvektor von $f(v_i)$ in der Basis sind e_i für $i \leq k$ und $\vec{0}$ für $i > k$).
Dann ist $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = T_U^{-1} A T_V$,

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$. Ist ein $\lambda_i \neq 0$, so ist die Darstellung des Vektors $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ als Linearkombination der Elementen aus der Basis $(v_1, ..., v_m)$ nicht eindeutig, was Satz 25b widerspricht.
Dann kann man die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\}$ bis zu einer Basis ergänzen: $(\underbrace{f(v_1)}_{u_1}, ..., \underbrace{f(v_k)}_{u_k}, u_{k+1}, ..., u_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}^n$.
Die Darstellungmatrix der f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$ und $(u_1, ..., v_n)$ ist $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (weil der Koordinatenvektor von $f(v_i)$ in der Basis sind e_i für $i \leq k$ und $\vec{0}$ für $i > k$).
Dann ist $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = T_U^{-1} A T_V$,folglich
$rk_s(T_U^{-1} A T_V) = rk_z(T_U^{-1} A T_V) = k$,

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$. Ist ein $\lambda_i \neq 0$, so ist die Darstellung des Vektors $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ als Linearkombination der Elementen aus der Basis $(v_1, ..., v_m)$ nicht eindeutig, was Satz 25b widerspricht.
Dann kann man die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\}$ bis zu einer Basis ergänzen: $(\underbrace{f(v_1)}_{u_1}, ..., \underbrace{f(v_k)}_{u_k}, u_{k+1}, ..., u_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}^n$.
Die Darstellungmatrix der f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$ und $(u_1, ..., v_n)$ ist $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (weil der Koordinatenvektor von $f(v_i)$ in der Basis sind e_i für $i \leq k$ und $\vec{0}$ für $i > k$).
Dann ist $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = T_U^{-1} A T_V$,folglich $rk_s(T_U^{-1} A T_V) = rk_z(T_U^{-1} A T_V) = k$, und deswegen ist nach Folgerung D aus Satz 47 und nach Folgerung B aus Lemma 28 $rk_s(A) = rk_z(A) = k$,

Beweis. f_A ist die lineare Abbildung von $\mathbb{K}^m$ nach $\mathbb{K}^n$. Sei $r = dim(Kern_f)$ und $k = m - r$. Wir nehmen eine Basis $(v_{k+1}, ..., v_m)$ in $Kern_f$, und ergänzen sie bis zu einer Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m)$ in $\mathbb{K}^m$. Dann ist die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\} \subseteq \mathbb{K}^n$ linear unabhänging: in der Tat, ist $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_k f(v_k) = \vec{0}$, so ist $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k) = \vec{0}$. Dann ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \in Kern_f$. Ist ein $\lambda_i \neq 0$, so ist die Darstellung des Vektors $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ als Linearkombination der Elementen aus der Basis $(v_1, ..., v_m)$ nicht eindeutig, was Satz 25b widerspricht.
Dann kann man die Menge $\{f(v_1), ..., f(v_k)\}$ bis zu einer Basis ergänzen: $(\underbrace{f(v_1)}_{u_1}, ..., \underbrace{f(v_k)}_{u_k}, u_{k+1}, ..., u_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}^n$.
Die Darstellungmatrix der f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$ und $(u_1, ..., v_n)$ ist $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (weil der Koordinatenvektor von $f(v_i)$ in der Basis sind e_i für $i \leq k$ und $\vec{0}$ für $i > k$).
Dann ist $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix} = T_U^{-1} A T_V$,folglich $rk_s(T_U^{-1} A T_V) = rk_z(T_U^{-1} A T_V) = k$, und deswegen ist nach Folgerung D aus Satz 47 und nach Folgerung B aus Lemma 28
$rk_s(A) = rk_z(A) = k$, $\square$

Wichtige Bemerkung

Wichtige Bemerkung

Im Beweis von Satz 49 haben wir gezeigt,

Wichtige Bemerkung

Im Beweis von Satz 49 haben wir gezeigt, dass für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ (wobei V und U endlichdimensional sind)

Wichtige Bemerkung

Im Beweis von Satz 49 haben wir gezeigt, dass für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ (wobei V und U endlichdimensional sind) die darstellende Matrix in einer Basis die folgende Form hat

Wichtige Bemerkung

Im Beweis von Satz 49 haben wir gezeigt, dass für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ (wobei V und U endlichdimensional sind) die darstellende Matrix in einer Basis die folgende Form hat

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & \\ \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{k -te Zeile} \\ \\ \end{array} \end{array} .$$

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen*

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*
Beweis.

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*
Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix,

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*

Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48).

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*

Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*
Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*
Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen).

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*
Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen). □

Erste Methode, den Spaltenrang auszurechnen:

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*
Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen). □

Erste Methode, den Spaltenrang auszurechnen: Sei A eine $m \times n$ Matrix.

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*

Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen). □

Erste Methode, den Spaltenrang auszurechnen: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Wir bringen mit Hilfe von elementaren Zeilen und Spaltenumformungen die Matrix A in die Form $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*

Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen). □

Erste Methode, den Spaltenrang auszurechnen: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Wir bringen mit Hilfe von elementaren Zeilen und Spaltenumformungen die Matrix A in die Form $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (Gauss-Algorithmus).

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*
Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen). $\square$

Erste Methode, den Spaltenrang auszurechnen: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Wir bringen mit Hilfe von elementaren Zeilen und Spaltenumformungen die Matrix A in die Form $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (Gauss-Algorithmus). Dann ist $rk(A) = k$.

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*
Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen). $\square$

Erste Methode, den Spaltenrang auszurechnen: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Wir bringen mit Hilfe von elementaren Zeilen und Spaltenumformungen die Matrix A in die Form $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (Gauss-Algorithmus). Dann ist $rk(A) = k$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*

Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen). $\square$

Erste Methode, den Spaltenrang auszurechnen: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Wir bringen mit Hilfe von elementaren Zeilen und Spaltenumformungen die Matrix A in die Form $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (Gauss-Algorithmus). Dann ist $rk(A) = k$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*

Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen). □

Erste Methode, den Spaltenrang auszurechnen: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Wir bringen mit Hilfe von elementaren Zeilen und Spaltenumformungen die Matrix A in die Form $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (Gauss-Algorithmus). Dann ist $rk(A) = k$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*

Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen). $\square$

Erste Methode, den Spaltenrang auszurechnen: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Wir bringen mit Hilfe von elementaren Zeilen und Spaltenumformungen die Matrix A in die Form $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (Gauss-Algorithmus). Dann ist $rk(A) = k$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*
Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen). $\square$

Erste Methode, den Spaltenrang auszurechnen: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Wir bringen mit Hilfe von elementaren Zeilen und Spaltenumformungen die Matrix A in die Form $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (Gauss-Algorithmus). Dann ist $rk(A) = k$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*

Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen). □

Erste Methode, den Spaltenrang auszurechnen: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Wir bringen mit Hilfe von elementaren Zeilen und Spaltenumformungen die Matrix A in die Form $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (Gauss-Algorithmus). Dann ist $rk(A) = k$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie kann man den Rang ausrechnen?

Lemma 29 *Elementare Zeilen- und Spaltenumformulgen ändern Zeilenrang und Spaltenrang nicht.*

Beweis. Elementare Zeilenumformungen sind dasselbe wie Multiplizieren von links mit einer Elementarmatrix, nach ändert dies weder Spalten- (Folgerung B aus Lemma 28) noch Zeilenrang (Folgerung D aus Satz 48). Multiplizieren von rechts mit einer Elementarmatrix is dasselbe wie elementare Spaltenumformung (Nachrechnen). □

Erste Methode, den Spaltenrang auszurechnen: Sei A eine $m \times n$ Matrix. Wir bringen mit Hilfe von elementaren Zeilen und Spaltenumformungen die Matrix A in die Form $\begin{pmatrix} Id_{k,k} & \mathbf{0}_{k,p} \\ \mathbf{0}_{r,k} & \mathbf{0}_{r,p} \end{pmatrix}$ (Gauss-Algorithmus). Dann ist $rk(A) = k$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Methode, den Rang auszurechnen

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$,

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$.

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$. Dann die zu $i_1, ..., i_{m'}$,

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$. Dann die zu $i_1, ..., i_{m'}, j_1, ..., j_{n'}$

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$. Dann die zu $i_1, ..., i_{m'}, j_1, ..., j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$. Dann die zu $i_1, ..., i_{m'}, j_1, ..., j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix,

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < \dots < i_{m'} \in \{1, \dots, m\}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_{n'} \in \{1, \dots, n\}$. Dann die zu $i_1, \dots, i_{m'}, j_1, \dots, j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix, deren $(p, q)-$Eintrag ist gleich $a_{i_p j_q}$.

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$. Dann die zu $i_1, ..., i_{m'}, j_1, ..., j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix, deren $(p, q)-$Eintrag ist gleich $a_{i_p j_q}$.

Bsp.

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$. Dann die zu $i_1, ..., i_{m'}, j_1, ..., j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix, deren $(p, q)-$Eintrag ist gleich $a_{i_p j_q}$.

Bsp. A$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $j_1 = 2$, $j_2 = 4$.

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < \dots < i_{m'} \in \{1, \dots, m\}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_{n'} \in \{1, \dots, n\}$. Dann die zu $i_1, \dots, i_{m'}, j_1, \dots, j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix, deren $(p, q)-$Eintrag ist gleich $a_{i_p j_q}$.

Bsp. A$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $j_1 = 2$, $j_2 = 4$. Dann die zugehörige Untermatrix ist die (2×2)- Matrix

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < \dots < i_{m'} \in \{1, \dots, m\}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_{n'} \in \{1, \dots, n\}$. Dann die zu $i_1, \dots, i_{m'}, j_1, \dots, j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix, deren $(p, q)-$Eintrag ist gleich $a_{i_p j_q}$.

Bsp. A$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $j_1 = 2$, $j_2 = 4$. Dann die zugehörige Untermatrix ist die (2×2)- Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

Satz 50

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$. Dann die zu $i_1, ..., i_{m'}, j_1, ..., j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix, deren $(p, q)-$Eintrag ist gleich $a_{i_p j_q}$.

Bsp. A$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $j_1 = 2$, $j_2 = 4$. Dann die zugehörige Untermatrix ist die (2×2)- Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$. Dann die zu $i_1, ..., i_{m'}, j_1, ..., j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix, deren $(p, q)-$Eintrag ist gleich $a_{i_p j_q}$.

Bsp. A$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $j_1 = 2$, $j_2 = 4$. Dann die zugehörige Untermatrix ist die (2×2)- Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Bsp. Im Beispiel oben,

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$. Dann die zu $i_1, ..., i_{m'}, j_1, ..., j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix, deren $(p, q)-$Eintrag ist gleich $a_{i_p j_q}$.

Bsp. A$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $j_1 = 2$, $j_2 = 4$. Dann die zugehörige Untermatrix ist die (2×2)- Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Bsp. Im Beispiel oben, ist $rk(A) = 2$

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < \dots < i_{m'} \in \{1, \dots, m\}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_{n'} \in \{1, \dots, n\}$. Dann die zu $i_1, \dots, i_{m'}, j_1, \dots, j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix, deren $(p, q)-$Eintrag ist gleich $a_{i_p j_q}$.

Bsp. A$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $j_1 = 2$, $j_2 = 4$. Dann die zugehörige Untermatrix ist die (2×2)- Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Bsp. Im Beispiel oben, ist $rk(A) = 2$ (weil höchstens zwei Zeilen linear unabhängig sind).

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$. Dann die zu $i_1, ..., i_{m'}, j_1, ..., j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix, deren $(p, q)-$Eintrag ist gleich $a_{i_p j_q}$.

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $j_1 = 2$, $j_2 = 4$. Dann die zugehörige Untermatrix ist die (2×2)- Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Bsp. Im Beispiel oben, ist $rk(A) = 2$ (weil höchstens zwei Zeilen linear unabhängig sind). Die rote Untermatrix hat $det \neq 0$.

2. Methode, den Rang auszurechnen

Man betrachte eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien $i_1 < i_2 < ... < i_{m'} \in \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_{n'} \in \{1, ..., n\}$. Dann die zu $i_1, ..., i_{m'}$, $j_1, ..., j_{n'}$ zugeordnete Untermatrix von A ist die $(m' \times n')$ Matrix, deren $(p, q)-$Eintrag ist gleich $a_{i_p j_q}$.

Bsp. A$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $j_1 = 2$, $j_2 = 4$. Dann die zugehörige Untermatrix ist die (2×2)- Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Bsp. Im Beispiel oben, ist $rk(A) = 2$ (weil höchstens zwei Zeilen linear unabhängig sind). Die rote Untermatrix hat $det \neq 0$. Es gibt keine grössere (der Dimension > 2) Untermatrix mit $det \neq 0$.

Anwendung für Ana II

Anwendung für Ana II

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II).

Anwendung für Ana II

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen

Anwendung für Ana II

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x.

Anwendung für Ana II

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0,

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$

Anwendung für Ana II

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist,

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist, gilt $rk(A) \geq k$.

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist, gilt $rk(A) \geq k$.

Beweis.

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist, gilt $rk(A) \geq k$.

Beweis. Man betrachte $i_1, ..., i_k$ und $j_1, ..., j_k$

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist, gilt $rk(A) \geq k$.

Beweis. Man betrachte $i_1, ..., i_k$ und $j_1, ..., j_k$ sodass die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x_0)$ nicht 0 ist.

Anwendung für Ana II

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist, gilt $rk(A) \geq k$.

Beweis. Man betrachte $i_1, ..., i_k$ und $j_1, ..., j_k$ sodass die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x_0)$ nicht 0 ist. Die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x)$

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist, gilt $rk(A) \geq k$.
Beweis. Man betrachte $i_1, ..., i_k$ und $j_1, ..., j_k$ sodass die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x_0)$ nicht 0 ist. Die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x)$ ist eine stetige Funktion in x

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist, gilt $rk(A) \geq k$.

Beweis. Man betrachte $i_1, ..., i_k$ und $j_1, ..., j_k$ sodass die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x_0)$ nicht 0 ist. Die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x)$ ist eine stetige Funktion in x (weil sie mit Leibnitz-Formel gegeben ist;

Anwendung für Ana II

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist, gilt $rk(A) \geq k$.
Beweis. Man betrachte $i_1, ..., i_k$ und $j_1, ..., j_k$ sodass die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x_0)$ nicht 0 ist. Die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x)$ ist eine stetige Funktion in x (weil sie mit Leibnitz-Formel gegeben ist; Leibnitz-Formel benuztz nur die Addition und Multiplikation;

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist, gilt $rk(A) \geq k$.

Beweis. Man betrachte $i_1, ..., i_k$ und $j_1, ..., j_k$ sodass die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x_0)$ nicht 0 ist. Die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x)$ ist eine stetige Funktion in x (weil sie mit Leibnitz-Formel gegeben ist; Leibnitz-Formel benuztz nur die Addition und Multiplikation; Addition und Multiplikation von stetigen Funktionen ist auch stetig).

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist, gilt $rk(A) \geq k$.

Beweis. Man betrachte $i_1, ..., i_k$ und $j_1, ..., j_k$ sodass die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x_0)$ nicht 0 ist. Die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x)$ ist eine stetige Funktion in x (weil sie mit Leibnitz-Formel gegeben ist; Leibnitz-Formel benuztz nur die Addition und Multiplikation; Addition und Multiplikation von stetigen Funktionen ist auch stetig). Dann gibt gibt es eine $\varepsilon > 0$,

Anwendung für Ana II

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist, gilt $rk(A) \geq k$.

Beweis. Man betrachte $i_1, ..., i_k$ und $j_1, ..., j_k$ sodass die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x_0)$ nicht 0 ist. Die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x)$ ist eine stetige Funktion in x (weil sie mit Leibnitz-Formel gegeben ist; Leibnitz-Formel benuztz nur die Addition und Multiplikation; Addition und Multiplikation von stetigen Funktionen ist auch stetig). Dann gibt gibt es eine $\varepsilon > 0$, sodass für $|x - x_0| < \varepsilon$ ist die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x)$ genügend nah zur Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x_0)$

Satz 50 Rang der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Folgerung (für Analysis II). Angenommen, die Eintrage einer Matrix $A = A(x)$ sind stetige (reell- oder komplexwertige) Funktionen von x. Ist $rk(A(x_0)) = k$ für einen Punkt x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ sodass für jedes x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ ist, gilt $rk(A) \geq k$.

Beweis. Man betrachte $i_1, ..., i_k$ und $j_1, ..., j_k$ sodass die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x_0)$ nicht 0 ist. Die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x)$ ist eine stetige Funktion in x (weil sie mit Leibnitz-Formel gegeben ist; Leibnitz-Formel benuztz nur die Addition und Multiplikation; Addition und Multiplikation von stetigen Funktionen ist auch stetig). Dann gibt gibt es eine $\varepsilon > 0$, sodass für $|x - x_0| < \varepsilon$ ist die Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x)$ genügend nah zur Determinante der entsprechenden Untermatrix von $A(x_0)$, folglich nicht 0.

Beweis von Satz 50

Beweis von Satz 50

Beweis von Satz 50

Satz 50

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis.

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i):

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A,

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.
Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen.

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen.
Sei $rk(A) = k$.

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.
Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen. Sei $rk(A) = k$. Da $rk(A) = rk_z(A) = dim(span(\{[a_1], ..., [a_m]\}))$,

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.
Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen. Sei $rk(A) = k$. Da $rk(A) = rk_z(A) = dim(span(\{[a_1], ..., [a_m]\}))$, kann man aus $\{[a_1], ..., [a_m]\}$ nach Satz 26 k linear unabhängige Zeilen

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen. Sei $rk(A) = k$. Da $rk(A) = rk_z(A) = dim(span(\{[a_1], ..., [a_m]\}))$, kann man aus $\{[a_1], ..., [a_m]\}$ nach Satz 26 k linear unabhängige Zeilen $[a_{i_1}], [a_{i_2}]..., [a_{i_k}]$ auswählen.

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.
Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen. Sei $rk(A) = k$. Da $rk(A) = rk_z(A) = dim(span(\{[a_1], ..., [a_m]\}))$, kann man aus $\{[a_1], ..., [a_m]\}$ nach Satz 26 k linear unabhängige Zeilen $[a_{i_1}], [a_{i_2}]..., [a_{i_k}]$ auswählen.

Bsp.

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen. Sei $rk(A) = k$. Da $rk(A) = rk_z(A) = dim(span(\{[a_1], ..., [a_m]\}))$, kann man aus $\{[a_1], ..., [a_m]\}$ nach Satz 26 k linear unabhängige Zeilen $[a_{i_1}], [a_{i_2}]..., [a_{i_k}]$ auswählen.

Bsp. In A$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$,

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.
Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen. Sei $rk(A) = k$. Da $rk(A) = rk_z(A) = dim(span(\{[a_1], ..., [a_m]\}))$, kann man aus $\{[a_1], ..., [a_m]\}$ nach Satz 26 k linear unabhängige Zeilen $[a_{i_1}], [a_{i_2}] ..., [a_{i_k}]$ auswählen.

Bsp. In A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, kann man z.B. $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ setzen.

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.
Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen.
Sei $rk(A) = k$. Da $rk(A) = rk_z(A) = dim(span(\{[a_1], ..., [a_m]\}))$, kann man aus $\{[a_1], ..., [a_m]\}$ nach Satz 26 k linear unabhängige Zeilen $[a_{i_1}], [a_{i_2}] ..., [a_{i_k}]$ auswählen.
Bsp. In A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, kann man z.B. $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ setzen.
Sei A' die $(k \times n)$-Untermatrix,

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.
Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen.
Sei $rk(A) = k$. Da $rk(A) = rk_z(A) = dim(span(\{[a_1], ..., [a_m]\}))$, kann man aus $\{[a_1], ..., [a_m]\}$ nach Satz 26 k linear unabhängige Zeilen $[a_{i_1}], [a_{i_2}] ..., [a_{i_k}]$ auswählen.
Bsp. In A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, kann man z.B. $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ setzen.
Sei A' die $(k \times n)$-Untermatrix, deren Zeilen $i_1, ..., i_k$ sind (bzw. Spalten $j_1 = 1, j_2 = 2, ..., j_n = n$). (Im Bsp.: $A'= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$.)

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.
Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen. Sei $rk(A) = k$. Da $rk(A) = rk_z(A) = dim(span(\{[a_1], ..., [a_m]\}))$, kann man aus $\{[a_1], ..., [a_m]\}$ nach Satz 26 k linear unabhängige Zeilen $[a_{i_1}], [a_{i_2}]..., [a_{i_k}]$ auswählen.
Bsp. In A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, kann man z.B. $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ setzen.
Sei A' die $(k \times n)$-Untermatrix, deren Zeilen $i_1, ..., i_k$ sind (bzw. Spalten $j_1 = 1, j_2 = 2, ..., j_n = n$). (Im Bsp.: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$.)Nach Konstruktion ist $rk(A') = rk_z(A')$

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.
Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen. Sei $rk(A) = k$. Da $rk(A) = rk_z(A) = dim(span(\{[a_1], ..., [a_m]\}))$, kann man aus $\{[a_1], ..., [a_m]\}$ nach Satz 26 k linear unabhängige Zeilen $[a_{i_1}], [a_{i_2}]..., [a_{i_k}]$ auswählen.

Bsp. In A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, kann man z.B. $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ setzen.

Sei A' die $(k \times n)$-Untermatrix, deren Zeilen $i_1, ..., i_k$ sind (bzw. Spalten $j_1 = 1, j_2 = 2, ..., j_n = n$). (Im Bsp.: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$.)Nach Konstruktion ist $rk(A') = rk_z(A') = k$

Beweis von Satz 50

Satz 50 Rank der Matrix ist gleich die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.
Beweis. Z.z.:

(i) $rk(A) \leq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

(ii) $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (i): Wir müssen Existenz einer quadratischen Untermatrix der Dimension $rk(A)$ von A, deren Determinante nicht 0 ist, beweisen.
Sei $rk(A) = k$. Da $rk(A) = rk_z(A) = dim(span(\{[a_1], ..., [a_m]\}))$, kann man aus $\{[a_1], ..., [a_m]\}$ nach Satz 26 k linear unabhängige Zeilen $[a_{i_1}], [a_{i_2}] ..., [a_{i_k}]$ auswählen.
Bsp. In $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, kann man z.B. $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ setzen.
Sei A' die $(k \times n)$-Untermatrix, deren Zeilen $i_1, ..., i_k$ sind (bzw. Spalten $j_1 = 1, j_2 = 2, ..., j_n = n$). (Im Bsp.: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}$.)Nach Konstruktion ist $rk(A') = rk_z(A') = k = rk(A)$.

Da $k = rk(A') = rk_s(A') =$

Da $k = rk(A') = rk_s(A') = dim\left(\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn} \end{pmatrix}\right\}\right)\right)$, Da $k = rk(A') = rk_s(A') = dim \left(\text{span} \left(\left\{ \begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn} \end{pmatrix} \right\} \right) \right)$, kann man aus den Spalten von A' nach Satz 26 k linear unabhängige Spalten

Da $k = rk(A') = rk_s(A') = dim\left(\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn} \end{pmatrix}\right\}\right)\right)$, kann man aus den Spalten von A' nach Satz 26 k linear unabhängige Spalten (mit Nummern $j_1, ..., j_k$) auswählen.

Da $k = rk(A') = rk_s(A') = dim\left(\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn} \end{pmatrix}\right\}\right)\right)$, kann man aus den Spalten von A' nach Satz 26 k linear unabhängige Spalten (mit Nummern $j_1, \ldots, j_k$) auswählen. Die entsprechende (quadratische) Untermatrix bezeichnen wir mit A''.

Da $k = rk(A') = rk_s(A') = dim\left(\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn} \end{pmatrix}\right\}\right)\right)$, kann man aus den Spalten von A' nach Satz 26 k linear unabhängige Spalten (mit Nummern $j_1, \ldots, j_k$) auswählen. Die entsprechende (quadratische) Untermatrix bezeichnen wir mit A''.

(Im Bsp.:

Da $k = rk(A') = rk_s(A') = dim\left(\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1}\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn}\end{pmatrix}\right\}\right)\right)$, kann man aus den Spalten von A' nach Satz 26 k linear unabhängige Spalten (mit Nummern $j_1, \ldots, j_k$) auswählen. Die entsprechende (quadratische) Untermatrix bezeichnen wir mit A''.
(Im Bsp.: $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$).

Da $k = rk(A') = rk_s(A') = dim\left(\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn} \end{pmatrix}\right\}\right)\right)$, kann man aus den Spalten von A' nach Satz 26 k linear unabhängige Spalten (mit Nummern $j_1, ..., j_k$) auswählen. Die entsprechende (quadratische) Untermatrix bezeichnen wir mit A''.

(Im Bsp.: $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$. Nach Konstruktion ist

$rk(A'') = rk_s(A'')$

Da $k = rk(A') = rk_s(A') = dim\left(\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn} \end{pmatrix}\right\}\right)\right)$, kann man aus den Spalten von A' nach Satz 26 k linear unabhängige Spalten (mit Nummern $j_1, ..., j_k$) auswählen. Die entsprechende (quadratische) Untermatrix bezeichnen wir mit A''.

(Im Bsp.: $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$. Nach Konstruktion ist $rk(A'') = rk_s(A'') = k = rk(A)$.)

Da $k = rk(A') = rk_s(A') = dim\left(\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn} \end{pmatrix}\right\}\right)\right)$, kann man aus den Spalten von A' nach Satz 26 k linear unabhängige Spalten (mit Nummern $j_1, ..., j_k$) auswählen. Die entsprechende (quadratische) Untermatrix bezeichnen wir mit A''.
(Im Bsp.: $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$. Nach Konstruktion ist $rk(A'') = rk_s(A'') = k = rk(A)$.) Wir zeigen: $det(A'') \neq 0$. Tatsächlich, die Spalten von A'' sind linear unabhängig.

Da $k = rk(A') = rk_s(A') = dim\left(\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn}\end{pmatrix}\right\}\right)\right)$, kann man aus den Spalten von A' nach Satz 26 k linear unabhängige Spalten (mit Nummern $j_1, ..., j_k$) auswählen. Die entsprechende (quadratische) Untermatrix bezeichnen wir mit A''.
(Im Bsp.: $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$. Nach Konstruktion ist $rk(A'') = rk_s(A'') = k = rk(A)$.) Wir zeigen: $det(A'') \neq 0$. Tatsächlich, die Spalten von A'' sind linear unabhängig. Dann ist A'' nach Satz 34 nichtausgeartet,

Da $k = rk(A') = rk_s(A') = dim\left(\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a'_{11} \\ \vdots \\ a'_{k1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a'_{1n} \\ \vdots \\ a'_{kn} \end{pmatrix}\right\}\right)\right)$, kann man aus den Spalten von A' nach Satz 26 k linear unabhängige Spalten (mit Nummern $j_1, ..., j_k$) auswählen. Die entsprechende (quadratische) Untermatrix bezeichnen wir mit A''.
(Im Bsp.: $A'' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$. Nach Konstruktion ist $rk(A'') = rk_s(A'') = k = rk(A)$.) Wir zeigen: $det(A'') \neq 0$. Tatsächlich, die Spalten von A'' sind linear unabhängig. Dann ist A'' nach Satz 34 nichtausgeartet, folglich $det(A'') \neq 0$. (i) ist bewiesen.

Beweis (ii)

(ii):

Beweis (ii)

(ii): $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Beweis (ii)

(ii): $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Sei A' eine quadratische nichtausgeartete Untermatrix der Dimension k von A,

Beweis (ii)

(ii): $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Sei A' eine quadratische nichtausgeartete Untermatrix der Dimension k von A, $i_1, ..., i_k$ bzw. $j_1, ..., j_k$ seien die Nummern der ersprechanedne Zeilen bzw. Spalten.

Beweis (ii)

(ii): $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Sei A' eine quadratische nichtausgeartete Untermatrix der Dimension k von A, $i_1, ..., i_k$ bzw. $j_1, ..., j_k$ seien die Nummern der ersprechanedne Zeilen bzw. Spalten. Z.z.: $rk(A) \geq k$.

Beweis (ii)

(ii): $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Sei A' eine quadratische nichtausgeartete Untermatrix der Dimension k von A, $i_1, ..., i_k$ bzw. $j_1, ..., j_k$ seien die Nummern der ersprechanedne Zeilen bzw. Spalten. Z.z.: $rk(A) \geq k$.

Angenommen, $rk(A) < k$.

Beweis (ii)

(ii): $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Sei A' eine quadratische nichtausgeartete Untermatrix der Dimension k von A, $i_1, ..., i_k$ bzw. $j_1, ..., j_k$ seien die Nummern der ersprechanedne Zeilen bzw. Spalten. Z.z.: $rk(A) \geq k$.

Angenommen, $rk(A) < k$. Dann sind jede k von Zeilen linear abhängig.

Beweis (ii)

(ii): $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Sei A' eine quadratische nichtausgeartete Untermatrix der Dimension k von A, $i_1, ..., i_k$ bzw. $j_1, ..., j_k$ seien die Nummern der ersprechanedne Zeilen bzw. Spalten. Z.z.: $rk(A) \geq k$.

Angenommen, $rk(A) < k$. Dann sind jede k von Zeilen linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \neq (0, ..., 0)$

Beweis (ii)

(ii): $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Sei A' eine quadratische nichtausgeartete Untermatrix der Dimension k von A, $i_1, ..., i_k$ bzw. $j_1, ..., j_k$ seien die Nummern der ersprechanedne Zeilen bzw. Spalten. Z.z.: $rk(A) \geq k$.

Angenommen, $rk(A) < k$. Dann sind jede k von Zeilen linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \neq (0, ..., 0)$mit $\lambda_1[a_{i_1}] + ... + \lambda_k[a_{i_k}] = 0$.

Beweis (ii)

(ii): $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Sei A' eine quadratische nichtausgeartete Untermatrix der Dimension k von A, $i_1, ..., i_k$ bzw. $j_1, ..., j_k$ seien die Nummern der ersprechanedne Zeilen bzw. Spalten. Z.z.: $rk(A) \geq k$.

Angenommen, $rk(A) < k$. Dann sind jede k von Zeilen linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \neq (0, ..., 0)$mit $\lambda_1[a_{i_1}] + ... + \lambda_k[a_{i_k}] = 0$. Dann sind die Zeilen von A' linear abhängend,

Beweis (ii)

(ii): $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Sei A' eine quadratische nichtausgeartete Untermatrix der Dimension k von A, $i_1, ..., i_k$ bzw. $j_1, ..., j_k$ seien die Nummern der ersprechanedne Zeilen bzw. Spalten. Z.z.: $rk(A) \geq k$.

Angenommen, $rk(A) < k$. Dann sind jede k von Zeilen linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \neq (0, ..., 0)$mit $\lambda_1[a_{i_1}] + ... + \lambda_k[a_{i_k}] = 0$. Dann sind die Zeilen von A' linear abhängend,was widerspricht, dass die Matrix A' nichtausgeartet ist.

Beweis (ii)

(ii): $rk(A) \geq$ die höchste Dimension einer quadratischen nichtausgearteten Untermatrix.

Sei A' eine quadratische nichtausgeartete Untermatrix der Dimension k von A, $i_1, ..., i_k$ bzw. $j_1, ..., j_k$ seien die Nummern der ersprechanedne Zeilen bzw. Spalten. Z.z.: $rk(A) \geq k$.

Angenommen, $rk(A) < k$. Dann sind jede k von Zeilen linear abhängig. Dann gibt es $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \neq (0, ..., 0)$mit $\lambda_1[a_{i_1}] + ... + \lambda_k[a_{i_k}] = 0$. Dann sind die Zeilen von A' linear abhängend,was widerspricht, dass die Matrix A' nichtausgeartet ist. $\square$

Abschnitt: Diagonalizierung von Endomorphismen

Wiederholung – Def. 28.

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus.

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach“?

Abschnitt: Diagonalizierung von Endomorphismen

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach“?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37:

Abschnitt: Diagonalizierung von Endomorphismen

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach"?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung.

Abschnitt: Diagonalizierung von Endomorphismen

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach"?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U)

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach“?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach“?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$,

Abschnitt: Diagonalizierung von Endomorphismen

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach“?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach“?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U,

Abschnitt: Diagonalizierung von Endomorphismen

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach“?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen,

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach"?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen, d.h. der Koordinatenvektor von v'_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist die $i-$te spalte von A.

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach"?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B_V' = (v_1', .., v_n')$, $B_U' = (u_1', ..., u_m')$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen, d.h. der Koordinatenvektor von v_i' in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist die $i-$te spalte von A. Dann gilt:

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach“?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen, d.h. der Koordinatenvektor von v'_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist die $i-$te spalte von A. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Folgerung:

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach"?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen, d.h. der Koordinatenvektor von v'_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist die $i-$te spalte von A. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Folgerung: Falls $U = V$, ist $T_U = T_V$, also die Darstellende Matrix von $f : V \to V$ nach Basenwechsel wird so verändert:

Abschnitt: Diagonalizierung von Endomorphismen

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach"?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen, d.h. der Koordinatenvektor von v'_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist die $i-$te spalte von A. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Folgerung: Falls $U = V$, ist $T_U = T_V$, also die Darstellende Matrix von $f : V \to V$ nach Basenwechsel wird so verändert:
$A' := B^{-1}AB$,

Abschnitt: Diagonalizierung von Endomorphismen

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach"?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen, d.h. der Koordinatenvektor von v'_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist die $i-$te spalte von A. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Folgerung: Falls $U = V$, ist $T_U = T_V$, also die Darstellende Matrix von $f : V \to V$ nach Basenwechsel wird so verändert:
$A' := B^{-1}AB$, wobei $B = T_V \in Mat(n, n, \mathbb{K})$.

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.
Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach“?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen, d.h. der Koordinatenvektor von v'_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist die $i-$te spalte von A. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Folgerung: Falls $U = V$, ist $T_U = T_V$, also die Darstellende Matrix von $f : V \to V$ nach Basenwechsel wird so verändert:
$A' := B^{-1}AB$, wobei $B = T_V \in Mat(n, n, \mathbb{K})$.

Frage umformulieren:

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach"?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen, d.h. der Koordinatenvektor von v'_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist die $i-$te spalte von A. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Folgerung: Falls $U = V$, ist $T_U = T_V$, also die Darstellende Matrix von $f : V \to V$ nach Basenwechsel wird so verändert:
$A' := B^{-1}AB$, wobei $B = T_V \in Mat(n, n, \mathbb{K})$.

Frage umformulieren: Für $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$,

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach"?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen, d.h. der Koordinatenvektor von v'_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist die $i-$te spalte von A. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Folgerung: Falls $U = V$, ist $T_U = T_V$, also die Darstellende Matrix von $f : V \to V$ nach Basenwechsel wird so verändert:
$A' := B^{-1}AB$, wobei $B = T_V \in Mat(n, n, \mathbb{K})$.

Frage umformulieren: Für $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, in welche eifachste Form kann man sie mit Hilfe von $A \mapsto B^{-1}AB$ bringen, wobei $B \in Gl(n, \mathbb{K})$

Abschnitt: Diagonalizierung von Endomorphismen

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach“?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen, d.h. der Koordinatenvektor von v'_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist die $i-$te spalte von A. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Folgerung: Falls $U = V$, ist $T_U = T_V$, also die Darstellende Matrix von $f : V \to V$ nach Basenwechsel wird so verändert:
$A' := B^{-1}AB$, wobei $B = T_V \in Mat(n, n, \mathbb{K})$.

Frage umformulieren: Für $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, in welche eifachste Form kann man sie mit Hilfe von $A \mapsto B^{-1}AB$ bringen, wobei $B \in Gl(n, \mathbb{K})$

Wir werden die Frage in den nächsten zwei-drei Vorlesungen teilweise beantworten.

Abschnitt: Diagonalizierung von Endomorphismen

Wiederholung – Def. 28. Endomorphismus von V = lineare Abbildung von V nach V.

Frage: f sei ein Endomorphismus. In welcher Basis ist die darstellende Matrix von f „einfach"?

Wiederholung — Folgerung aus Satz 37: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen $B_V = (v_1, ..., v_n)$ (in V) und $B_U = (u_1, ..., u_m)$ (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$.
Seien $B'_V = (v'_1, .., v'_n)$, $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen, d.h. der Koordinatenvektor von v'_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ ist die $i-$te spalte von A. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Folgerung: Falls $U = V$, ist $T_U = T_V$, also die Darstellende Matrix von $f : V \to V$ nach Basenwechsel wird so verändert:
$A' := B^{-1}AB$, wobei $B = T_V \in Mat(n, n, \mathbb{K})$.

Frage umformulieren: Für $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, in welche eifachste Form kann man sie mit Hilfe von $A \mapsto B^{-1}AB$ bringen, wobei $B \in Gl(n, \mathbb{K})$

Wir werden die Frage in den nächsten zwei-drei Vorlesungen teilweise beantworten. Vollständige Antwort bekommen wir spätestens im Sommersemester

Charakteristisches Polynom:

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich,

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen,

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.
Def. 43

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.
Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$.*

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A*

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.
Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom*
$\aleph_A := det(A - t \cdot Id)$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.
Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom* $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.
Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom*
$\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp.

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.
Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom*
$\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det\begin{pmatrix} 1-t & \\ & \\ & \end{pmatrix}$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.
Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom*
$\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det\begin{pmatrix} 1-t & \\ & \\ & \end{pmatrix}$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.
Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom* $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det\begin{pmatrix} 1-t & \\ & \\ & \end{pmatrix}$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.
Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom*
$\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det\begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ & & \end{pmatrix}$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom* $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det \begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} =$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom* $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det \begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} =$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom* $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det \begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} =$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom*
$\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t].$

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det \begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} =$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom*
$\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det \begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} =$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.
Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.
Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom*
$\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det\begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^n$.

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom* $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det \begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^n$.

Bsp.

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom*
$\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det \begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^n.$

Bsp. $\aleph_{\mathbf{0}} = det(\mathbf{0} - tId) =$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom* $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det\begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^n.$

Bsp. $\aleph_{\mathbf{0}} = det(\mathbf{0} - tId) = det\begin{pmatrix} -t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -t \end{pmatrix} =$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom* $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det\begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^n.$

Bsp. $\aleph_{\mathbf{0}} = det(\mathbf{0} - tId) = det\begin{pmatrix} -t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -t \end{pmatrix} = (-t)^n.$

Bsp.

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom* $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det\begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^n.$

Bsp. $\aleph_{\mathbf{0}} = det(\mathbf{0} - tId) = det\begin{pmatrix} -t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -t \end{pmatrix} = (-t)^n.$

Bsp. $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} =$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom* $\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det\begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^n.$

Bsp. $\aleph_{\mathbf{0}} = det(\mathbf{0} - tId) = det\begin{pmatrix} -t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -t \end{pmatrix} = (-t)^n.$

Bsp. $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = det\begin{pmatrix} -2-t & -2 \\ 6 & 5-t \end{pmatrix} =$

Charakteristisches Polynom:

Def. 42 Zwei Matrizen $A, A' \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ heißen ähnlich, falls es ein $B \in GL(n, \mathbb{K})$ gibt sodass $A' = B^{-1}AB$.

Methoden, um die Frage zu beantworten: Die geometrische und algebraische Strukturen untersuchen, die für zwei ähnliche Matrizen gleich sind.

Def. 43 *Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Das charakteristische Polynom der Matrix A ist das Polynom*
$\aleph_A := det(A - t \cdot Id) \in \mathbb{K}[t]$.

Bsp. $\aleph_{Id} = det(Id - tId) = det \begin{pmatrix} 1-t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^n$.

Bsp. $\aleph_{\mathbf{0}} = det(\mathbf{0} - tId) = det \begin{pmatrix} -t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -t \end{pmatrix} = (-t)^n$.

Bsp. $\aleph_{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} = det \begin{pmatrix} -2-t & -2 \\ 6 & 5-t \end{pmatrix} = t^2 - 3t + 2$.

Satz 51

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.

Beweis.

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.
Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$.

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich: $\aleph_A = \aleph_{A'}$.*
Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist
$\aleph_{A'} =$

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.

Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist $\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id)$

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich: $\aleph_A = \aleph_{A'}$.*
Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist
$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.
Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist
$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$
$\overset{\text{Linearität}}{=}$

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.

Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist
$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$
$\overset{\text{Linearität}}{=} det(B^{-1}(A - t \cdot Id)B)$

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A′ ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.

Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist

$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$

$\overset{\text{Linearität}}{=} det(B^{-1}(A - t \cdot Id)B)$

$\overset{\text{Satz 40}}{=}$

Satz 51 *Sind die Matrizen* A *und* A' *ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.

Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist
$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$
$\overset{\text{Linearität}}{=} det(B^{-1}(A - t \cdot Id)B)$
$\overset{\text{Satz 40}}{=} det(B^{-1})det(A - t \cdot Id)det(B) =$

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.

Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist

$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$

$\overset{\text{Linearität}}{=} det(B^{-1}(A - t \cdot Id)B)$

$\overset{\text{Satz 40}}{=} det(B^{-1})det(A - t \cdot Id)det(B) =$

$[$ weil $det(B^{-1})det(B) = det(B^{-1}B) = 1 \;]$

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.

Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist

$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$

$\overset{\text{Linearität}}{=} det(B^{-1}(A - t \cdot Id)B)$

$\overset{\text{Satz 40}}{=} det(B^{-1})det(A - t \cdot Id)det(B) =$

[weil $det(B^{-1})det(B) = det(B^{-1}B) = 1$ **]**

$= det(A - t \cdot Id) =$

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich: $\aleph_A = \aleph_{A'}$.*
Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist
$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$
$\stackrel{\text{Linearität}}{=} det(B^{-1}(A - t \cdot Id)B)$
$\stackrel{\text{Satz 40}}{=} det(B^{-1})det(A - t \cdot Id)det(B) =$
$\Big[$ weil $det(B^{-1})det(B) = det(B^{-1}B) = 1$ $\Big]$
$= det(A - t \cdot Id) = \aleph_A$.

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich: $\aleph_A = \aleph_{A'}$.*
Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist
$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$
$\overset{\text{Linearität}}{=} det(B^{-1}(A - t \cdot Id)B)$
$\overset{\text{Satz 40}}{=} det(B^{-1})det(A - t \cdot Id)det(B) =$
[weil $det(B^{-1})det(B) = det(B^{-1}B) = 1$ **]**
$= det(A - t \cdot Id) = \aleph_A$.

Folgerung *Sind die Matrizen A und A' ähnlich,*

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A′ ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.

Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist

$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$

$\stackrel{\text{Linearität}}{=} det(B^{-1}(A - t \cdot Id)B)$

$\stackrel{\text{Satz 40}}{=} det(B^{-1})det(A - t \cdot Id)det(B) =$

$[\text{ weil } det(B^{-1})det(B) = det(B^{-1}B) = 1 \,]$

$= det(A - t \cdot Id) = \aleph_A$.

Folgerung *Sind die Matrizen A und A′ ähnlich, so sind die Nullstellen des* $\aleph_A$

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$.

Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist

$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$

$\overset{\text{Linearität}}{=} det(B^{-1}(A - t \cdot Id)B)$

$\overset{\text{Satz 40}}{=} det(B^{-1})det(A - t \cdot Id)det(B) =$

[weil $det(B^{-1})det(B) = det(B^{-1}B) = 1$ **]**

$= det(A - t \cdot Id) = \aleph_A$.

Folgerung *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind die Nullstellen des $\aleph_A$ auch Nullstellen von $\aleph_{A'}$,*

Satz 51 *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind deren charakteristische Polynome gleich:* $\aleph_A = \aleph_{A'}$*.*
Beweis. Nach Definition 42 ist $A' = B^{-1}AB$. Dann ist
$\aleph_{A'} = det(B^{-1}AB - t \cdot Id) = det(B^{-1}AB - t \cdot B^{-1}IdB)$
$\overset{\text{Linearität}}{=} det(B^{-1}(A - t \cdot Id)B)$
$\overset{\text{Satz 40}}{=} det(B^{-1})det(A - t \cdot Id)det(B) =$
$\textbf{[}$ weil $det(B^{-1})det(B) = det(B^{-1}B) = 1$ $\textbf{]}$
$= det(A - t \cdot Id) = \aleph_A$.

Folgerung *Sind die Matrizen A und A' ähnlich, so sind die Nullstellen des* $\aleph_A$ *auch Nullstellen von* $\aleph_{A'}$*, und umgekehrt*

Lemma 30

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$.*

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n*

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$)*

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt*

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt*
$a_n = (-1)^n$,

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt*
$a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} =$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$,*

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0$) und es gilt*
$a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.
Beweis.

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*
Beweis. Zuerst die folgende Aussage:

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:

$\aleph_A =$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt*
$a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.
Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$,

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist.

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)\ldots(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:
I.A.

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt*
$a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.
Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:
I.A. $n = 1$:

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)\ldots(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:
I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:
I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:

$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t) \dots (a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n-2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V.

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:
I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.
I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt*
$a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.
Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:
I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.
I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S.

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:

$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$.

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:

$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$.

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$.

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte liefert

$(a_{11} - t)$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt*
$a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte

liefert

$(a_{11} - t) det \begin{pmatrix} a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte liefert

$(a_{11} - t) det \begin{pmatrix} a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} +$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte liefert

$$(a_{11} - t) det \begin{pmatrix} a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} det \left((A - t \cdot Id)^{Str}_{j1} \right)}_{\text{ist ein Polynom vom Grad } \leq n-2} =$$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte liefert

$$(a_{11} - t) det \begin{pmatrix} a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} det\left((A - t \cdot Id)_{j1}^{Str} \right)}_{\text{ist ein Polynom vom Grad } \leq n-2} =$$

$$(a_{11} - t)\aleph_{A_{11}^{Str}} + Q_1$$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n-2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n-1 \times n-1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}-t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte liefert

$$(a_{11} - t) det \begin{pmatrix} a_{22}-t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn}-t \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} det \left((A - t \cdot Id)_{j1}^{Str} \right)}_{\text{ist ein Polynom vom Grad } \leq n-2} =$$

$$(a_{11} - t)\aleph_{A_{11}^{Str}} + Q_1 \overset{I.V.}{=}$$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n-2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n-1 \times n-1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte

liefert

$$(a_{11} - t) det \begin{pmatrix} a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} det \left((A - t \cdot Id)^{Str}_{j1} \right)}_{\text{ist ein Polynom vom Grad } \leq n-2} =$$

$$(a_{11} - t)\aleph_{A^{Str}_{11}} + Q_1 \overset{I.V.}{=} (a_{11} - t)\Big((a_{22} - t)...(a_{nn} - t)$$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)\ldots(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \ldots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte

liefert

$$(a_{11} - t) det \begin{pmatrix} a_{22} - t & a_{23} & \ldots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} - t \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} det\left((A - t \cdot Id)_{j1}^{Str}\right)}_{\text{ist ein Polynom vom Grad } \leq n-2} =$$

$$(a_{11} - t)\aleph_{A_{11}^{Str}} + Q_1 \overset{I.V.}{=} (a_{11} - t)\Big((a_{22} - t)\ldots(a_{nn} - t)$$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt* $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte liefert

$$(a_{11} - t) det \begin{pmatrix} a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} det \left((A - t \cdot Id)_{j1}^{Str} \right)}_{\text{ist ein Polynom vom Grad } \leq n-2} =$$

$$(a_{11} - t)\aleph_{A_{11}^{Str}} + Q_1 \overset{I.V.}{=} (a_{11} - t)\left((a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q_2}_{\text{vom Grad } \leq n-3} \right) + Q_1$$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n-2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n-1 \times n-1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte liefert

$$(a_{11} - t)det \begin{pmatrix} a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} det\left((A - t \cdot Id)^{Str}_{j1}\right)}_{\text{ist ein Polynom vom Grad } \leq n-2} =$$

$$(a_{11} - t)\aleph_{A^{Str}_{11}} + Q_1 \overset{I.V.}{=} (a_{11} - t)\left((a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q_2}_{\text{vom Grad } \leq n-3}\right) + Q_1$$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt*
$a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.
Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:
I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.
I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte

liefert

$$(a_{11} - t) det \begin{pmatrix} a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} det\left((A - t \cdot Id)^{Str}_{j1}\right)}_{\text{ist ein Polynom vom Grad } \leq n-2} =$$

$$(a_{11} - t)\aleph_{A^{Str}_{11}} + Q_1 \overset{I.V.}{=} (a_{11} - t)\left((a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q_2}_{\text{vom Grad } \leq n-3}\right) + Q_1$$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n-2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n-1 \times n-1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}-t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte

liefert

$$(a_{11} - t) det \begin{pmatrix} a_{22}-t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn}-t \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} det\left((A - t \cdot Id)^{Str}_{j1}\right)}_{\text{ist ein Polynom vom Grad } \leq n-2} =$$

$$(a_{11} - t)\aleph_{A^{Str}_{11}} + Q_1 \overset{I.V.}{=} (a_{11} - t)\left((a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q_2}_{\text{vom Grad } \leq n-3}\right) + Q_1 =$$

$(a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t)$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_0$) und es gilt*
$a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n-2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n-1 \times n-1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte liefert

$$(a_{11} - t) det \begin{pmatrix} a_{22} - t & a_{23} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} det\left((A - t \cdot Id)_{j1}^{Str}\right)}_{\text{ist ein Polynom vom Grad } \leq n-2} =$$

$$(a_{11} - t)\aleph_{A_{11}^{Str}} + Q_1 \overset{I.V.}{=} (a_{11} - t)\left((a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q_2}_{\text{vom Grad } \leq n-3}\right) + Q_1 =$$

$$(a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{(a_{11} - t)Q_2 + Q_1}_{Q}$$

Lemma 30 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist $\aleph_A$ ein Polynom vom Grad n (also, $\aleph_A = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0$) und es gilt $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$, $a_0 = det(A)$.*

Beweis. Zuerst die folgende Aussage:
$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t) \ldots (a_{nn} - t) + Q$, wobei Q ein Polynom vom Grad $n - 2$ ist. Beweis durch Induktion nach n:

I.A. $n = 1$: Dann ist $A = (a_{11})$ und $\aleph_A = det(a_{11} - t) = a_{11} - t$.

I.V. Angenommen, die Aussage ist richtig für $n - 1 \times n - 1$ Matrizen.

I.S. $\aleph_A = det \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \ldots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Spalte liefert

$$(a_{11} - t) det \begin{pmatrix} a_{22} - t & a_{23} & \ldots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} - t \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} det \left((A - t \cdot Id)_{j1}^{Str} \right)}_{\text{ist ein Polynom vom Grad } \leq n-2} =$$

$$(a_{11} - t) \aleph_{A_{11}^{Str}} + Q_1 \overset{I.V.}{=} (a_{11} - t) \left((a_{22} - t) \ldots (a_{nn} - t) + \underbrace{Q_2}_{\text{vom Grad } \leq n-3} \right) + Q_1 =$$

$(a_{11} - t)(a_{22} - t) \ldots (a_{nn} - t) + \underbrace{(a_{11} - t) Q_2 + Q_1}_{Q}$. Die Aussage ist bewiesen.

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} =$$

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n$$

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n + a_{11}(-t)^{n-1}$$

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad} \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1}$$

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1}$$

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)\ldots(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + \ldots + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{\ldots}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})(-t)^{n-1} +$$

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad} \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad} \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad} \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$,

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und a_{n-1}

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad} \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad} \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad} \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$

Nach Aussage ist

$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$
$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$
$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}$. Also,
$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$,

Nach Aussage ist

$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$

$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$

$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}$. Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0)$

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=}$

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n + a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} = (-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$

Also, $a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist

Nach Aussage ist

$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$

$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$

$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}$. Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$.

Nach Aussage ist

$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$

$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$

$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}$. Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. $\square$

Def. 44

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine* $(n \times n)$*-Matrix.*

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})\,(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine* $(n \times n)$*-Matrix.* $tr(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11}-t)(a_{22}-t)...(a_{nn}-t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n + a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} = (-t)^n + (a_{11}+a_{22}+...+a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$

Also, $a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+...+a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. } 19}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11}-t)(a_{22}-t)...(a_{nn}-t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad} \le n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad} \le n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11}+a_{22}+...+a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad} \le n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+...+a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11}-t)(a_{22}-t)...(a_{nn}-t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \le n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \le n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11}+a_{22}+...+a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \le n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+...+a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. $\square$

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist,

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11}-t)(a_{22}-t)\dots(a_{nn}-t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + \dots + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{\dots}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\,(-t)^{n-1} + \underbrace{\dots}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. $\square$

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp.

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})\,(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11}-t)(a_{22}-t)\dots(a_{nn}-t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad} \le n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + \dots + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{\dots}_{\text{Terme der Grad} \le n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})\,(-t)^{n-1} + \underbrace{\dots}_{\text{Terme der Grad} \le n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \stackrel{\text{Def. } 19}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)\dots(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + \dots + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{\dots}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{\dots}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. $\square$

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ähnlich?

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11}-t)(a_{22}-t)\dots(a_{nn}-t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + \dots + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{\dots}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{\dots}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. $\square$

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein!

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein! Sie haben verschiedene Spuren.

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein! Sie haben verschiedene Spuren.

Bsp.

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)\dots(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + \dots + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{\dots}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{\dots}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. } 19}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. $\square$

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein! Sie haben verschiedene Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein! Sie haben verschiedene Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11}-t)(a_{22}-t)...(a_{nn}-t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11}+a_{22}+...+a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+...+a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. } 19}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein! Sie haben verschiedene Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ähnlich?

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11}-t)(a_{22}-t)...(a_{nn}-t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad} \le n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad} \le n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad} \le n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein! Sie haben verschiedene Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein!

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11}-t)(a_{22}-t)...(a_{nn}-t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad } \le n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \le n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad } \le n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein! Sie haben verschiedene Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein! Sie haben verschiedene Determinanten,

Nach Aussage ist

$$\aleph_A = (a_{11} - t)(a_{22} - t)...(a_{nn} - t) + \underbrace{Q}_{\text{vom Grad} \leq n-2} = (-t)^n +$$

$$a_{11}(-t)^{n-1} + a_{22}(-t)^{n-1} + ... + a_{nn}(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad} \leq n-2} =$$

$$(-t)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-t)^{n-1} + \underbrace{...}_{\text{Terme der Grad} \leq n-2}.$$ Also,

$a_n = (-1)^n$, und $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})$.

Wir müssen noch zeigen, dass $a_0 = det(A)$.

Da $a_0 = \aleph_A(0)$, und da $\aleph_A(0) \overset{\text{Def. 19}}{=} det(A)$ ist, ist $a_0 = det(A)$. □

Def. 44 *Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. $tr(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ heißt Spur von A.*

Bemerkung Da $tr(A)$ ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms ist, haben ähnliche Matrizen nach Satz 51 gleiche Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein! Sie haben verschiedene Spuren.

Bsp. Sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ähnlich? Nein! Sie haben verschiedene Determinanten, und Determinante ist auch ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms

Def. 45

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus*

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst)*

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V*

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über* $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert,*

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$,*

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$,*

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$.*

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus (= lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert,*

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus (= lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d. \; f(v) = \lambda v \;\}$*

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d. \; f(v) = \lambda v \}$ der Eigenraum*

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d.\ f(v) = \lambda v\ \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ*

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d.\ f(v) = \lambda v\ \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ und wird Eig_λ bezeichnen.*

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus (= lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d. \ f(v) = \lambda v \ \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ und wird Eig_λ bezeichnen.*

Äquivalente Definition:

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus (= lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d. \ f(v) = \lambda v \ \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ und wird Eig_λ bezeichnen.*

Äquivalente Definition: Sei $f = f_A$. Dann gilt:

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d.\ f(v) = \lambda v\ \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ und wird Eig_λ bezeichnen.*

Äquivalente Definition: Sei $f = f_A$. Dann gilt: $Eig_\lambda := Kern_{A-\lambda \cdot Id}$.

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d. \ f(v) = \lambda v\ \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ und wird Eig_λ bezeichnen.*

Äquivalente Definition: Sei $f = f_A$. Dann gilt: $Eig_\lambda := Kern_{A - \lambda \cdot Id}$.
(Daraus folgt insbesondere,

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d.\ f(v) = \lambda v\ \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ und wird Eig_λ bezeichnen.*

Äquivalente Definition: Sei $f = f_A$. Dann gilt: $Eig_\lambda := Kern_{A-\lambda\cdot Id}$.
(Daraus folgt insbesondere, dass Eig_λ ein Untervektorraum ist,

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d.\ f(v) = \lambda v\ \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ und wird Eig_λ bezeichnen.*

Äquivalente Definition: Sei $f = f_A$. Dann gilt: $Eig_\lambda := Kern_{A-\lambda \cdot Id}$.
(Daraus folgt insbesondere, dass Eig_λ ein Untervektorraum ist, weil nach Lemma 20

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d. \ f(v) = \lambda v \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ und wird Eig_λ bezeichnen.*

Äquivalente Definition: Sei $f = f_A$. Dann gilt: $Eig_\lambda := Kern_{A-\lambda \cdot Id}$.
(Daraus folgt insbesondere, dass Eig_λ ein Untervektorraum ist, weil nach Lemma 20 der Kern einer linearen Abbildung

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d.\ f(v) = \lambda v\ \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ und wird Eig_λ bezeichnen.*

Äquivalente Definition: Sei $f = f_A$. Dann gilt: $Eig_\lambda := Kern_{A-\lambda \cdot Id}$.
(Daraus folgt insbesondere, dass Eig_λ ein Untervektorraum ist, weil nach Lemma 20 der Kern einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist.)

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus ($=$ lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d.\ f(v) = \lambda v\ \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ und wird Eig_λ bezeichnen.*

Äquivalente Definition: Sei $f = f_A$. Dann gilt: $Eig_\lambda := Kern_{A-\lambda \cdot Id}$.
(Daraus folgt insbesondere, dass Eig_λ ein Untervektorraum ist, weil nach Lemma 20 der Kern einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist.)
Eigenvektor zum Eigenwert λ

Def. 45 *Es sei f ein Endomorphismus (= lineare Abbildung auf sich selbst) des Vektorraums V über $\mathbb{K}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein Eigenwert, falls es ein $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, gibt, s.d. $f(v) = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so heißt die Menge $\{v \in V \quad s.d.\ f(v) = \lambda v\ \}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ und wird Eig_λ bezeichnen.*

Äquivalente Definition: Sei $f = f_A$. Dann gilt: $Eig_\lambda := Kern_{A-\lambda \cdot Id}$.
(Daraus folgt insbesondere, dass Eig_λ ein Untervektorraum ist, weil nach Lemma 20 der Kern einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist.)
Eigenvektor zum Eigenwert λ ist ein Element von Eig_λ, s.d. es nicht $\vec{0}$ ist.

Satz 52

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$.*

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt:*
λ ist g.d. ein Eigenwert von f,

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Satz 52 *Es sei* A *die Matrix des Endomorphismus* $f : V \to V$. *Dann gilt:* λ *ist g.d. ein Eigenwert von* f, *wenn* λ *eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms* $\aleph_A$ *ist.*

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung

Satz 52 *Es sei* A *die Matrix des Endomorphismus* $f : V \to V$. *Dann gilt:* λ *ist g.d. ein Eigenwert von* f, *wenn* λ *eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms* $\aleph_A$ *ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab,

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung:

Satz 52 *Es sei* A *die Matrix des Endomorphismus* $f : V \to V$*. Dann gilt:* λ *ist g.d. ein Eigenwert von* f*, wenn* λ *eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms* $\aleph_A$ *ist.*
Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix.*

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0$

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*
Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$,

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$,

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52.

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung $f_{A-\lambda Id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$,

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung
$f_{A-\lambda Id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_{A-\lambda Id}(x) := (A - \lambda Id)x$

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung
$f_{A-\lambda Id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_{A-\lambda Id}(x) := (A - \lambda Id)x = Ax - \lambda x$.

Satz 52 *Es sei* A *die Matrix des Endomorphismus* $f : V \to V$*. Dann gilt:* λ *ist g.d. ein Eigenwert von* f*, wenn* λ *eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms* $\aleph_A$ *ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ *es gibt ein* $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, *mit* $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung $f_{A-\lambda Id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_{A-\lambda Id}(x) := (A - \lambda Id)x = Ax - \lambda x$. Deren Matrix ist $A - \lambda Id$.

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung $f_{A-\lambda Id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_{A-\lambda Id}(x) := (A - \lambda Id)x = Ax - \lambda x$. Deren Matrix ist $A - \lambda Id$. Nach Hilfsaussage

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ *es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.*

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung $f_{A-\lambda Id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_{A-\lambda Id}(x) := (A - \lambda Id)x = Ax - \lambda x$. Deren Matrix ist $A - \lambda Id$. Nach Hilfsaussage ist $det(A - \lambda Id) = 0$

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung $f_{A-\lambda Id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_{A-\lambda Id}(x) := (A - \lambda Id)x = Ax - \lambda x$. Deren Matrix ist $A - \lambda Id$. Nach Hilfsaussage ist $det(A - \lambda Id) = 0$ g.d.w.

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung $f_{A-\lambda Id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_{A-\lambda Id}(x) := (A - \lambda Id)x = Ax - \lambda x$. Deren Matrix ist $A - \lambda Id$. Nach Hilfsaussage ist $det(A - \lambda Id) = 0$ g.d.w. es ein $v \neq 0$ gibt mit $\vec{0} = (A - \lambda Id)v = Av - \lambda v = f(v) - \lambda v$.

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung $f_{A-\lambda Id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_{A-\lambda Id}(x) := (A - \lambda Id)x = Ax - \lambda x$. Deren Matrix ist $A - \lambda Id$. Nach Hilfsaussage ist $det(A - \lambda Id) = 0$ g.d.w. es ein $v \neq 0$ gibt mit $\vec{0} = (A - \lambda Id)v = Av - \lambda v = f(v) - \lambda v$. Also, $\aleph_A(\lambda) = 0$

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung $f_{A-\lambda Id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_{A-\lambda Id}(x) := (A - \lambda Id)x = Ax - \lambda x$. Deren Matrix ist $A - \lambda Id$. Nach Hilfsaussage ist $det(A - \lambda Id) = 0$ g.d.w. es ein $v \neq 0$ gibt mit $\vec{0} = (A - \lambda Id)v = Av - \lambda v = f(v) - \lambda v$. Also, $\aleph_A(\lambda) = 0$ g.d.w.

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung $f_{A-\lambda Id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_{A-\lambda Id}(x) := (A - \lambda Id)x = Ax - \lambda x$. Deren Matrix ist $A - \lambda Id$. Nach Hilfsaussage ist $det(A - \lambda Id) = 0$ g.d.w. es ein $v \neq 0$ gibt mit $\vec{0} = (A - \lambda Id)v = Av - \lambda v = f(v) - \lambda v$. Also, $\aleph_A(\lambda) = 0$ g.d.w. λ ein Eigenwert von f ist.

Satz 52 *Es sei A die Matrix des Endomorphismus $f : V \to V$. Dann gilt: λ ist g.d. ein Eigenwert von f, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\aleph_A$ ist.*

Bemerkung Obwohl die darstellende Matrix von f hängt von der Wahl vin Basis ab, hängen die Nullstellen von $\aleph_A$ nicht von der Wahl der Basis ab (nach Folgerung).

Wiederholung: Folgerung aus der 1sten Dimensionsformel *A sei eine $n \times n$ Matrix. Es gilt:*
$det(A) = 0 \iff$ es gibt ein $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq \vec{0}$, mit $Av = \vec{0}$.

Beweis von Satz 52. Wir betrachten die lineare Abbildung $f_{A-\lambda Id} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_{A-\lambda Id}(x) := (A - \lambda Id)x = Ax - \lambda x$. Deren Matrix ist $A - \lambda Id$. Nach Hilfsaussage ist $det(A - \lambda Id) = 0$ g.d.w. es ein $v \neq 0$ gibt mit $\vec{0} = (A - \lambda Id)v = Av - \lambda v = f(v) - \lambda v$. Also, $\aleph_A(\lambda) = 0$ g.d.w. λ ein Eigenwert von f ist. $\square$