Erstes Ziel für Heute

Man betrachte das lineare Gleichungssystem

Erstes Ziel für Heute

Man betrachte das lineare Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right.$

Erstes Ziel für Heute

Man betrachte das lineare Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right.$

(in Matrixform: $Ax = b$, $A \in Mat(m, n)$).

Fragen:

Erstes Ziel für Heute

Man betrachte das lineare Gleichungssystem $\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right.$

(in Matrixform: $Ax = b$, $A \in Mat(m, n)$).
Fragen: Ist das System lösbar?

Erstes Ziel für Heute

Man betrachte das lineare Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(in Matrixform: $Ax = b$, $A \in Mat(m, n)$).

Fragen: Ist das System lösbar? Wie gross ist der Raum der Lösungen?

Erstes Ziel für Heute

Man betrachte das lineare Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(in Matrixform: $Ax = b$, $A \in Mat(m, n)$).

Fragen: Ist das System lösbar? Wie gross ist der Raum der Lösungen?

Wir bekommen Heute die Methoden, um diese Frage zu antworten, ohne das System zu lösen.

Erstes Ziel für Heute

Man betrachte das lineare Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(in Matrixform: $Ax = b$, $A \in Mat(m, n)$).

Fragen: Ist das System lösbar? Wie gross ist der Raum der Lösungen?

Wir bekommen Heute die Methoden, um diese Frage zu antworten, ohne das System zu lösen.

Bsp. Sei $m = n$. Dann gilt:

$det(A) \neq 0$

Erstes Ziel für Heute

Man betrachte das lineare Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(in Matrixform: $Ax = b$, $A \in Mat(m, n)$).

Fragen: Ist das System lösbar? Wie gross ist der Raum der Lösungen?

Wir bekommen Heute die Methoden, um diese Frage zu antworten, ohne das System zu lösen.

Bsp. Sei $m = n$. Dann gilt:

$det(A) \neq 0 \overset{\text{Folg. aus Sätze 34/35/29/Lemma 24)}}{\Longleftrightarrow}$

Erstes Ziel für Heute

Man betrachte das lineare Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(in Matrixform: $Ax = b$, $A \in Mat(m, n)$).

Fragen: Ist das System lösbar? Wie gross ist der Raum der Lösungen?

Wir bekommen Heute die Methoden, um diese Frage zu antworten, ohne das System zu lösen.

Bsp. Sei $m = n$. Dann gilt:

$det(A) \neq 0 \overset{\text{Folg. aus Sätze 34/35/29/Lemma 24)}}{\Longleftrightarrow}$ das System $Ax = b$ ist eindeutig lösbar.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang*

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z)*

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der* $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der span*$(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ *in* $Mat(1, n)$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der span$(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A*

(Bezeichnung: rk_s)

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der span*$(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ *in* $Mat(1, n)$*. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der span* $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \end{pmatrix}\right.\right.$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der span$(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A*

(Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der span $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \end{pmatrix}\right.\right.$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der span$(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der span* $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der span$(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der span* $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der* $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ *in* $Mat(1, n)$. *Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.*

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der span* $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.*

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der* $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ *in* $Mat(1, n)$. *Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ *Id*-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.*

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Die Zeilen sind $(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1)$

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der span$(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der span* $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Die Zeilen sind $(1, 0, ..., 0)$, $(0, 1, ..., 0)$, $...$, $(0, 0, ..., 1)$ und sind die Standard-Basismatrizen von $Mat(1, n)$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der* $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ *in* $Mat(1, n)$. *Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Die Zeilen sind $(1, 0, ..., 0)$, $(0, 1, ..., 0)$, ..., $(0, 0, ..., 1)$ und sind die Standard-Basismatrizen von $Mat(1, n)$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Die Zeilen sind $(1, 0, ..., 0),\ (0, 1, ..., 0),\ ...,\ (0, 0, ..., 1)$ und sind die Standard-Basismatrizen von $Mat(1, n)$.

Bsp. $A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Die Zeilen sind $(1, 0, ..., 0), \ (0, 1, ..., 0), \ ..., \ (0, 0, ..., 1)$ und sind die Standard-Basismatrizen von $Mat(1, n)$.

Bsp. $A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet. Dann ist $rk_s(A) = rk_z(A) = n$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ *Id*-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Die Zeilen sind $(1, 0, ..., 0),\ (0, 1, ..., 0),\ ...,\ (0, 0, ..., 1)$ und sind die Standard-Basismatrizen von $Mat(1, n)$.

Bsp. $A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet. Dann ist $rk_s(A) = rk_z(A) = n$.

Tatsächlich,

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Die Zeilen sind $(1, 0, ..., 0),\ (0, 1, ..., 0),\ ...,\ (0, 0, ..., 1)$ und sind die Standard-Basismatrizen von $Mat(1, n)$.

Bsp. $A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet. Dann ist $rk_s(A) = rk_z(A) = n$. Tatsächlich, nach Satz 34 sind die Spalten von A

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Die Zeilen sind $(1, 0, ..., 0),\ (0, 1, ..., 0),\ ...,\ (0, 0, ..., 1)$ und sind die Standard-Basismatrizen von $Mat(1, n)$.

Bsp. $A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet. Dann ist $rk_s(A) = rk_z(A) = n$.

Tatsächlich, nach Satz 34 sind die Spalten von A linear unabhängig, Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m,n,\mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1],...,[a_n]\})$ in $Mat(1,n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m,1)$.*

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.
Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.
Die Zeilen sind $(1,0,...,0),\ (0,1,...,0),\ ...,\ (0,0,...,1)$ und sind die Standard-Basismatrizen von $Mat(1,n)$.
Bsp. $A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann ist $rk_s(A) = rk_z(A) = n$.
Tatsächlich, nach Satz 34 sind die Spalten von A linear unabhängig, also $rk_s(A) = n$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Die Zeilen sind $(1, 0, ..., 0),\ (0, 1, ..., 0),\ ...,\ (0, 0, ..., 1)$ und sind die Standard-Basismatrizen von $Mat(1, n)$.

Bsp. $A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet. Dann ist $rk_s(A) = rk_z(A) = n$. Tatsächlich, nach Satz 34 sind die Spalten von A linear unabhängig, also $rk_s(A) = n$. Nach Satz 43 ist die transponierte Matrix auch nichtausgeartet;

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.*

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Die Zeilen sind $(1, 0, ..., 0), \ (0, 1, ..., 0), \ ..., \ (0, 0, ..., 1)$ und sind die Standard-Basismatrizen von $Mat(1, n)$.

Bsp. $A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet. Dann ist $rk_s(A) = rk_z(A) = n$. Tatsächlich, nach Satz 34 sind die Spalten von A linear unabhängig, also $rk_s(A) = n$. Nach Satz 43 ist die transponierte Matrix auch nichtausgeartet; da die Spalten von A^t die Zeilen von A sind,

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der span$(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der span* $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in* $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Die Zeilen sind $(1, 0, ..., 0),\ (0, 1, ..., 0),\ ...,\ (0, 0, ..., 1)$ und sind die Standard-Basismatrizen von $Mat(1, n)$.

Bsp. $A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet. Dann ist $rk_s(A) = rk_z(A) = n$. Tatsächlich, nach Satz 34 sind die Spalten von A linear unabhängig, also $rk_s(A) = n$. Nach Satz 43 ist die transponierte Matrix auch nichtausgeartet; da die Spalten von A^t die Zeilen von A sind, sind die Zeilen von A linear unabhängig;

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$

Def. 39 *Zeilenrang der Matrix A (Bezeichnung: rk_z) ist die Dimension der $span(\{[a_1], ..., [a_n]\})$ in $Mat(1, n)$. Spaltenrank der Matrix A (Bezeichnung: rk_s) ist die Dimension der* $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$ *in $\mathbb{K}^m \equiv Mat(m, 1)$.*

Bsp: Zeilenrang und Spaltenrang der **0**-Matrix sind gleich 0.

Bsp: Zeilen und Spaltenrang der $(n \times n)$ Id-Matrix sind gleich n.

Tatsächlich,die Spalten sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und sind die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$.

Die Zeilen sind $(1, 0, ..., 0), \ (0, 1, ..., 0), \ ..., \ (0, 0, ..., 1)$ und sind die Standard-Basismatrizen von $Mat(1, n)$.

Bsp. $A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet. Dann ist $rk_s(A) = rk_z(A) = n$. Tatsächlich, nach Satz 34 sind die Spalten von A linear unabhängig, also $rk_s(A) = n$. Nach Satz 43 ist die transponierte Matrix auch nichtausgeartet; da die Spalten von A^t die Zeilen von A sind, sind die Zeilen von A linear unabhängig; also $rk_z(A) = n$.

Bemerkung: $rk_z(A) = rk_s(A^t)$,

Bemerkung: $rk_z(A) = rk_s(A^t)$, $rk_s(A) = rk_z(A^t)$.

Bemerkung: $rk_z(A) = rk_s(A^t)$, $rk_s(A) = rk_z(A^t)$. (Weil Transponieren aus Zeilen Spalten macht und umgekehrt.)

Bemerkung: $rk_z(A) = rk_s(A^t)$, $rk_s(A) = rk_z(A^t)$. (Weil Transponieren aus Zeilen Spalten macht und umgekehrt.)

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} =$

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$

$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid$

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$

$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$

$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\ \}$

$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid$

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$
Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$.
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$
Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$.
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$

$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$

$= \{\lambda_1 A e_1 + ...\lambda_n A e_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$

Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$

$$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \end{pmatrix} \right.\right.$$

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$

$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$

$= \{\lambda_1 A e_1 + ...\lambda_n A e_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$

Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$

$$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \end{pmatrix}\right.\right.$$

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$

$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$

$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$

Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$

$$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right),$$

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$

Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$

$$\operatorname{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right),$$

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + \ldots.\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 A e_1 + \ldots.\lambda_n A e_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$.
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$

$$\operatorname{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right),$$

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\ \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
$\operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + \dots.\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 A e_1 + \dots.\lambda_n A e_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A:

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + \dots.\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\ \}$
$= \{\lambda_1 A e_1 + \dots.\lambda_n A e_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
$\text{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$
Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$.
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
span $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + \ldots.\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + \ldots.\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. □

Folgerung B:

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. □

Folgerung B: Sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(m, \mathbb{K})$, $C \in Gl(n, \mathbb{K})$.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$
Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung B: Sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(m, \mathbb{K})$, $C \in Gl(n, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar).

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. □

Folgerung B: Sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(m, \mathbb{K})$, $C \in Gl(n, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_s(B^{-1}AC) = rk_s(A)$.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + \ldots . \lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 A e_1 + \ldots . \lambda_n A e_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. □

Folgerung B: Sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(m, \mathbb{K})$, $C \in Gl(n, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_s(B^{-1}AC) = rk_s(A)$.

Beweis.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$

Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
span $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. □

Folgerung B: Sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(m, \mathbb{K})$, $C \in Gl(n, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_s(B^{-1}AC) = rk_s(A)$.

Beweis. Wir betrachten die Basen $(v_1', ..., v_n')$ und $(u_1', ..., u_m')$

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$
Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$.
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
span $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. □

Folgerung B: Sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(m, \mathbb{K})$, $C \in Gl(n, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_s(B^{-1}AC) = rk_s(A)$.

Beweis. Wir betrachten die Basen $(v_1', ..., v_n')$ und $(u_1', ..., u_m')$ sodass die Transformationatrizen sind C und B.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$
Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$.
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. □

Folgerung B: Sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(m, \mathbb{K})$, $C \in Gl(n, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_s(B^{-1}AC) = rk_s(A)$.

Beweis. Wir betrachten die Basen $(v_1', ..., v_n')$ und $(u_1', ..., u_m')$ sodass die Transformationatrizen sind C und B. Dann ist nach Folgerung aus Satz 37 die darstellunde Matrix von f bzgl. neuen Basen gleich $B^{-1}AC$.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$
Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 A e_1 + ...\lambda_n A e_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$.
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. □

Folgerung B: Sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(m, \mathbb{K})$, $C \in Gl(n, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_s(B^{-1}AC) = rk_s(A)$.

Beweis. Wir betrachten die Basen $(v_1', ..., v_n')$ und $(u_1', ..., u_m')$ sodass die Transformationatrizen sind C und B. Dann ist nach Folgerung aus Satz 37 die darstellunde Matrix von f bzgl. neuen Basen gleich $B^{-1}AC$. Nach Folgerung A ist $rk_s(B^{-1}AC) = rk_s(A)$.

Geometrische Bedeutung des Spaltenrangs

Lemma 28. $rk_s(A) = dim(Bild_{f_A})$
Beweis. $Bild_{f_A} = \{Av \mid \text{ wobei } v \in \mathbb{K}^n\}$
$= \{A(\lambda_1 e_1 + ...\lambda_n e_n) \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K} \}$
$= \{\lambda_1 Ae_1 + ...\lambda_n Ae_n \mid \text{ wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$.
Aber Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. Dann ist $Bild_{f_A} =$
$\text{span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, und dessen Dimension ist $rk_s(A)$.

Folgerung A: Spaltenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. □

Folgerung B: Sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(m, \mathbb{K})$, $C \in Gl(n, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_s(B^{-1}AC) = rk_s(A)$.

Beweis. Wir betrachten die Basen $(v'_1, ..., v'_n)$ und $(u'_1, ..., u'_m)$ sodass die Transformationatrizen sind C und B. Dann ist nach Folgerung aus Satz 37 die darstellunde Matrix von f bzgl. neuen Basen gleich $B^{-1}AC$. Nach Folgerung A ist $rk_s(B^{-1}AC) = rk_s(A)$. □

Betrachte ein lineares Gleichungssystem

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

$\Big($ In Matrix Form: $Ax = b$,

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die* $(m \times n)$ *Matrix* A

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems.*

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right.$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die* $(m \times n)$ *Matrix* A *heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die* $(m \times (n+1))$*-Matrix* $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix*

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{array}\right.$

(In Matrix Form: $Ax=b$, wobei $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m\times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m\times(n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax=b$ werden wir (A,b) bezeichnen.*

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right.$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)**

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right.$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{array}\right.$

(In Matrix Form: $Ax=b$, wobei $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m\times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m\times(n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax=b$ werden wir (A,b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax=b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix* $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)**

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix* $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix* $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System.

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right.$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System. Dann für

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix* $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System. Dann für jede Lösung x

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System. Dann für jede Lösung x liegt der Vektor $x - \tilde{x}$

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right.$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System. Dann für jede Lösung x liegt der Vektor $x - \tilde{x}$ in $Kern_{f_A}$, und für jedes $v \in Kern_{f_A}$

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die* $(m \times n)$ *Matrix* A *heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die* $(m \times (n+1))$*-Matrix* $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung* $Ax = b$ *werden wir* (A, b) *bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System. Dann für jede Lösung x liegt der Vektor $x - \tilde{x}$ in $Kern_{f_A}$, und für jedes $v \in Kern_{f_A}$ ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung.

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{llll} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right.$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System. Dann für jede Lösung x liegt der Vektor $x - \tilde{x}$ in $Kern_{f_A}$, und für jedes $v \in Kern_{f_A}$ ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. In anderen Worten,

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die* $(m \times n)$ *Matrix* A *heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die* $(m \times (n+1))$*-Matrix* $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung* $Ax = b$ *werden wir* (A, b) *bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System. Dann für jede Lösung x liegt der Vektor $x - \tilde{x}$ in $Kern_{f_A}$, und für jedes $v \in Kern_{f_A}$ ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. In anderen Worten,die Menge der Lösungen

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System. Dann für jede Lösung x liegt der Vektor $x - \tilde{x}$ in $Kern_{f_A}$, und für jedes $v \in Kern_{f_A}$ ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. In anderen Worten,die Menge der Lösungen ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist}$$

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die* $(m \times n)$ *Matrix* A *heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die* $(m \times (n+1))$*-Matrix* $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung* $Ax = b$ *werden wir* (A, b) *bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System. Dann für jede Lösung x liegt der Vektor $x - \tilde{x}$ in $Kern_{f_A}$, und für jedes $v \in Kern_{f_A}$ ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. In anderen Worten,die Menge der Lösungen ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist und } v \in Kern_{f_A}\}.$$

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix* $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System. Dann für jede Lösung x liegt der Vektor $x - \tilde{x}$ in $Kern_{f_A}$, und für jedes $v \in Kern_{f_A}$ ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. In anderen Worten,die Menge der Lösungen ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist und } v \in Kern_{f_A}\}.$$

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die* $(m \times n)$ *Matrix* A *heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die* $(m \times (n+1))$*-Matrix* $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung* $Ax = b$ *werden wir* (A, b) *bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System. Dann für jede Lösung x liegt der Vektor $x - \tilde{x}$ in $Kern_{f_A}$, und für jedes $v \in Kern_{f_A}$ ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. In anderen Worten,die Menge der Lösungen ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist und } v \in Kern_{f_A}\}.$$

Betrachte ein lineares Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$

(In Matrix Form: $Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$)

Wiederholung *Die $(m \times n)$ Matrix A heißt die Koeffizientenmatrix des Systems. Die $(m \times (n+1))$-Matrix* $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ *heißt die erweiterte Matrix.*

Bezeichnung *Die erweiterte Matrix für dir Gleichung $Ax = b$ werden wir (A, b) bezeichnen.*

Satz 47 Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Dann gilt:

(a) **(Lösbarkeitskriterium)** Das System ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich den Rang der erweiterten Matrix ist.

(b) **(Die Menge der Lösungen)** Sei $\tilde{x}$ eine Lösung des System. Dann für jede Lösung x liegt der Vektor $x - \tilde{x}$ in $Kern_{f_A}$, und für jedes $v \in Kern_{f_A}$ ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. In anderen Worten,die Menge der Lösungen ist

$$\{\tilde{x} + v \ , \quad \text{wobei } \tilde{x} \text{ eine Lösung ist und } v \in Kern_{f_A}\}.$$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b))$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$.

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten,

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten,

d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$.

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b\right\}\right)$

besteht aus aller Vektoren der Form

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b\right\}\right)$

besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$

besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$

besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten,

d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$

besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$

besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots +$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$

besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} +$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten,

d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b\right\}\right)$

besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \quad b =$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$

besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \quad b =$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$

besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \quad b =$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b\right\}\right)$ besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \quad b =$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span \left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\} \right)$ besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \quad b =$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$

besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \quad b =$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$ besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \quad b =$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$ besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \; b =$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} +$$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + ... + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$ besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \; b =$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} +$$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$ besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \; b =$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \left(\mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten,

d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann *span* $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\} \right)$

besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \; b =$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \left(\mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$ besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \; b =$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \left(\mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$ besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \; b =$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \left(\mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \ (\lambda_1 + \lambda_{n+1}\mu_1) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + (\lambda_n + \lambda_{n+1}\mu_n) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$ besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \, b =$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \left(\mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_{n+1}\mu_1) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + (\lambda_n + \lambda_{n+1}\mu_n) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$ Dann

$$span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten,

d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$

besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \; b =$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \left(\mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_{n+1}\mu_1) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + (\lambda_n + \lambda_{n+1}\mu_n) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$ Dann

$$span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right) = span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right),$$

Hilfsaussage vor dem Beweis

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longleftarrow$. Sei b eine Linearkombination von Spalten, d.h. $b = \mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right)$ besteht aus aller Vektoren der Form $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \; b =$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda_{n+1} \left(\mu_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \mu_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_{n+1}\mu_1) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + (\lambda_n + \lambda_{n+1}\mu_n) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dann $span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b \right\}\right) = span\left(\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}\right)$, also $rk(A) = rk((A,b))$.

Hilfsaussage

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in

$$span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right).$$

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A

eine Basis B' von

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in
$span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.
Es genügt zu zeigen:

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.

Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'.

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in
$span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.
Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis.

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in
$span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.

Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen.

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in
$span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.
Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.
Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.

Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$ linear unabhängig,

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.
Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$ linear unabhängig, weil in der Linearkombination

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in
$span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.
Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$ linear unabhängig, weil in der Linearkombination
$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{rk(A)} b_{rk(A)} + \mu b = \vec{0}$

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfsaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.
Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$ linear unabhängig, weil in der Linearkombination
$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{rk(A)} b_{rk(A)} + \mu b = \vec{0}$
ist $\mu = 0$,

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.

Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$ linear unabhängig, weil in der Linearkombination

$\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{rk(A)} b_{rk(A)} + \mu b = \vec{0}$

ist $\mu = 0$, (sonst kann man b als eine Linearkombination von $b \in B'$ darstellen),

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in
$span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.
Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$ linear unabhängig, weil in der Linearkombination
$\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{rk(A)} b_{rk(A)} + \mu b = \vec{0}$
ist $\mu = 0$, (sonst kann man b als eine Linearkombination von $b \in B'$ darstellen), und dann sind $\lambda_i = 0$,

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11}\\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n}\\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11}\\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n}\\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.

Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$ linear unabhängig, weil in der Linearkombination

$\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{rk(A)} b_{rk(A)} + \mu b = \vec{0}$

ist $\mu = 0$, (sonst kann man b als eine Linearkombination von $b \in B'$ darstellen), und dann sind $\lambda_i = 0$, weil b_i linearunabhängig sind.

Dann ist die Dimension von

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A,b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in
$span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.
Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$ linear unabhängig, weil in der Linearkombination
$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_{rk(A)} b_{rk(A)} + \mu b = \vec{0}$
ist $\mu = 0$, (sonst kann man b als eine Linearkombination von $b \in B'$ darstellen), und dann sind $\lambda_i = 0$, weil b_i linearunabhängig sind.
Dann ist die Dimension von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b\right\}\right)$

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*
Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$
Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in
$span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.
Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$ linear unabhängig, weil in der Linearkombination
$\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{rk(A)} b_{rk(A)} + \mu b = \vec{0}$
ist $\mu = 0$, (sonst kann man b als eine Linearkombination von $b \in B'$ darstellen), und dann sind $\lambda_i = 0$, weil b_i linearunabhängig sind.
Dann ist die Dimension von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b\right\}\right)$ mindestens $rk(A) + 1$.

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in

$$span\left(\left\{\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right).$$

Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.

Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$ linear unabhängig, weil in der Linearkombination

$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{rk(A)} b_{rk(A)} + \mu b = \vec{0}$

ist $\mu = 0$, (sonst kann man b als eine Linearkombination von $b \in B'$ darstellen), und dann sind $\lambda_i = 0$, weil b_i linearunabhängig sind.

Dann ist die Dimension von $span\left(\left\{\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}, b\right\}\right)$ mindestens $rk(A) + 1$. Widerspruch. $\square$

Hilfsaussage $rk(A) = rk((A, b)) \iff$ *b ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

Beweis der Hilfaussage $\Longrightarrow$

Die Spalten von A bilden eine erzeugende Menge in $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$. Nach Satz 26 kann man aus Spalten von A eine Basis B' von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right\}\right)$ auswählen, nach Def. 39 ist die Anzahl von Elementen in der Basis gleich $rk(A)$.

Es genügt zu zeigen: b ist eine Linearkombination der Basiselementen aus B'. Widerspruchsbeweis. Angenommen, b ist keine Linearkombination der Basiselementen. Dann ist die Menge $B' \cup \{b\}$ linear unabhängig, weil in der Linearkombination

$\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_{rk(A)} b_{rk(A)} + \mu b = \vec{0}$

ist $\mu = 0$, (sonst kann man b als eine Linearkombination von $b \in B'$ darstellen), und dann sind $\lambda_i = 0$, weil b_i linearunabhängig sind.

Dann ist die Dimension von $span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, b\right\}\right)$ mindestens $rk(A) + 1$. Widerspruch. $\square$

Beweis des Satzes 47:

$$=$$

Beweis des Satzes 47: (a):

$$=$$

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar

$$=$$

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$

$$=$$

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$=$$

$$,$$

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=$$

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$,$$

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$=$$

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten

$$=$$

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$

$$=$$

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

$=$

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b):

$$=$$

$$,$$

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$.

$$=$$

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = \qquad =$

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.
Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b =$

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$,

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$.

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt:

,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt: ist $v \in Kern_{f_A}$, ,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt: ist $v \in Kern_{f_A}$, so ist $A(\tilde{x} + v) =$,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.
Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt: ist $v \in Kern_{f_A}$, so ist $A(\tilde{x} + v) = A\tilde{x} + Av$,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt: ist $v \in Kern_{f_A}$, so ist $A(\tilde{x} + v) = A\tilde{x} + Av = b + 0$,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt: ist $v \in Kern_{f_A}$, so ist $A(\tilde{x} + v) = A\tilde{x} + Av = b + 0 = b$,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + ... + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.
Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt: ist $v \in Kern_{f_A}$, so ist $A(\tilde{x} + v) = A\tilde{x} + Av = b + 0 = b$, also ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung.

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt: ist $v \in Kern_{f_A}$, so ist $A(\tilde{x} + v) = A\tilde{x} + Av = b + 0 = b$, also ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. $\square$

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.
Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt: ist $v \in Kern_{f_A}$, so ist $A(\tilde{x} + v) = A\tilde{x} + Av = b + 0 = b$, also ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. $\square$

Satz 47 (a):

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.
Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt: ist $v \in Kern_{f_A}$, so ist $A(\tilde{x} + v) = A\tilde{x} + Av = b + 0 = b$, also ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. $\square$

Satz 47 (a): Um zu prüfen, ob das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist,

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.
Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt: ist $v \in Kern_{f_A}$, so ist $A(\tilde{x} + v) = A\tilde{x} + Av = b + 0 = b$, also ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. $\square$

Satz 47 (a): Um zu prüfen, ob das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist, müssen wir $rk(A)$ und $rk((A, b))$ vergleichen.

Beweis des Satzes 47: (a): $Ax = b$ ist lösbar $\iff$ existiert ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\iff$ b ist eine Linearkombination von Spalten $\overset{\text{Hilfsaussage}}{\iff}$ $rk(A) = rk((A, b))$.

Beweis von (b): Seien $\tilde{x}, x$ Lösungen von $Ax = B$. Dann ist $A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = b - b = \vec{0}$, also $x - \tilde{x} \in Kern_{f_A}$. Ferner gilt: ist $v \in Kern_{f_A}$, so ist $A(\tilde{x} + v) = A\tilde{x} + Av = b + 0 = b$, also ist $\tilde{x} + v$ auch eine Lösung. $\square$

Satz 47 (a): Um zu prüfen, ob das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist, müssen wir $rk(A)$ und $rk((A, b))$ vergleichen. Sind sie gleich, so ist das System lösbar, sonst nicht.

Wiederholung – Vorl. 13

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m).

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall:

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):
Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.
Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.
Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen

idientifizieren:

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen idientifizieren: $f_{(a_1 \ \dots \ a_n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen idientifizieren: $f_{(a_1 \ \dots \ a_n)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1 \ \dots \ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen idientifizieren: $f_{(a_1 \ \dots \ a_n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$

Bsp.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen idientifizieren: $f_{(a_1 \ \dots \ a_n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$.

Bsp. Triviale Linearform $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen idientifizieren: $f_{(a_1 \; \dots \; a_n)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1 \; \dots \; a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Bsp. Triviale Linearform $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$. (Falls $V = \mathbb{K}^n$, ist deren Matrix $(0 \; \dots \; 0)$.)

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen idientifizieren: $f_{(a_1 \ \dots \ a_n)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1 \ \dots \ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Bsp. Triviale Linearform $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$. (Falls $V = \mathbb{K}^n$, ist deren Matrix $(0 \ \dots \ 0)$.)

Bsp.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen

idientifizieren: $f_{(a_1 \; \dots \; a_n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1 \; \dots \; a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$

Bsp. Triviale Linearform $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$. (Falls $V = \mathbb{K}^n$, ist deren Matrix $(0 \; \dots \; 0)$.)

Bsp. $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$,

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen idientifizieren: $f_{(a_1 \ \dots \ a_n)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1 \ \dots \ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Bsp. Triviale Linearform $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$. (Falls $V = \mathbb{K}^n$, ist deren Matrix $(0 \ \dots \ 0)$.)

Bsp. $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen idientifizieren: $f_{(a_1 \ \dots \ a_n)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1 \ \dots \ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$

Bsp. Triviale Linearform $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$. (Falls $V = \mathbb{K}^n$, ist deren Matrix $(0 \ \dots \ 0)$.)

Bsp. $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1$

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen idientifizieren: $f_{(a_1 \ \dots \ a_n)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1 \ \dots \ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Bsp. Triviale Linearform $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$. (Falls $V = \mathbb{K}^n$, ist deren Matrix $(0 \ \dots \ 0)$.)

Bsp. $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1$ ist ein Linearform

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen idientifizieren: $f_{(a_1 \ \dots \ a_n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$

Bsp. Triviale Linearform $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$. (Falls $V = \mathbb{K}^n$, ist deren Matrix $(0 \dots 0)$.)

Bsp. $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1$ ist ein Linearform mit Matrix $(1 \ 0 \ \dots \ 0)$.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen identifizieren: $f_{(a_1\ \dots\ a_n)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1\ \dots\ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Bsp. Triviale Linearform $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$. (Falls $V = \mathbb{K}^n$, ist deren Matrix $(0\ \dots\ 0)$.)

Bsp. $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1$ ist ein Linearform mit Matrix $(1\ 0\ \dots\ 0)$.

Bsp.

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen idientifizieren: $f_{(a_1 \ \dots \ a_n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$

Bsp. Triviale Linearform $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$. (Falls $V = \mathbb{K}^n$, ist deren Matrix $(0 \ \dots \ 0)$.)

Bsp. $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1$ ist ein Linearform mit Matrix $(1 \ 0 \ \dots \ 0)$.

Bsp. $\phi : \underbrace{\mathbb{K}[x]}_{\text{Raum der Polynome}} \longrightarrow \mathbb{K},$

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen idientifizieren: $f_{(a_1\ \dots\ a_n)}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1\ \dots\ a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Bsp. Triviale Linearform $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$. (Falls $V = \mathbb{K}^n$, ist deren Matrix $(0\ \dots\ 0)$.)

Bsp. $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1$ ist ein Linearform mit Matrix $(1\ 0\ \dots\ 0)$.

Bsp. $\phi : \underbrace{\mathbb{K}[x]}_{\text{Raum der Polynome}} \longrightarrow \mathbb{K}$, $\phi(P) = P(1)$

Geometrische Bedeutung des Zeilenrangs: Dualraum

Wiederholung – Vorl. 13 Seien V, U $\mathbb{K}-$Vektorräume (der Dimension n und m). Dann ist die Menge von linearen Abbildungen von V nach U auch ein Vektorraum (der Dimension $n \cdot m$):

Addition: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$. Multiplikation: $(\lambda \bullet f)(v) = \lambda \bullet (f(v))$.

Wichtiger Spezialfall: U sei $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Def. 39 Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Dualraum (bezeichn: V^*) ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{K} \equiv \mathbb{K}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen.

Bsp. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann man Linearformen mit $(1 \times n)-$ Matrizen identifizieren: $f_{(a_1 \ \dots \ a_n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (a_1 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$.

Bsp. Triviale Linearform $\mathbf{0} : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $\mathbf{0}(v) = 0$. (Falls $V = \mathbb{K}^n$, ist deren Matrix $(0 \ \dots \ 0)$.)

Bsp. $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1$ ist ein Linearform mit Matrix $(1 \ 0 \ \dots \ 0)$.

Bsp. $\phi : \underbrace{\mathbb{K}[x]}_{\text{Raum der Polynome}} \longrightarrow \mathbb{K}$, $\phi(P) = P(1)$ ist eine Linearform.

Dualbasis

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt:

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ & \end{cases}$

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\Bigg\{$

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \end{cases}$

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \end{cases}$

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) =$

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0}$$

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii)

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii) Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii) Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ. Sei $\lambda_i := \phi(b_i)$.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii) Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ. Sei $\lambda_i := \phi(b_i)$. Man betrachte die Linearform $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii) Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ. Sei $\lambda_i := \phi(b_i)$. Man betrachte die Linearform $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Dann gilt für jedes b_i:

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii) Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ. Sei $\lambda_i := \phi(b_i)$. Man betrachte die Linearform $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Dann gilt für jedes b_i:

$(\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*)(b_i) =$

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii) Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ. Sei $\lambda_i := \phi(b_i)$. Man betrachte die Linearform $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Dann gilt für jedes b_i:

$$(\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*)(b_i) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_i)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_i b_i^*(b_i)}_{=1} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_i)}_{=0} =$$

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii) Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ. Sei $\lambda_i := \phi(b_i)$. Man betrachte die Linearform $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Dann gilt für jedes b_i:

$$(\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*)(b_i) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_i)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_i b_i^*(b_i)}_{=1} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_i)}_{=0} = \lambda_i =$$

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii) Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ. Sei $\lambda_i := \phi(b_i)$. Man betrachte die Linearform $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Dann gilt für jedes b_i:

$$(\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*)(b_i) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_i)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_i b_i^*(b_i)}_{=1} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_i)}_{=0} = \lambda_i = \phi(b_i).$$

Da die Linearformen ϕ und $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$ auf Basisvektoren zusammenfallen,

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii) Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ. Sei $\lambda_i := \phi(b_i)$. Man betrachte die Linearform $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Dann gilt für jedes b_i:

$$(\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*)(b_i) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_i)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_i b_i^*(b_i)}_{=1} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_i)}_{=0} = \lambda_i = \phi(b_i).$$

Da die Linearformen ϕ und $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$ auf Basisvektoren zusammenfallen, sind sie nach Satz 30 gleich.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii) Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ. Sei $\lambda_i := \phi(b_i)$. Man betrachte die Linearform $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Dann gilt für jedes b_i:

$$(\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*)(b_i) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_i)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_i b_i^*(b_i)}_{=1} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_i)}_{=0} = \lambda_i = \phi(b_i).$$

Da die Linearformen ϕ und $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$ auf Basisvektoren zusammenfallen, sind sie nach Satz 30 gleich. $\square$

Folgerung.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii) Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ. Sei $\lambda_i := \phi(b_i)$. Man betrachte die Linearform $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Dann gilt für jedes b_i:

$$(\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*)(b_i) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_i)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_i b_i^*(b_i)}_{=1} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_i)}_{=0} = \lambda_i = \phi(b_i).$$

Da die Linearformen ϕ und $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$ auf Basisvektoren zusammenfallen, sind sie nach Satz 30 gleich. □

Folgerung. Ist V endlichdimensional, so sind V und V^* isomorph.

Dualbasis

Sei $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis in V. Nach Satz 30, für beliebiges $n-$Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ gibt genau eine Linearform ϕ sodass $\phi(b_i) = \lambda_i$.

Wir definieren b_i^* wie folgt: $b_i^*(b_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$.

Lemma 29 – Def.40 $(b_1^*, ..., b_n^*)$ ist eine Basis in V^*.

Beweis. Z.z.: $\{b_1^*, ..., b_n^*\}$ ist $\begin{cases} \text{(i)} & \text{linear unabhängig} \\ \text{(ii)} & \text{erzeugend} \end{cases}$.

(i) Angenommen, $\mathbf{0} = \lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Wir wenden diese Linearform an b_1 an.

$\mathbf{0}(b_1) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_1)}_{=\lambda_1} + \underbrace{\lambda_2 b_2^*(b_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_1)}_{=0} = 0$. Also, $\lambda_1 = 0$. Ähnlich sind alle $\lambda_i = 0$.

(ii) Wir erzeugen eine beliebige Linearform ϕ. Sei $\lambda_i := \phi(b_i)$. Man betrachte die Linearform $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$. Dann gilt für jedes b_i:

$$(\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*)(b_i) = \underbrace{\lambda_1 b_1^*(b_i)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_i b_i^*(b_i)}_{=1} + ... + \underbrace{\lambda_n b_n^*(b_i)}_{=0} = \lambda_i = \phi(b_i).$$

Da die Linearformen ϕ und $\lambda_1 b_1^* + ... + \lambda_n b_n^*$ auf Basisvektoren zusammenfallen, sind sie nach Satz 30 gleich. □

Folgerung. Ist V endlichdimensional, so sind V und V^* isomorph. (Falsch für einige unendlichdimensionale Vektorräume)

Bsp: Dualbasis zur Standardbasis in $\mathbb{K}^n$

Bsp: Dualbasis zur Standardbasis in $\mathbb{K}^n$

Wiederholung:

Bsp: Dualbasis zur Standardbasis in $\mathbb{K}^n$

Wiederholung: Wir identifizieren $(\mathbb{K}^n)^*$ mit $(1 \times n)$-Matrizen.

Bsp: Dualbasis zur Standardbasis in $\mathbb{K}^n$

Wiederholung: Wir identifizieren $(\mathbb{K}^n)^*$ mit $(1 \times n)$-Matrizen.

Frage: Sei $(e_1, ..., e_n)$ die Standardbasis in $\mathbb{K}^n$.

Bsp: Dualbasis zur Standardbasis in $\mathbb{K}^n$

Wiederholung: Wir identifizieren $(\mathbb{K}^n)^*$ mit $(1 \times n)$-Matrizen.

Frage: Sei $(e_1, ..., e_n)$ die Standardbasis in $\mathbb{K}^n$. Welche $(1 \times n)$-Matrizen sind $e_1^*, ..., e_n^*$?

Bsp: Dualbasis zur Standardbasis in $\mathbb{K}^n$

Wiederholung: Wir identifizieren $(\mathbb{K}^n)^*$ mit $(1 \times n)$-Matrizen.

Frage: Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis in $\mathbb{K}^n$. Welche $(1 \times n)$-Matrizen sind $e_1^*, \ldots, e_n^*$?

Nach Definition ist $e_1^*(e_i) = 0, \ldots, e_i^*(e_i) = 1, \ldots, e_n^*(e_i) = 0$,

Bsp: Dualbasis zur Standardbasis in $\mathbb{K}^n$

Wiederholung: Wir identifizieren $(\mathbb{K}^n)^*$ mit $(1 \times n)$-Matrizen.

Frage: Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis in $\mathbb{K}^n$. Welche $(1 \times n)$-Matrizen sind $e_1^*, \ldots, e_n^*$?

Nach Definition ist $e_1^*(e_i) = 0, \ldots, e_i^*(e_i) = 1, \ldots, e_n^*(e_i) = 0$, also ist $e_i^* = (0$

Bsp: Dualbasis zur Standardbasis in $\mathbb{K}^n$

Wiederholung: Wir identifizieren $(\mathbb{K}^n)^*$ mit $(1 \times n)$-Matrizen.

Frage: Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis in $\mathbb{K}^n$. Welche $(1 \times n)$-Matrizen sind $e_1^*, \ldots, e_n^*$?

Nach Definition ist $e_1^*(e_i) = 0, \ldots, e_i^*(e_i) = 1, \ldots, e_n^*(e_i) = 0$, also ist $e_i^* = (0 \ \ldots$

Bsp: Dualbasis zur Standardbasis in $\mathbb{K}^n$

Wiederholung: Wir identifizieren $(\mathbb{K}^n)^*$ mit $(1 \times n)$-Matrizen.

Frage: Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis in $\mathbb{K}^n$. Welche $(1 \times n)$-Matrizen sind $e_1^*, \ldots, e_n^*$?

Nach Definition ist $e_1^*(e_i) = 0, \ldots, e_i^*(e_i) = 1, \ldots, e_n^*(e_i) = 0$, also ist $e_i^* = (0 \; \ldots \; \underbrace{1}_{i-\text{te Stelle}} \; \ldots$

Bsp: Dualbasis zur Standardbasis in $\mathbb{K}^n$

Wiederholung: Wir identifizieren $(\mathbb{K}^n)^*$ mit $(1 \times n)$-Matrizen.

Frage: Sei $(e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis in $\mathbb{K}^n$. Welche $(1 \times n)$-Matrizen sind $e_1^*, \dots, e_n^*$?

Nach Definition ist $e_1^*(e_i) = 0, \dots, e_i^*(e_i) = 1, \dots, e_n^*(e_i) = 0$, also ist $e_i^* = (0 \ \dots \ \underbrace{1}_{i-\text{te Stelle}} \ \dots \ 0)$.

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume,

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \rightarrow V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)$

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die **Dualabbildung** $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v)$

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) =$

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) =$

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) =$

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die
Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) =$

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die
Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) =$

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) = \lambda\psi(f(v))$.

Satz 48

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) = \lambda\psi(f(v))$.

Satz 48 – Geometrische Bedeutung der Transponieren

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) = \lambda\psi(f(v))$.

Satz 48 – Geometrische Bedeutung der Transponieren Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $(v_1, ..., v_m)$,

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) = \lambda\psi(f(v))$.

Satz 48 – Geometrische Bedeutung der Transponieren Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $(v_1, \ldots, v_m)$, $(u_1, \ldots, u_n)$,

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) = \lambda\psi(f(v))$.

Satz 48 – Geometrische Bedeutung der Transponieren Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$, V^*, U^*

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) = \lambda\psi(f(v))$.

Satz 48 – Geometrische Bedeutung der Transponieren Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$, V^*, U^* seien die Dualräume,

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die
Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) = \lambda\psi(f(v))$.

Satz 48 – Geometrische Bedeutung der Transponieren Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $(v_1, \ldots, v_m)$, $(u_1, \ldots, u_n)$, V^*, U^* seien die Dualräume, $f : U \to V$ sei eine lineare Abbildung.

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) = \lambda\psi(f(v))$.

Satz 48 – Geometrische Bedeutung der Transponieren Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$, V^*, U^* seien die Dualräume, $f : U \to V$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt:

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) = \lambda\psi(f(v))$.

Satz 48 – Geometrische Bedeutung der Transponieren Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $(v_1, \ldots, v_m)$, $(u_1, \ldots, u_n)$, V^*, U^* seien die Dualräume, $f : U \to V$ sei eine lineare Abbildung.
Dann gilt: Ist A die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl.

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die
Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) = \lambda\psi(f(v))$.

Satz 48 – Geometrische Bedeutung der Transponieren Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $(v_1, \ldots, v_m)$, $(u_1, \ldots, u_n)$, V^*, U^* seien die Dualräume, $f : U \to V$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist A die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, \ldots, v_m)$, $(u_1, \ldots, u_n)$, so ist A^t die darstellende Matrix der Dualabbildung f^* bzgl. Dualbasen $(v_1^*, \ldots, v_m^*)$, $(u_1^*, \ldots, u_n^*)$.

Duale Abbildung

Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume, V^*, U^* die Dualräume.
Für jede lineare Abbildung $f : V \to U$ definiere man die Dualabbildung $f^* : U^* \to V^*$ wie folgt:
Für jedes $\psi \in U^*$ setze $f^*(\psi)(v) = \psi(f(v))$.
Das ist eine lineare Abbildung:

- $f^*(\psi_1 + \psi_2)(v) = (\psi_1 + \psi_2)(f(v)) = \psi_1(f(v)) + \psi_2(f(v)) = f^*(\psi_1)(v) + f^*(\psi_2)(v)$
- $f^*(\lambda\psi)(v) = (\lambda\psi)(f(v)) = \lambda\psi(f(v))$.

Satz 48 – Geometrische Bedeutung der Transponieren Seien V, U $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen $(v_1, \ldots, v_m)$, $(u_1, \ldots, u_n)$, V^*, U^* seien die Dualräume, $f : U \to V$ sei eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist A die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, \ldots, v_m)$, $(u_1, \ldots, u_n)$, so ist A^t die darstellende Matrix der Dualabbildung f^* bzgl. Dualbasen $(v_1^*, \ldots, v_m^*)$, $(u_1^*, \ldots, u_n^*)$.

Satz 48

Satz 48 $\left(Mat_{(u_1,\ldots,u_n)}^{(v_1,\ldots,v_m)}(f)\right)^t$

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,\dots,v_m)}_{(u_1,\dots,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,\dots,u_n^*)}_{(v_1^*,\dots,v_m^*)}(f^*)$

Satz 48 $\left(Mat_{(u_1,\ldots,u_n)}^{(v_1,\ldots,v_m)}(f)\right)^t = Mat_{(v_1^*,\ldots,v_m^*)}^{(u_1^*,\ldots,u_n^*)}(f^*)$

Beweis.

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,\ldots,v_m)}_{(u_1,\ldots,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,\ldots,u_n^*)}_{(v_1^*,\ldots,v_m^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, \ldots, v_m)$, $(u_1, \ldots, u_n)$.

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,\ldots,v_m)}_{(u_1,\ldots,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,\ldots,u_n^*)}_{(v_1^*,\ldots,v_m^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.

Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$,

Satz 48 $\left(Mat_{(u_1,\ldots,u_n)}^{(v_1,\ldots,v_m)}(f)\right)^t = Mat_{(v_1^*,\ldots,v_m^*)}^{(u_1^*,\ldots,u_n^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.

Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha$.

Satz 48 $\left(Mat_{(u_1,\dots,u_n)}^{(v_1,\dots,v_m)}(f)\right)^t = Mat_{(v_1^*,\dots,v_m^*)}^{(u_1^*,\dots,u_n^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.
Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha j} u_\alpha$.

Aus Def. 39 folgt:

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,\ldots,v_m)}_{(u_1,\ldots,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,\ldots,u_n^*)}_{(v_1^*,\ldots,v_m^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, \ldots, v_m)$, $(u_1, \ldots, u_n)$.

Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha$.

Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$.

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,\dots,v_m)}_{(u_1,\dots,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,\dots,u_n^*)}_{(v_1^*,\dots,v_m^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.

Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha j} u_\alpha$.

Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi = \lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_m v_m^*$,

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,\ldots,v_m)}_{(u_1,\ldots,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,\ldots,u_n^*)}_{(v_1^*,\ldots,v_m^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.

Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha j} u_\alpha$.

Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi = \lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_m v_m^*$, so ist

$\phi(v_i) =$

Satz 48 $\left(Mat_{(u_1,\dots,u_n)}^{(v_1,\dots,v_m)}(f)\right)^t = Mat_{(v_1^*,\dots,v_m^*)}^{(u_1^*,\dots,u_n^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A=(a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1,\dots,v_m)$, $(u_1,\dots,u_n)$.

Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j)=\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j}u_\alpha$.

Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi\in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi=\lambda_1 v_1^*+\dots+\lambda_m v_m^*$, so ist

$\phi(v_i)=\lambda_1 v_1^*(v_i)+\dots+\lambda_i v_i^*(v_i)+\dots+\lambda_m v_m^*(v_i)=$

Satz 48 $\left(Mat_{(u_1,\ldots,u_n)}^{(v_1,\ldots,v_m)}(f)\right)^t = Mat_{(v_1^*,\ldots,v_m^*)}^{(u_1^*,\ldots,u_n^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.
Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha$.
Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi = \lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_m v_m^*$, so ist
$\phi(v_i) = \lambda_1 v_1^*(v_i) + ... + \lambda_i v_i^*(v_i) + ... + \lambda_m v_m^*(v_i) = \lambda_i$.
Dann ist das $(j, i)-$ Eintrag der Matrix der Dualabbildung gleich

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,\ldots,v_m)}_{(u_1,\ldots,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,\ldots,u_n^*)}_{(v_1^*,\ldots,v_m^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.

Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha j} u_\alpha$.

Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi = \lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_m v_m^*$, so ist

$\phi(v_i) = \lambda_1 v_1^*(v_i) + ... + \lambda_i v_i^*(v_i) + ... + \lambda_m v_m^*(v_i) = \lambda_i$.

Dann ist das $(j, i)-$ Eintrag der Matrix der Dualabbildung gleich $j-$ten Koordianate von $f^*(u_i^*)$

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,\ldots,v_m)}_{(u_1,\ldots,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,\ldots,u_n^*)}_{(v_1^*,\ldots,v_m^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.

Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha$.

Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi = \lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_m v_m^*$, so ist
$\phi(v_i) = \lambda_1 v_1^*(v_i) + ... + \lambda_i v_i^*(v_i) + ... + \lambda_m v_m^*(v_i) = \lambda_i$.

Dann ist das $(j, i)-$ Eintrag der Matrix der Dualabbildung gleich $j-$ten Koordianate von $f^*(u_i^*)$ gleich $f^*(u_i^*)(v_j)$

Satz 48 $\left(Mat_{(u_1,\dots,u_n)}^{(v_1,\dots,v_m)}(f)\right)^t = Mat_{(v_1^*,\dots,v_m^*)}^{(u_1^*,\dots,u_n^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A=(a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1,...,v_m)$, $(u_1,...,u_n)$.
Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j)=\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j}u_\alpha$.

Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi\in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi=\lambda_1 v_1^*+...+\lambda_m v_m^*$, so ist
$\phi(v_i)=\lambda_1 v_1^*(v_i)+...+\lambda_i v_i^*(v_i)+...+\lambda_m v_m^*(v_i)=\lambda_i$.
Dann ist das $(j,i)-$ Eintrag der Matrix der Dualabbildung gleich $j-$ten Koordianate von $f^*(u_i^*)$ gleich $f^*(u_i^*)(v_j) \overset{\text{Def. Dualabbildung}}{=}$

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,\ldots,v_m)}_{(u_1,\ldots,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,\ldots,u_n^*)}_{(v_1^*,\ldots,v_m^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.
Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha$.
Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi = \lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_m v_m^*$, so ist
$\phi(v_i) = \lambda_1 v_1^*(v_i) + ... + \lambda_i v_i^*(v_i) + ... + \lambda_m v_m^*(v_i) = \lambda_i$.
Dann ist das $(j, i)-$ Eintrag der Matrix der Dualabbildung gleich $j-$ten Koordianate von $f^*(u_i^*)$ gleich $f^*(u_i^*)(v_j) \overset{\text{Def. Dualabbildung}}{=} u_i^* f(v_j)$

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,...,v_m)}_{(u_1,...,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,...,u_n^*)}_{(v_1^*,...,v_m^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.
Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha$.

Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi = \lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_m v_m^*$, so ist
$\phi(v_i) = \lambda_1 v_1^*(v_i) + ... + \lambda_i v_i^*(v_i) + ... + \lambda_m v_m^*(v_i) = \lambda_i$.
Dann ist das $(j, i)-$ Eintrag der Matrix der Dualabbildung gleich $j-$ten Koordianate von $f^*(u_i^*)$ gleich $f^*(u_i^*)(v_j) \overset{\text{Def. Dualabbildung}}{=} u_i^* f(v_j)$

$=$

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,\dots,v_m)}_{(u_1,\dots,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,\dots,u_n^*)}_{(v_1^*,\dots,v_m^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.

Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha$.

Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi = \lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_m v_m^*$, so ist

$\phi(v_i) = \lambda_1 v_1^*(v_i) + ... + \lambda_i v_i^*(v_i) + ... + \lambda_m v_m^*(v_i) = \lambda_i$.

Dann ist das $(j, i)-$ Eintrag der Matrix der Dualabbildung gleich $j-$ten Koordianate von $f^*(u_i^*)$ gleich $f^*(u_i^*)(v_j) \overset{\text{Def. Dualabbildung}}{=} u_i^* f(v_j)$

$= \ u_i^*(\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha) \overset{\text{Linearität}}{=}$

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,\dots,v_m)}_{(u_1,\dots,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,\dots,u_n^*)}_{(v_1^*,\dots,v_m^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.

Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha$.

Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi = \lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_m v_m^*$, so ist

$\phi(v_i) = \lambda_1 v_1^*(v_i) + ... + \lambda_i v_i^*(v_i) + ... + \lambda_m v_m^*(v_i) = \lambda_i$.

Dann ist das $(j, i)-$ Eintrag der Matrix der Dualabbildung gleich $j-$ten Koordianate von $f^*(u_i^*)$ gleich $f^*(u_i^*)(v_j) \overset{\text{Def. Dualabbildung}}{=} u_i^* f(v_j)$

$= u_i^*(\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha) \overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_i^*(u_\alpha) \overset{\text{Def. 39}}{=}$

Satz 48 $\left(Mat_{(u_1,\dots,u_n)}^{(v_1,\dots,v_m)}(f)\right)^t = Mat_{(v_1^*,\dots,v_m^*)}^{(u_1^*,\dots,u_n^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.
Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha$.
Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi = \lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_m v_m^*$, so ist
$\phi(v_i) = \lambda_1 v_1^*(v_i) + ... + \lambda_i v_i^*(v_i) + ... + \lambda_m v_m^*(v_i) = \lambda_i$.
Dann ist das $(j, i)-$ Eintrag der Matrix der Dualabbildung gleich $j-$ten Koordianate von $f^*(u_i^*)$ gleich $f^*(u_i^*)(v_j) \overset{\text{Def. Dualabbildung}}{=} u_i^* f(v_j)$
$= u_i^*(\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha) \overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_i^*(u_\alpha) \overset{\text{Def. 39}}{=} a_{ij}$.
Also, $(j, i)-$ Eintrag der darstellenden Matrix der Abbildung f^* ist a_{ij},

Satz 48 $\left(Mat^{(v_1,\ldots,v_m)}_{(u_1,\ldots,u_n)}(f)\right)^t = Mat^{(u_1^*,\ldots,u_n^*)}_{(v_1^*,\ldots,v_m^*)}(f^*)$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen $(v_1, ..., v_m)$, $(u_1, ..., u_n)$.

Nach Definition ist die $j-$te Spalte von A der Koordianatenvektor von $f(v_j)$, d.h., $f(v_j) = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha$.

Aus Def. 39 folgt: die $i-$Koordinaten von $\phi \in V^*$ist $\phi(v_i)$. In der Tat, ist $\phi = \lambda_1 v_1^* + ... + \lambda_m v_m^*$, so ist

$\phi(v_i) = \lambda_1 v_1^*(v_i) + ... + \lambda_i v_i^*(v_i) + ... + \lambda_m v_m^*(v_i) = \lambda_i$.

Dann ist das $(j,i)-$ Eintrag der Matrix der Dualabbildung gleich $j-$ten Koordianate von $f^*(u_i^*)$ gleich $f^*(u_i^*)(v_j) \overset{\text{Def. Dualabbildung}}{=} u_i^* f(v_j)$

$= u_i^*(\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_\alpha) \overset{\text{Linearität}}{=} \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} u_i^*(u_\alpha) \overset{\text{Def. 39}}{=} a_{ij}$.

Also, $(j,i)-$ Eintrag der darstellenden Matrix der Abbildung f^* ist a_{ij}, $\square$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Beweis:

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_A^*})$.
Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t)$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=}$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen):

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_A{}^*})$.
Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_A{}^*})$.
Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis:

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_A{}^*})$.

Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_A{}^*})$.

Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.
$(f_A \circ f_B)^*$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs): $rk_z(A) = dim(Bild_{f_A{}^*})$.

Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_A{}^*})$.

Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.
$(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$,

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs): $rk_z(A) = dim(Bild_{f_A{}^*})$.

Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_A{}^*})$.

Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$. $(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$(f_A \circ f_B)^*(\phi)(w)$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs): $rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$. $(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$$(f_A \circ f_B)^*(\phi)(w) \quad = \quad \phi(f_A \circ f_B(w)) \quad =$$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_A^*})$.
Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_A^*})$.
Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.
$(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$$(f_A \circ f_B)^*(\phi)(w) \quad = \quad \phi(f_A \circ f_B(w)) \quad = \quad \qquad \quad = \quad \phi(ABw)$$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.
$(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$$(f_A \circ f_B)^*(\phi)(w) \quad = \quad \phi(f_A \circ f_B(w)) \quad = \quad\quad = \quad \phi(ABw)$$

$$\|$$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.
$(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$$\begin{array}{ccccccc} (f_A \circ f_B)^*(\phi)(w) & = & \phi(f_A \circ f_B(w)) & = & & = & \phi(ABw) \\ & & & & & & \| \\ f_B^* \circ f_A^*(\phi)(w) & = & & & & & \end{array}$$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \stackrel{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.
$(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$$\begin{array}{ccccccc}
(f_A \circ f_B)^*(\phi)(w) & = & \phi(f_A \circ f_B(w)) & = & & = & \phi(ABw) \\
 & & & & & & \| \\
f_B^* \circ f_A^*(\phi)(w) & = & f_B^*(f_A^*(\phi)(w)) & = & & &
\end{array}$$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs): $rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$. $(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$$\begin{array}{rclclcl}
(f_A \circ f_B)^*(\phi)(w) & = & \phi(f_A \circ f_B(w)) & = & & = & \phi(ABw) \\
 & & & & & & \| \\
f_B^* \circ f_A^*(\phi)(w) & = & f_B^*(f_A^*(\phi)(w)) & = & f_A^*(\phi)(Bw)) & = &
\end{array}$$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.
$(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$$\begin{array}{ccccccccc} (f_A \circ f_B)^*(\phi)(w) & = & \phi(f_A \circ f_B(w)) & = & & = & \phi(ABw) \\ & & & & & & \| \\ f_B^* \circ f_A^*(\phi)(w) & = & f_B^*(f_A^*(\phi)(w)) & = & f_A^*(\phi)(Bw)) & = & \phi(ABw) \end{array}.$$

Dann ist die Matrix von $(f_A \circ f_B)^*$,

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.
Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.
$(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$$\begin{array}{ccccccc} (f_A \circ f_B)^*(\phi)(w) & = & \phi(f_A \circ f_B(w)) & = & & = & \phi(ABw) \\ & & & & & & \| \\ f_B^* \circ f_A^*(\phi)(w) & = & f_B^*(f_A^*(\phi)(w)) & = & f_A^*(\phi)(Bw)) & = & \phi(ABw) \end{array}.$$

Dann ist die Matrix von $(f_A \circ f_B)^*$,also $(AB)^t$, gleich die Matrix von $f_B^* \circ f_A^*$, also

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.
$(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$$\begin{array}{ccccccc} (f_A \circ f_B)^*(\phi)(w) & = & \phi(f_A \circ f_B(w)) & = & & = & \phi(ABw) \\ & & & & & & \| \\ f_B^* \circ f_A^*(\phi)(w) & = & f_B^*(f_A^*(\phi)(w)) & = & f_A^*(\phi)(Bw)) & = & \phi(ABw) \end{array} .$$

Dann ist die Matrix von $(f_A \circ f_B)^*$,also $(AB)^t$, gleich die Matrix von $f_B^* \circ f_A^*$, also $B^t A^t$.

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.
$(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$$\begin{array}{rclclcl}
(f_A \circ f_B)^*(\phi)(w) & = & \phi(f_A \circ f_B(w)) & = & & = & \phi(ABw) \\
 & & & & & & \| \\
f_B^* \circ f_A^*(\phi)(w) & = & f_B^*(f_A^*(\phi)(w)) & = & f_A^*(\phi)(Bw)) & = & \phi(ABw)
\end{array}.$$

Dann ist die Matrix von $(f_A \circ f_B)^*$,also $(AB)^t$, gleich die Matrix von $f_B^* \circ f_A^*$, also $B^t A^t$.

$\square$

Folgerung A (Geometrische Bedeutung des Zeilerangs):
$rk_z(A) = dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Beweis: $rk_z(A) = rk_s(A^t) \overset{\text{Lemma 28}}{=} dim(Bild_{f_{A^*}})$.

Folgerung B (Rechnenregel für Multiplizieren von transponierte Matrizen): $(AB)^t = B^t A^t$.

Beweis: Seien A und B die Matrizen der Abbildungen $W \xrightarrow{f_B} V \xrightarrow{f_A} U$.
$(f_A \circ f_B)^* = f_B^* \circ f_A^*$, weil für jede $\phi \in U^*$ und jeden $w \in W$ v ist

$$\begin{array}{ccccccc} (f_A \circ f_B)^*(\phi)(w) & = & \phi(f_A \circ f_B(w)) & = & & = & \phi(ABw) \\ & & & & & & \| \\ f_B^* \circ f_A^*(\phi)(w) & = & f_B^*(f_A^*(\phi)(w)) & = & f_A^*(\phi)(Bw)) & = & \phi(ABw) \end{array}.$$

Dann ist die Matrix von $(f_A \circ f_B)^*$,also $(AB)^t$, gleich die Matrix von $f_B^* \circ f_A^*$, also $B^t A^t$.

$\square$

Bemerkung. Selbstverständlcih, kann man Folgerung B direkt beweisen.

Folgerung C:

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis.

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild^*_f)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt.

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D:

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$.

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_z(B^{-1}AC) = rk_z(A)$.

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_z(B^{-1}AC) = rk_z(A)$.
Beweis.

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_z(B^{-1}AC) = rk_z(A)$.
Beweis. Es genügend zu zeigen: $rk_s((B^{-1}AC)^t) = rk_s(A^t)$.

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_z(B^{-1}AC) = rk_z(A)$.
Beweis. Es genügend zu zeigen: $rk_s((B^{-1}AC)^t) = rk_s(A^t)$.
Nach Folgerung B ist $(B^{-1}AC)^t =$

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_z(B^{-1}AC) = rk_z(A)$.
Beweis. Es genügend zu zeigen: $rk_s((B^{-1}AC)^t) = rk_s(A^t)$.
Nach Folgerung B ist $(B^{-1}AC)^t = \underbrace{C^t}_{B'} A^t \underbrace{(B^{-1})^t}_{C'}$

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_z(B^{-1}AC) = rk_z(A)$.
Beweis. Es genügend zu zeigen: $rk_s((B^{-1}AC)^t) = rk_s(A^t)$.
Nach Folgerung B ist $(B^{-1}AC)^t = \underbrace{C^t}_{B'} A^t \underbrace{(B^{-1})^t}_{C'} = B'A^tC'$.

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_z(B^{-1}AC) = rk_z(A)$.
Beweis. Es genügend zu zeigen: $rk_s((B^{-1}AC)^t) = rk_s(A^t)$.
Nach Folgerung B ist $(B^{-1}AC)^t = \underbrace{C^t}_{B'} A^t \underbrace{(B^{-1})^t}_{C'} = B'A^tC'$.

$$rk_s(B'A^tC')$$

Nach Folgerung B aus Lemma 28 ist

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_z(B^{-1}AC) = rk_z(A)$.
Beweis. Es genügend zu zeigen: $rk_s((B^{-1}AC)^t) = rk_s(A^t)$.
Nach Folgerung B ist $(B^{-1}AC)^t = \underbrace{C^t}_{B'} A^t \underbrace{(B^{-1})^t}_{C'} = B'A^tC'$.

Nach Folgerung B aus Lemma 28 ist

$$rk_s(B'A^tC') \quad = \quad rk_s(A^t)$$

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_z(B^{-1}AC) = rk_z(A)$.
Beweis. Es genügend zu zeigen: $rk_s((B^{-1}AC)^t) = rk_s(A^t)$.
Nach Folgerung B ist $(B^{-1}AC)^t = \underbrace{C^t}_{B'} A^t \underbrace{(B^{-1})^t}_{C'} = B'A^tC'$.

Nach Folgerung B aus Lemma 28 ist
$$\begin{array}{ccc} rk_s(B'A^tC') & = & rk_s(A^t) \\ & & \| \\ rk_z(B^{-1}AC) & & \end{array}$$

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_z(B^{-1}AC) = rk_z(A)$.
Beweis. Es genügend zu zeigen: $rk_s((B^{-1}AC)^t) = rk_s(A^t)$.
Nach Folgerung B ist $(B^{-1}AC)^t = \underbrace{C^t}_{B'} A^t \underbrace{(B^{-1})^t}_{C'} = B'A^tC'$.

Nach Folgerung B aus Lemma 28 ist
$$\begin{array}{ccc} rk_s(B'A^tC') & = & rk_s(A^t) \\ & & \| \\ rk_z(B^{-1}AC) & = & rk_z(A) \end{array},$$

Folgerung C: Zeilenrang der darstellende Matrix einer Abbildung hängt nicht von der Wahl der Basen (in U und V) ab.

Beweis. Weil $dim(Bild_f^*)$ nicht von der Wahl von Basen abhängt. $\square$

Folgerung D: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{K})$, seien $B \in GL(n, \mathbb{K})$, $C \in Gl(m, \mathbb{K})$. (Also, B, C sind quadratisch und invertierbar). Dann gilt:
$rk_z(B^{-1}AC) = rk_z(A)$.
Beweis. Es genügend zu zeigen: $rk_s((B^{-1}AC)^t) = rk_s(A^t)$.
Nach Folgerung B ist $(B^{-1}AC)^t = \underbrace{C^t}_{B'} A^t \underbrace{(B^{-1})^t}_{C'} = B'A^tC'$.

Nach Folgerung B aus Lemma 28 ist $\begin{array}{ccc} rk_s(B'A^tC') & = & rk_s(A^t) \\ & & \| \\ rk_z(B^{-1}AC) & = & rk_z(A) \end{array}$, $\square$