Wiederholung:

Def. 35

Wiederholung:

Def. 35 *Determinantefunktion ist eine Abbildung*
$det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

Wiederholung:

Def. 35 *Determinantefunktion ist eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *falls sie*

D1 linear in jeder Zeile ist,

D2 alternierend

Wiederholung:

Def. 35 *Determinantefunktion ist eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *falls sie*

- D1 linear in jeder Zeile ist,
- D2 alternierend (d.h., stimmen zwei Zeilen von A überein, dann ist $det(A) = 0$.)
- D3 normiert ist, d.h.,

Wiederholung:

Def. 35 *Determinantefunktion ist eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *falls sie*

- D1 linear in jeder Zeile ist,
- D2 alternierend (d.h., stimmen zwei Zeilen von A überein, dann ist $det(A) = 0$.)
- D3 normiert ist, d.h., $det(Id) = 1$

  Aus Eigenschaften folgt imbesonders, dass

- D5 nach elementare Zeilenumformung (S3) (zwei Zeilen umtauschen)

Wiederholung:

Def. 35 *Determinantefunktion ist eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *falls sie*

D1 linear in jeder Zeile ist,

D2 alternierend (d.h., stimmen zwei Zeilen von A überein, dann ist $det(A) = 0$.)

D3 normiert ist, d.h., $det(Id) = 1$

Aus Eigenschaften folgt imbesonders, dass

D5 nach elementare Zeilenumformung (S3) (zwei Zeilen umtauschen)wird die Detemninante mit (-1) multipliziert,

D6 elementare Zeilenumformung (S1)

Wiederholung:

Def. 35 *Determinantefunktion ist eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *falls sie*

D1 linear in jeder Zeile ist,

D2 alternierend (d.h., stimmen zwei Zeilen von A überein, dann ist $det(A) = 0$.)

D3 normiert ist, d.h., $det(Id) = 1$

Aus Eigenschaften folgt imbesonders, dass

D5 nach elementare Zeilenumformung (S3) (zwei Zeilen umtauschen)wird die Detemninante mit (-1) multipliziert,

D6 elementare Zeilenumformung (S1) (λ- facher einer Zeile zur anderen addieren) ändert die Determinantefunktion nicht.

Wiederholung:

Def. 35 *Determinantefunktion ist eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *falls sie*

- D1 linear in jeder Zeile ist,
- D2 alternierend (d.h., stimmen zwei Zeilen von A überein, dann ist $det(A) = 0$.)
- D3 normiert ist, d.h., $det(Id) = 1$

  Aus Eigenschaften folgt imbesonders, dass

- D5 nach elementare Zeilenumformung (S3) (zwei Zeilen umtauschen)wird die Detemninante mit (-1) multipliziert,
- D6 elementare Zeilenumformung (S1) (λ- facher einer Zeile zur anderen addieren) ändert die Determinantefunktion nicht.
- D7 Laplace-Spaltenentwicklung: $det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$.

Wiederholung:

Def. 35 *Determinantefunktion ist eine Abbildung*
$det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *falls sie*

D1 linear in jeder Zeile ist,

D2 alternierend (d.h., stimmen zwei Zeilen von A überein, dann ist $det(A) = 0$.)

D3 normiert ist, d.h., $det(Id) = 1$

Aus Eigenschaften folgt imbesonders, dass

D5 nach elementare Zeilenumformung (S3) (zwei Zeilen umtauschen)wird die Detemninante mit (-1) multipliziert,

D6 elementare Zeilenumformung (S1) (λ- facher einer Zeile zur anderen addieren) ändert die Determinantefunktion nicht.

D7 Laplace-Spaltenentwicklung: $det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$.

- $det(AB) = det(A)det(B)$,

Wiederholung:

Def. 35 *Determinantefunktion ist eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *falls sie*

- D1 linear in jeder Zeile ist,
- D2 alternierend (d.h., stimmen zwei Zeilen von A überein, dann ist $det(A) = 0$.)
- D3 normiert ist, d.h., $det(Id) = 1$

  Aus Eigenschaften folgt imbesonders, dass

- D5 nach elementare Zeilenumformung (S3) (zwei Zeilen umtauschen)wird die Detemninante mit (-1) multipliziert,
- D6 elementare Zeilenumformung (S1) (λ- facher einer Zeile zur anderen addieren) ändert die Determinantefunktion nicht.
- D7 Laplace-Spaltenentwicklung: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$.

- $det(AB) = det(A)det(B)$, d.h., $det_{|GL(n,K)} : GL(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ ist ein Homomorphismus.

Wiederholung:

Def. 35 *Determinantefunktion ist eine Abbildung*
$det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *falls sie*

D1 linear in jeder Zeile ist,

D2 alternierend (d.h., stimmen zwei Zeilen von A überein, dann ist $det(A) = 0$.)

D3 normiert ist, d.h., $det(Id) = 1$

Aus Eigenschaften folgt imbesonders, dass

D5 nach elementare Zeilenumformung (S3) (zwei Zeilen umtauschen)wird die Detemninante mit (-1) multipliziert,

D6 elementare Zeilenumformung (S1) (λ- facher einer Zeile zur anderen addieren) ändert die Determinantefunktion nicht.

D7 Laplace-Spaltenentwicklung: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$.

- $det(AB) = det(A)det(B)$, d.h., $det_{|GL(n,K)} : GL(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ ist ein Homomorphismus.

Solche Funktion existiert und ist eindeutig.

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)-

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n:

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen,

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen, dann Laplace-Entwicklung oder eine mnemonische Regel.

Bsp. $det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen, dann Laplace-Entwicklung oder eine mnemonische Regel.

Bsp. $det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\text{Z.1 und Z.2 umtauschen}}{=}$

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen, dann Laplace-Entwicklung oder eine mnemonische Regel.

Bsp. $det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Z.1 und Z.2} \\ \text{umtauschen}}}{=} -$

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen, dann Laplace-Entwicklung oder eine mnemonische Regel.

Bsp. $det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Z.1 und Z.2} \\ \text{umtauschen}}}{=} - det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} =$

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen, dann Laplace-Entwicklung oder eine mnemonische Regel.

Bsp. $$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Z.1 und Z.2} \\ \text{umtauschen}}}{=} -det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\substack{\text{Z.3 - Z.1} \\ \text{Z.4- 2 Z.1}}}{=}$$

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen, dann Laplace-Entwicklung oder eine mnemonische Regel.

Bsp. $$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Z.1 und Z.2} \\ \text{umtauschen}}}{=} - det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\substack{\text{Z.3 - Z.1} \\ \text{Z.4- 2 Z.1}}}{=} \quad -$$

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen, dann Laplace-Entwicklung oder eine mnemonische Regel.

Bsp. $$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Z.1 und Z.2} \\ \text{umtauschen}}}{=} -det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\substack{\text{Z.3 - Z.1} \\ \text{Z.4- 2 Z.1}}}{=} -det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen, dann Laplace-Entwicklung oder eine mnemonische Regel.

Bsp. $$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Z.1 und Z.2} \\ \text{umtauschen}}}{=} -det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\substack{\text{Z.3 - Z.1} \\ \text{Z.4- 2 Z.1}}}{=} \quad -det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Z.4 - 3 Z.3}}{=}$$

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen, dann Laplace-Entwicklung oder eine mnemonische Regel.

Bsp. $$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Z.1 und Z.2} \\ \text{umtauschen}}}{=} -det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\substack{\text{Z.3 - Z.1} \\ \text{Z.4- 2 Z.1}}}{=} -det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Z.4 - 3 Z.3}}{=}$$

$-$

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen, dann Laplace-Entwicklung oder eine mnemonische Regel.

Bsp. $$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Z.1 und Z.2} \\ \text{umtauschen}}}{=} -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\substack{\text{Z.3 - Z.1} \\ \text{Z.4- 2 Z.1}}}{=} -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Z.4 - 3 Z.3}}{=}$$

$$-\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen, dann Laplace-Entwicklung oder eine mnemonische Regel.

Bsp. $$det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Z.1 und Z.2} \\ \text{umtauschen}}}{=} -det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\substack{\text{Z.3 - Z.1} \\ \text{Z.4- 2 Z.1}}}{=} -det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Z.4 - 3 Z.3}}{=}$$

$$-det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Oberdiagonalform}}{=}$$

Wie berechnet man die Determinante (Empfelungen)

Für (2×2) - Matrizen: mnemonische Regel.

Für (3×3)- Matrizen: mnemonische Regel oder Laplacentwicklungen.

Für großeren n: mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenumformungen die Matrix in einer einfachen Form bringen, dann Laplace-Entwicklung oder eine mnemonische Regel.

Bsp. $$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Z.1 und Z.2} \\ \text{umtauschen}}}{=} - det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\substack{\text{Z.3 - Z.1} \\ \text{Z.4- 2 Z.1}}}{=} - det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Z.4 - 3 Z.3}}{=}$$

$$- det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Oberdiagonalform}}{=} - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = -4$$

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ *Die transponierte Matrix A^t*

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *Die transponierte Matrix A^t ist die folgende*

$(n \times m)$ Matrix:

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ *Die transponierte Matrix A^t ist die folgende $(n \times m)$ Matrix:* $$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ *Die transponierte Matrix A^t ist die folgende $(n \times m)$ Matrix:* $$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$ *d.h. auf dem (i, j)-ten Platz*

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *Die transponierte Matrix A^t ist die folgende $(n \times m)$ Matrix:* $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$*, d.h. auf dem (i,j)-ten Platz der A^t steht das (j,i)-te Element von A.*

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,*
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *Die transponierte Matrix A^t ist die folgende $(n \times m)$ Matrix:* $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$*, d.h. auf dem (i, j)-ten Platz der A^t steht das (j, i)-te Element von A.*

Bsp:

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ *Die transponierte Matrix A^t ist die folgende*

$(n \times m)$ Matrix: $$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$*, d.h. auf dem (i,j)-ten Platz der A^t steht das (j,i)-te Element von A.*

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}^t$

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,*
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *Die transponierte Matrix A^t ist die folgende*
$(n \times m)$ Matrix: $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, d.h. auf dem (i, j)-ten Platz der
A^t steht das (j, i)-te Element von A.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,*

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *Die transponierte Matrix A^t ist die folgende $(n \times m)$ Matrix: $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, d.h. auf dem (i, j)-ten Platz der A^t steht das (j, i)-te Element von A.*

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t$

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ *Die transponierte Matrix A^t ist die folgende $(n \times m)$ Matrix:* $$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$ *d.h. auf dem (i,j)-ten Platz der A^t steht das (j,i)-te Element von A.*

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,*
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *Die transponierte Matrix A^t ist die folgende $(n \times m)$ Matrix: $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, d.h. auf dem (i,j)-ten Platz der A^t steht das (j,i)-te Element von A.*

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung *Für quadratischen Matrizen ist transponieren gleichbedeutend mit einer Spiegelung an der Diagonalen.*

Wiederholung – Def. 36 *Sei A eine $(m \times n)$-matrix,*
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *Die transponierte Matrix A^t ist die folgende*
$(n \times m)$ Matrix: $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, d.h. auf dem (i,j)-ten Platz der
A^t steht das (j,i)-te Element von A.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung *Für quadratischen Matrizen ist transponieren gleichbedeutend mit einer Spiegelung an der Diagonalen.*

Bemerkung $(A^t)^t = A$

Wiederholung — Weitere Eigenschaften der Determinantefunktion

(D1)' Satz 42 Determinateabbildung ist linear in Spalten.

(D2)' (Folgerung aus Satz 38/Satz 39) $det(A) = 0 \iff A$ ist ausgeartet.

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix.*

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis.

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$,

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$.

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:

$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:

$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),

$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind,

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:

$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),

$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34),

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:

$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),
$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:

$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),

$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),

$D3$, weil $Id^t = Id$.

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:

$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),

$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),

$D3$, weil $Id^t = Id$.

Nach Lemma 24 (Eindeutigkeit)

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:
$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),
$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),
$D3$, weil $Id^t = Id$.
Nach Lemma 24 (Eindeutigkeit) ist $\widetilde{det} = det$. □

Satz 43 *Sei A eine* $(n \times n)$ *Matrix. Dann gilt:* $det(A) = det(A^t)$.

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$,
$\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:
$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),
$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),
$D3$, weil $Id^t = Id$.
Nach Lemma 24 (Eindeutigkeit) ist $\widetilde{det} = det$. □

Folgerung

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:

$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),

$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),

$D3$, weil $Id^t = Id$.

Nach Lemma 24 (Eindeutigkeit) ist $\widetilde{det} = det$. □

Folgerung *Die Determinanteabbildung hat die folgende Eigenschaften für jedes $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ gilt*

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:
$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),
$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),
$D3$, weil $Id^t = Id$.
Nach Lemma 24 (Eindeutigkeit) ist $\widetilde{det} = det$. □

Folgerung *Die Determinanteabbildung hat die folgende Eigenschaften für jedes $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ gilt*

(D5)' *nach elementare Spaltenumformung (S3) (zwei Spalten umtauschen) wird die Detemninante mit (-1) multipliziert,*

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:
$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),
$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),
$D3$, weil $Id^t = Id$.
Nach Lemma 24 (Eindeutigkeit) ist $\widetilde{det} = det$. □

Folgerung *Die Determinanteabbildung hat die folgende Eigenschaften für jedes $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ gilt*

(D5)' *nach elementare Spaltenumformung (S3) (zwei Spalten umtauschen) wird die Detemninante mit (-1) multipliziert,*

(D6)' *elementare Spaltenumformung (S1) (λ- facher einer Spalte zur anderen addieren) ändert die Determinantefunktion nicht.*

(D7)'

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:

$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),

$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),

$D3$, weil $Id^t = Id$.

Nach Lemma 24 (Eindeutigkeit) ist $\widetilde{det} = det$. □

Folgerung *Die Determinanteabbildung hat die folgende Eigenschaften für jedes $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ gilt*

(D5)' *nach elementare Spaltenumformung (S3) (zwei Spalten umtauschen) wird die Detemninante mit (-1) multipliziert,*

(D6)' *elementare Spaltenumformung (S1) (λ- facher einer Spalte zur anderen addieren) ändert die Determinantefunktion nicht.*

(D7)' (Laplace-Zeilenentwicklungssatz)

Satz 43 *Sei A eine* $(n \times n)$ *Matrix. Dann gilt:* $det(A) = det(A^t)$.

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:
$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),
$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),
$D3$, weil $Id^t = Id$.
Nach Lemma 24 (Eindeutigkeit) ist $\widetilde{det} = det$. □

Folgerung *Die Determinanteabbildung hat die folgende Eigenschaften für jedes* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *gilt*

(D5)' *nach elementare Spaltenumformung (S3) (zwei Spalten umtauschen) wird die Detemninante mit* (-1) *multipliziert,*

(D6)' *elementare Spaltenumformung (S1) (λ- facher einer Spalte zur anderen addieren) ändert die Determinantefunktion nicht.*

(D7)' (Laplace-Zeilenentwicklungssatz) $det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} det(A_{ji}^{Str})$,

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:

$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),

$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),

$D3$, weil $Id^t = Id$.

Nach Lemma 24 (Eindeutigkeit) ist $\widetilde{det} = det$. □

Folgerung *Die Determinanteabbildung hat die folgende Eigenschaften für jedes $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ gilt*

(D5)' *nach elementare Spaltenumformung (S3) (zwei Spalten umtauschen) wird die Detemninante mit (-1) multipliziert,*

(D6)' *elementare Spaltenumformung (S1) (λ- facher einer Spalte zur anderen addieren) ändert die Determinantefunktion nicht.*

(D7)' (Laplace-Zeilenentwicklungssatz) $det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} det(A^{Str}_{ji})$,

Beweis:

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:

$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),

$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),

$D3$, weil $Id^t = Id$.

Nach Lemma 24 (Eindeutigkeit) ist $\widetilde{det} = det$. □

Folgerung *Die Determinanteabbildung hat die folgende Eigenschaften für jedes $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ gilt*

(D5)' *nach elementare Spaltenumformung (S3) (zwei Spalten umtauschen) wird die Detemninante mit (-1) multipliziert,*

(D6)' *elementare Spaltenumformung (S1) (λ- facher einer Spalte zur anderen addieren) ändert die Determinantefunktion nicht.*

(D7)' (Laplace-Zeilenentwicklungssatz) $det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} det(A_{ji}^{Str})$,

Beweis: Zuerst transponieren, dann Eigenschaft $(D5)$, $(D6)$, $(D3)$, $(D7)$ anwenden.

Satz 43 *Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Dann gilt: $det(A) = det(A^t)$.*

Beweis. Definiere die folgende Abbildung $\widetilde{det} : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\widetilde{det}(A) := det(A^t)$. Wir zeigen: die Abbildung ist die Determinanteabbidung.Z.z.: Die Abbildung erfüllt Eigenschaften $D1, D2, D3$:

$D1$, weil die Abbildung det linear in Spalten ist (Satz 42, (D1)'),

$D2$, weil eine Matrix deren zwei Spalten gleich sind, ausgeartet ist (Satz 34), und deswegen ist die Determinante gleich Null (Satz 39),

$D3$, weil $Id^t = Id$.

Nach Lemma 24 (Eindeutigkeit) ist $\widetilde{det} = det$. □

Folgerung *Die Determinanteabbildung hat die folgende Eigenschaften für jedes $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ gilt*

(D5)' *nach elementare Spaltenumformung (S3) (zwei Spalten umtauschen) wird die Detemninante mit (-1) multipliziert,*

(D6)' *elementare Spaltenumformung (S1) (λ- facher einer Spalte zur anderen addieren) ändert die Determinantefunktion nicht.*

(D7)' (Laplace-Zeilenentwicklungssatz) $det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ji} det(A_{ji}^{Str})$,

Beweis: Zuerst transponieren, dann Eigenschaft $(D5)$, $(D6)$, $(D3)$, $(D7)$ anwenden. □

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n$

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,...,n\}} = \{\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\operatorname{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\}$

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,...,n\}} = \{\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\operatorname{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt:

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,...,n\}} = \{\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\text{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,...,n\}} = \{\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\operatorname{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3):

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,...,n\}} = \{\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3):
$P = T_1 \circ ... \circ T_m$

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,...,n\}} = \{\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\operatorname{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,\ldots,n\}} = \{\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\operatorname{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ \ldots \circ T_m$ und setze

$$\operatorname{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,...,n\}} = \{\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze

$$\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,...,n\}} = \{\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\text{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze

$$\text{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

(Wohldefiniert: Lemma 4)

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,...,n\}} = \{\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}.$

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\text{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze

$$\text{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$ (Wohldefiniert: Lemma 4)

Leibnitz-Formel für die Determinante  **(1646 – 1716):**

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,\dots,n\}} = \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}.$

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ \dots \circ T_m$ und setze

$$\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

(Wohldefiniert: Lemma 4)

Leibnitz-Formel für die Determinante  **(1646 – 1716):**

Für $A =$

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,\dots,n\}} = \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist }\}.$

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\operatorname{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ \dots \circ T_m$ und setze

$\operatorname{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$ (Wohldefiniert: Lemma 4)

Leibnitz-Formel für die Determinante  **(1646 – 1716):**

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ setze

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,\dots,n\}} = \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.
Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$
Wied. – Vorl. 5 $\operatorname{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3):
$P = T_1 \circ \dots \circ T_m$ und setze

$$\operatorname{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

(Wohldefiniert: Lemma 4)

Leibnitz-Formel für die Determinante  **(1646 – 1716):**

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ setze $det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \quad (*)$.

Leibniz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,\dots,n\}} = \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ \dots \circ T_m$ und setze

$$\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$ (Wohldefiniert: Lemma 4)

Leibniz-Formel für die Determinante

(1646 – 1716):

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ setze $det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \quad (*)$.

Bsp: $\mathcal{S}_2 =$

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,...,n\}} = \{\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\operatorname{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze

$$\operatorname{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$ (Wohldefiniert: Lemma 4)

Leibnitz-Formel für die Determinante  **(1646 – 1716):**

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ setze $det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ $(*)$.

Bsp: $\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}$.

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,\dots,n\}} = \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}.$

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\operatorname{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ \dots \circ T_m$ und setze

$$\operatorname{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

(Wohldefiniert: Lemma 4)

Leibnitz-Formel für die Determinante  **(1646 – 1716):**

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ setze $det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \quad (*).$

Bsp: $\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}$. Also, $det\begin{pmatrix} a_{1\ 1} & a_{1\ 2} \\ a_{1\ 1} & a_{2\ 2} \end{pmatrix}$

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,...,n\}} = \{\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\text{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ ... \circ T_m$ und setze

$$\text{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$ (Wohldefiniert: Lemma 4)

Leibnitz-Formel für die Determinante  **(1646 – 1716):**

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ setze $det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \quad (*)$.

Bsp: $\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}$. Also, $det\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{1\,1} & a_{2\,2} \end{pmatrix} =$

$\color{red}{\text{sign}(\sigma_1)} a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} +$

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,\ldots,n\}} = \{\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \mid \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ \ldots \circ T_m$ und setze

$$\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

(Wohldefiniert: Lemma 4)

Leibnitz-Formel für die Determinante  **(1646 – 1716):**

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ setze $det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \quad (*)$.

Bsp: $\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}$. Also, $det\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{1\,1} & a_{2\,2} \end{pmatrix} =$

$\mathrm{sign}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \mathrm{sign}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} =$

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,\dots,n\}} = \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\mathrm{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1,1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ \dots \circ T_m$ und setze

$$\mathrm{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$ (Wohldefiniert: Lemma 4)

Leibnitz-Formel für die Determinante  **(1646 – 1716):**

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ setze $det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ $\quad (*)$.

Bsp: $\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}$. Also, $det\begin{pmatrix} a_{1\ 1} & a_{1\ 2} \\ a_{1\ 1} & a_{2\ 2} \end{pmatrix} =$

$\mathrm{sign}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \mathrm{sign}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} = 1 \cdot a_{11}a_{22} + (-1) a_{12}a_{21}$

Leibnitz -Formel für die Determinante

Wiederholung: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{\{1,\dots,n\}} = \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \ \sigma \text{ bijektiv ist } \}$.

Wied. – Satz 4: $\#\mathcal{S}_n = n!$

Wied. – Vorl. 5 $\operatorname{sign} : \mathcal{S}_n \to \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{K}$ definiert wie folgt: Zerlege P in Produkt von Transpositionen (Satz 11– Hausaufgabe 1a Blatt 3): $P = T_1 \circ \dots \circ T_m$ und setze

$$\operatorname{sign}(P) := (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{falls } m \text{ gerade} \\ -1 & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$ (Wohldefiniert: Lemma 4)

Leibnitz-Formel für die Determinante  **(1646 – 1716):**

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ setze $det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \quad (*)$.

Bsp: $\mathcal{S}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_2}, \right\}$. Also, $det\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{1\,1} & a_{2\,2} \end{pmatrix} =$

$\operatorname{sign}(\sigma_1) a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \operatorname{sign}(\sigma_2) a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} = 1 \cdot a_{11} a_{22} + (-1) a_{12} a_{21}$ wie in Vorl. 15.

Satz 44 Die Funktion $(*)$ ist die Determinantefunktion,

Satz 44 Die Funktion $(*)$ ist die Determinantefunktion, d.h., sie erfüllt (D1–D3).

Satz 44 Die Funktion $(*)$ ist die Determinantefunktion, d.h., sie erfüllt (D1–D3).

Beweis:

Satz 44 Die Funktion $(*)$ ist die Determinantefunktion, d.h., sie erfüllt (D1–D3).

Beweis: (D1): Die Funktion $(*)$ ist linear in jeder Zeile:

Satz 44 Die Funktion $(*)$ ist die Determinantefunktion, d.h., sie erfüllt (D1–D3).

Beweis: (D1): Die Funktion $(*)$ ist linear in jeder Zeile: Falls die $j-$ te Zeile das Aussehen $(a_{j1}+b_{j1}..., a_{jn}+b_{jn})$ hat,

Satz 44 Die Funktion $(*)$ ist die Determinantefunktion, d.h., sie erfüllt (D1–D3).

Beweis: (D1): Die Funktion $(*)$ ist linear in jeder Zeile: Falls die $j-$ te Zeile das Aussehen $(a_{j1} + b_{j1} ..., a_{jn} + b_{jn})$ hat, ist die Summe $(*)$ gleich $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)(a_{j\sigma(j)} + b_{j\sigma(j)}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)}$

Satz 44 Die Funktion $(*)$ ist die Determinantefunktion, d.h., sie erfüllt (D1–D3).

Beweis: (D1): Die Funktion $(*)$ ist linear in jeder Zeile: Falls die $j-$ te Zeile das Aussehen $(a_{j1}+b_{j1}..., a_{jn}+b_{jn})$ hat, ist die Summe

$(*)$ gleich $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)(a_{j\sigma(j)}+b_{j\sigma(j)}) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} =$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)a_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)b_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

Satz 44 Die Funktion $(*)$ ist die Determinantefunktion, d.h., sie erfüllt (D1–D3).

Beweis: (D1): Die Funktion $(*)$ ist linear in jeder Zeile: Falls die $j-$ te Zeile das Aussehen $(a_{j1}+b_{j1}\ldots, a_{jn}+b_{jn})$ hat, ist die Summe $(*)$ gleich $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)(a_{j\sigma(j)}+b_{j\sigma(j)}) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} =$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)a_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma)b_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

Ähnlich zeigt man Linearität bzgl. für Multiplikation mit Skalare.

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend:

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, (D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$.

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n :=$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$,

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt:

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab und ist injektiv.

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab und ist injektiv.

$det(A) =$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab und ist injektiv.

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab und ist injektiv.

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab und ist injektiv.

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} +$$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab und ist injektiv.

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma \circ T) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)=}$$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab und ist injektiv.

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma \circ T) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{k\sigma(k)} a_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab und ist injektiv.

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \operatorname{sign}(\sigma \circ T) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{k\sigma(k)} a_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{k\sigma\circ T(k)} a_{j\sigma\circ T(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)}$$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab und ist injektiv.

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma \circ T) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{k\sigma(k)} a_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{k\sigma\circ T(k)} a_{j\sigma\circ T(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{k\sigma(k)} a_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab und ist injektiv.

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma \circ T) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{k\sigma(k)} a_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{k\sigma\circ T(k)} a_{j\sigma\circ T(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{k\sigma(k)} a_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{T(k)\sigma(k)} a_{T(j)\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)}$$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab und ist injektiv.

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma \circ T) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{k\sigma(k)} a_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{k\sigma\circ T(k)} a_{j\sigma\circ T(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{k\sigma(k)} a_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{T(k)\sigma(k)} a_{T(j)\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)}$$

$$= 0,$$

(D2): Die Funktion $(*)$ ist alternierend: Angenommen, $k-$te und $j-$te Zeilen stimmen überein, $k \neq j$. Z.z.: $det(A) = 0$.
Man betrachte die Transposition $T := (k, j)$ (s. Vorl. 6/Hausaufgabenblatt 3).
Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$ von geraden Permutationen und die Abbildung $\aleph : \mathcal{A}_n \to \mathcal{S}_n$, $\sigma \mapsto \sigma \circ T$.
Aus Definitionen folgt: $\aleph$ bildet die geraden Permutationen auf ungerade ab und ist injektiv.

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \operatorname{sign}(\sigma \circ T) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{k\sigma(k)} a_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{k\sigma\circ T(k)} a_{j\sigma\circ T(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{k\sigma(k)} a_{j\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{T(k)\sigma(k)} a_{T(j)\sigma(j)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} a_{i\sigma\circ T(i)}$$

$= 0$, weil $a_{T(k)\sigma(k)} a_{T(j)\sigma(j)} = a_{k\sigma(k)} a_{j\sigma(j)}$, $\square$

(D3):

(D3): Die Funktion $(*)$ ist normiert.

(D3): Die Funktion $(*)$ ist normiert. Z.z.: $det(Id) = 1$.

(D3): Die Funktion $(*)$ ist normiert. Z.z.: $det(Id) = 1$.
Tatsächlich, falls $A = Id$ ist,

(D3): Die Funktion $(*)$ ist normiert. Z.z.: $det(Id) = 1$.
Tatsächlich, falls $A = Id$ ist, ist nur eine Summante in der Summe $(*)$

(D3): Die Funktion $(*)$ ist normiert. Z.z.: $det(Id) = 1$.
Tatsächlich, falls $A = Id$ ist, ist nur eine Summante in der Summe $(*)$

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \quad (*)$$ nicht 0,

(D3): Die Funktion $(*)$ ist normiert. Z.z.: $det(Id) = 1$.
Tatsächlich, falls $A = Id$ ist, ist nur eine Summante in der Summe $(*)$

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \quad (*)$$

nicht 0, und zwar die mit $\sigma = Id$.
Diese Summante ist gleich $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$.

(D3): Die Funktion $(*)$ ist normiert. Z.z.: $det(Id) = 1$.
Tatsächlich, falls $A = Id$ ist, ist nur eine Summante in der Summe $(*)$
$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \quad (*)$ nicht 0, und zwar die mit $\sigma = Id$.
Diese Summante ist gleich $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$. $\square$

Anwendungen der Determinante

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

A ist ausgeartet

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Satz 39}}{\overset{\text{Lemma 24}}{\Longleftrightarrow}}$$

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Satz 39}}{\overset{\text{Lemma 24}}{\iff}} \quad det(A) = 0.$$

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Satz 39}}{\underset{}{\overset{\text{Lemma 24}}{\iff}}} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Satz 39}}{\underset{}{\overset{\text{Lemma 24}}{\Longleftrightarrow}}} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n, n)$.*

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \overset{\substack{\text{Satz 39} \\ \text{Lemma 24}}}{\iff} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n,n)$. Die Matrix deren (i,j)-Eintrag gleich*

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Satz 39}}{\underset{}{\overset{\text{Lemma 24}}{\Longleftrightarrow}}} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n, n)$. Die Matrix deren (i, j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A_{ji}^{Str})$ heißt*

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \overset{\text{Satz 39}}{\underset{}{\overset{\text{Lemma 24}}{\Longleftrightarrow}}} det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n,n)$. Die Matrix deren (i,j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ji})$ heißt die adjunkte Matrix*

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \overset{\text{Satz 39}}{\underset{}{\overset{\text{Lemma 24}}{\iff}}} det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n, n)$. Die Matrix deren (i, j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ji})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Satz 39}}{\underset{}{\overset{\text{Lemma 24}}{\iff}}} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n,n)$. Die Matrix deren (i,j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A_{ji}^{Str})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Beachten:

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \overset{\text{Satz 39}}{\underset{}{\overset{\text{Lemma 24}}{\Longleftrightarrow}}} det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n, n)$. Die Matrix deren (i, j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A_{ji}^{Str})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Beachten: um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Satz 39}}{\underset{}{\overset{\text{Lemma 24}}{\Longleftrightarrow}}} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n, n)$. Die Matrix deren (i, j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ji})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Beachten: um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst (i, j) - Eintrag mit $(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ij})$

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \overset{\text{Satz 39}}{\underset{}{\overset{\text{Lemma 24}}{\iff}}} det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n,n)$. Die Matrix deren (i,j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ji})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Beachten: um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst (i,j) - Eintrag mit $(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ij})$ ersetzen und danach noch transponieren.

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Lemma 24}}{\overset{\text{Satz 39}}{\Longleftrightarrow}} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n, n)$. Die Matrix deren (i, j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A_{ji}^{Str})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Beachten: um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst (i, j) - Eintrag mit $(-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$ ersetzen und danach noch transponieren.

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Lemma 24}}{\overset{\text{Satz 39}}{\Longleftrightarrow}} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n, n)$. Die Matrix deren (i, j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A_{ji}^{Str})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Beachten: um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst (i, j) - Eintrag mit $(-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$ ersetzen und danach noch transponieren.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Lemma 24}}{\overset{\text{Satz 39}}{\Longleftrightarrow}} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n,n)$. Die Matrix deren (i,j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ji})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Beachten: um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst (i,j) - Eintrag mit $(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ij})$ ersetzen und dananch noch transponieren.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Dann ist $Co(A) =$

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Satz 39}}{\overset{\text{Lemma 24}}{\Longleftrightarrow}} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n, n)$. Die Matrix deren (i, j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A_{ji}^{Str})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Beachten: um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst (i, j) - Eintrag mit $(-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$ ersetzen und danach noch transponieren.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Dann ist $Co(A) = \Bigg($

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \overset{\text{Lemma 24}}{\overset{\text{Satz 39}}{\iff}} det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n,n)$. Die Matrix deren (i,j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A_{ji}^{Str})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Beachten: um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst (i,j) - Eintrag mit $(-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$ ersetzen und danach noch transponieren.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Dann ist $Co(A) = \Bigg(\; d$

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Satz 39}}{\underset{}{\overset{\text{Lemma 24}}{\Longleftrightarrow}}} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n, n)$. Die Matrix deren (i, j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ji})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Beachten: um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst (i, j) - Eintrag mit $(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ij})$ ersetzen und dananch noch transponieren.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Dann ist $Co(A) = \Bigg(\begin{matrix} d & -b \\ & \end{matrix}$

Anwendungen der Determinante

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Satz 39}}{\underset{}{\overset{\text{Lemma 24}}{\Longleftrightarrow}}} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n, n)$. Die Matrix deren (i, j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A_{ji}^{Str})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Beachten: um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst (i, j) - Eintrag mit $(-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$ ersetzen und danach noch transponieren.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Dann ist $Co(A) = \Bigg(\begin{matrix} d & -b \\ -c & \end{matrix}$

Man kann schnell entscheiden ob eine $(n \times n)$ Matrix ausgeartet ist:

$$A \text{ ist ausgeartet} \quad \overset{\text{Satz 39}}{\underset{}{\overset{\text{Lemma 24}}{\Longleftrightarrow}}} \quad det(A) = 0.$$

Definition 37 *Sei $A \in Mat(n, n)$. Die Matrix deren (i, j)-Eintrag gleich $(-1)^{i+j} det(A_{ji}^{Str})$ heißt die adjunkte Matrix (oder Comatrix) und wird $Co(A)$ bezeichnet.*

Beachten: um die adjunkte Matrix zu bekommen, ersetzen wir zuerst (i, j) - Eintrag mit $(-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$ ersetzen und danach noch transponieren.

Bsp. $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Dann ist $Co(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet.

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis.

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.:

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\, A = det(A) Id$.

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=}$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.

Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ij})$.

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.

Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \overset{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ij})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik}$$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}).$$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\, A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\, A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k=j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung;

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k=j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\mathrm{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j, i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j, k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe,

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\mathrm{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\mathrm{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.
Da $\tilde{A}$ zwei gleichen Spalten hat,

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n, n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\, A = det(A) Id$. (j, i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j, k)-$ Eintrag der $Co(A)\, A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji}\, a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik}\, det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\, Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.
Da $\tilde{A}$ zwei gleichen Spalten hat, ist $det(\tilde{A}) = 0$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.
Da $\tilde{A}$ zwei gleichen Spalten hat, ist $det(\tilde{A}) = 0$ ((D2)').

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.
Da $\tilde{A}$ zwei gleichen Spalten hat, ist $det(\tilde{A}) = 0$ ((D2)').
Also, die Elemente nicht auf der Diagonale von A

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\mathrm{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji}\, a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik}\, det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.
Da $\tilde{A}$ zwei gleichen Spalten hat, ist $det(\tilde{A}) = 0$ ((D2)').
Also, die Elemente nicht auf der Diagonale von A sind gleich 0.

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.
Da $\tilde{A}$ zwei gleichen Spalten hat, ist $det(\tilde{A}) = 0$ ((D2)').
Also, die Elemente nicht auf der Diagonale von A sind gleich 0. Also,

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ij})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji}\, a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik}\, det(A^{Str}_{ij}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.
Da $\tilde{A}$ zwei gleichen Spalten hat, ist $det(\tilde{A}) = 0$ ((D2)').
Also, die Elemente nicht auf der Diagonale von A sind gleich 0. Also, $Co(A)\,A = det(A)$. $\square$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A)Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.
Da $\tilde{A}$ zwei gleichen Spalten hat, ist $det(\tilde{A}) = 0$ ((D2)').
Also, die Elemente nicht auf der Diagonale von A sind gleich 0. Also, $Co(A)\,A = det(A)$. □
Bsp (Um z.B. im Hausaufgabe 4b zu benutzen).

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ sei nichtausgeartet. Dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \overset{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji}\, a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik}\, det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.
Da $\tilde{A}$ zwei gleichen Spalten hat, ist $det(\tilde{A}) = 0$ ((D2)').
Also, die Elemente nicht auf der Diagonale von A sind gleich 0. Also, $Co(A)\,A = det(A)$. □
Bsp (Um z.B. im Hausaufgabe 4b zu benutzen).
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix)
$A \in Mat(n,n)$ *sei nichtausgeartet. Dann gilt:* $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.
Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \overset{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k = j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.
Da $\tilde{A}$ zwei gleichen Spalten hat, ist $det(\tilde{A}) = 0$ ((D2)').
Also, die Elemente nicht auf der Diagonale von A sind gleich 0. Also, $Co(A)\,A = det(A)$. □
Bsp (Um z.B. im Hausaufgabe 4b zu benutzen).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{det} & -\frac{b}{det} \\ -\frac{c}{det} & \frac{a}{det} \end{pmatrix}$$

Satz 45 (Leibnitz – (Laplace)– Formel für die inverse Matrix) $A \in Mat(n,n)$ *sei nichtausgeartet. Dann gilt:* $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$.

Beweis. Z.z.: $Co(A)\,A = det(A) Id$. (j,i) -Eintrag der $Co(A)$ bezeichne mit $c_{ji} \stackrel{\text{def}}{:=} (-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})$. Nach Definition der Multiplikation der Matrizen ist $(j,k)-$ Eintrag der $Co(A)\,A$ gleich

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji}\,a_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik}\, det(A_{ij}^{Str}). \qquad (*)$$

Fur $k=j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung; also die Diagonalelemente der $A\,Co(A)$ sind gleich $det(A)$.
Für $k \neq j$ ist $(*)$ die Laplace-Spaltenentwicklung der Matrix $\tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ aus A entstehe, indem man die j-te Spalte von A mit der $k-$ten Spalte ersetzt.
Da $\tilde{A}$ zwei gleichen Spalten hat, ist $det(\tilde{A}) = 0$ ((D2)').
Also, die Elemente nicht auf der Diagonale von A sind gleich 0. Also, $Co(A)\,A = det(A)$. □

Bsp (Um z.B. im Hausaufgabe 4b zu benutzen).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{det} & -\frac{b}{det} \\ -\frac{c}{det} & \frac{a}{det} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

Cramer'sche Regel

Cramer'sche Regel

Satz 46

Cramer'sche Regel

Satz 46

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,*

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$. *Betrachte das lineare Gleichungssystem*

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$. *Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$*. Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35)*

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$*. Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right.$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$ *gegeben durch*

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$*. Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\left\{ \begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right.$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$ *gegeben durch*

$$x_j := \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)}$$

Cramer'sche Regel

Satz 46 *$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sei invertierbar, $b \in \mathbb{K}^n$. Betrachte das lineare Gleichungssystem $\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & + a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right.$ (in Matrixform: $Ax = b$). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ gegeben durch*

$$x_j := \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)} \qquad (*)$$

Cramer'sche Regel

Satz 46 *$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sei invertierbar, $b \in \mathbb{K}^n$. Betrachte das lineare Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$ (in Matrixform: $Ax = b$). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ gegeben durch*

$$x_j := \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A)} \qquad (*)$$

Die Matrix deren Determinante im Zähler

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$*. Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\left\{ \begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right.$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$ *gegeben durch*

$$x_j := \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)} \qquad (*)$$

Die Matrix deren Determinante im Zähler steht ist wie folgt:

Cramer'sche Regel

Satz 46 *$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sei invertierbar, $b \in \mathbb{K}^n$. Betrachte das lineare Gleichungssystem $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$ (in Matrixform: $Ax = b$). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ gegeben durch*

$$x_j := \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)} \qquad (*)$$

Die Matrix deren Determinante im Zähler steht ist wie folgt: wir haben j-te Spalte in A mit b ersetzt.

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$. *Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right.$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$ *gegeben durch*

$$x_j := \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)} \qquad (*)$$

Die Matrix deren Determinante im Zähler steht ist wie folgt: wir haben j-te Spalte in A mit b ersetzt.

Beweis.

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$. *Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\left\{ \begin{array}{llll} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right.$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$ *gegeben durch*

$$x_j := \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A)} \qquad (*)$$

Die Matrix deren Determinante im Zähler steht ist wie folgt: wir haben j-te Spalte in A mit b ersetzt.

Beweis. Nach Satz 45 ist (j, i)-Eintrag der A^{-1}

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$. *Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$ *gegeben durch*

$$x_j := \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)} \qquad (*)$$

Die Matrix deren Determinante im Zähler steht ist wie folgt: wir haben j-te Spalte in A mit b ersetzt.

Beweis. Nach Satz 45 ist (j, i)-Eintrag der A^{-1} gleich $\frac{(-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})}{det(A)}$,

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$*. Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right.$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$ *gegeben durch*

$$x_j := \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)} \qquad (*)$$

Die Matrix deren Determinante im Zähler steht ist wie folgt: wir haben j-te Spalte in A mit b ersetzt.

Beweis. Nach Satz 45 ist (j, i)-Eintrag der A^{-1} gleich $\frac{(-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})}{det(A)}$, und nach Folg. aus Sätze 34/35

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$*. Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$ *gegeben durch*

$$x_j := \frac{det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)} \qquad (*)$$

Die Matrix deren Determinante im Zähler steht ist wie folgt: wir haben j-te Spalte in A mit b ersetzt.

Beweis. Nach Satz 45 ist (j, i)-Eintrag der A^{-1} gleich $\frac{(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ij})}{det(A)}$, und nach Folg. aus Sätze 34/35 ist $x = A^{-1}b$,

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$*. Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\left\{ \begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right.$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$ *gegeben durch*

$$x_j := \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,{\color{red}j-1}} & b_1 & a_{1\,{\color{red}j+1}} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,{\color{red}j-1}} & b_n & a_{n\,{\color{red}j+1}} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)} \qquad (*)$$

Die Matrix deren Determinante im Zähler steht ist wie folgt: wir haben j-te Spalte in A mit b ersetzt.

Beweis. Nach Satz 45 ist (j,i)-Eintrag der A^{-1} gleich ${\color{blue}\frac{(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ij})}{det(A)}}$, und nach Folg. aus Sätze 34/35 ist $x = A^{-1}b$, also
$x_j = \frac{1}{{\color{blue}det(A)}} \sum_{i=1}^n {\color{blue}(-1)^{i+j} A^{Str}_{ij}} b_i$;

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$*. Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{array} \right.$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$ *gegeben durch*

$$x_j := \frac{det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)} \qquad (*)$$

Die Matrix deren Determinante im Zähler steht ist wie folgt: wir haben j-te Spalte in A mit b ersetzt.

Beweis. Nach Satz 45 ist (j, i)-Eintrag der A^{-1} gleich $\frac{(-1)^{i+j} det(A_{ij}^{Str})}{det(A)}$, und nach Folg. aus Sätze 34/35 ist $x = A^{-1}b$, also $x_j = \frac{1}{det(A)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij}^{Str} b_i$; nach Spaltenentwicklungssatz

Cramer'sche Regel

Satz 46 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *sei invertierbar,* $b \in \mathbb{K}^n$. *Betrachte das lineare Gleichungssystem* $\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$ *(in Matrixform:* $Ax = b$*). Dann ist die (eindeutige nach Folg. aus Sätze 34/35) Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$ *gegeben durch*

$$x_j := \frac{det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{det(A)} \qquad (*)$$

Die Matrix deren Determinante im Zähler steht ist wie folgt: wir haben j-te Spalte in A mit b ersetzt.

Beweis. Nach Satz 45 ist (j, i)-Eintrag der A^{-1} gleich $\frac{(-1)^{i+j} det(A^{Str}_{ij})}{det(A)}$, und nach Folg. aus Sätze 34/35 ist $x = A^{-1}b$, also $x_j = \frac{1}{det(A)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A^{Str}_{ij} b_i$; nach Spaltenentwicklungssatz ist das genau $(*)$.

Was ist besser?

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist.

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen?

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben,

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller (mind. für $n > 3$.)

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller (mind. für $n > 3$.)
Falls Sie das Gleichungssystem $Ax = b$

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller (mind. für $n > 3$.)
Falls Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für mehrere rechten Seiten lösen sollen,

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller (mind. für $n > 3$.)
Falls Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für mehrere rechten Seiten lösen sollen, dann ist es oft einfache,

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller (mind. für $n > 3$.)
Falls Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für mehrere rechten Seiten lösen sollen, dann ist es oft einfache, zuerst die inverse Matrix zu finden.

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller (mind. für $n > 3$.)
Falls Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für mehrere rechten Seiten lösen sollen, dann ist es oft einfache, zuerst die inverse Matrix zu finden.

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller (mind. für $n > 3$.)
Falls Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für mehrere rechten Seiten lösen sollen, dann ist es oft einfache, zuerst die inverse Matrix zu finden.
Inverse Matrix zu finden und Cramer'sche Regel zu benutzen ist gleich schwierig/einfach

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller (mind. für $n > 3$.)
Falls Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für mehrere rechten Seiten lösen sollen, dann ist es oft einfache, zuerst die inverse Matrix zu finden.
Inverse Matrix zu finden und Cramer'sche Regel zu benutzen ist gleich schwierig/einfach
Für kleine Matrizen $n < 4$ und für die Matrizen,

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller (mind. für $n > 3$.)
Falls Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für mehrere rechten Seiten lösen sollen, dann ist es oft einfache, zuerst die inverse Matrix zu finden.
Inverse Matrix zu finden und Cramer'sche Regel zu benutzen ist gleich schwierig/einfach
Für kleine Matrizen $n < 4$ und für die Matrizen, die viele 0-Einträge haben

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller (mind. für $n > 3$.)
Falls Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für mehrere rechten Seiten lösen sollen, dann ist es oft einfache, zuerst die inverse Matrix zu finden.
Inverse Matrix zu finden und Cramer'sche Regel zu benutzen ist gleich schwierig/einfach
Für kleine Matrizen $n < 4$ und für die Matrizen, die viele 0-Einträge haben ist die Benutzung von formel $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$ normalerweise schneller;

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller (mind. für $n > 3$.)
Falls Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für mehrere rechten Seiten lösen sollen, dann ist es oft einfache, zuerst die inverse Matrix zu finden.
Inverse Matrix zu finden und Cramer'sche Regel zu benutzen ist gleich schwierig/einfach
Für kleine Matrizen $n < 4$ und für die Matrizen, die viele 0-Einträge haben ist die Benutzung von formel $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$ normalerweise schneller; für großere explizit gegebene Matrizen ist die Methode der Elementarmatrizen

Was ist besser?

Gegeben ist eine Gleichung $Ax = b$, wobei A quadratisch ist. Was ist schneller:

- mit Gauß-Algorithmus zu lösen,
- oder die inverse Matrix finden und dann $x = A^{-1}b$ benutzen? (zwei Methoden)
  - Methode der Elementarmatrizen
  - Satz 45: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$
- oder die Cramer'sche Regel zu benutzen?

Falls Sie nur eine explizite Gleichungssystem $Ax = b$ haben, ist Gauß-Algorithmus öfter schneller (mind. für $n > 3$.)
Falls Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für mehrere rechten Seiten lösen sollen, dann ist es oft einfache, zuerst die inverse Matrix zu finden.
Inverse Matrix zu finden und Cramer'sche Regel zu benutzen ist gleich schwierig/einfach
Für kleine Matrizen $n < 4$ und für die Matrizen, die viele 0-Einträge haben ist die Benutzung von formel $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Co(A)$ normalerweise schneller; für großere explizit gegebene Matrizen ist die Methode der Elementarmatrizen in der Regel schneller.

Wiederholung — Transformationsmatrix:

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b_1', ..., b_n')$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b_1', ..., b_n')$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b_i' in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T \; C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T \; C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V.

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T \ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T,

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'.

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.
Beweis.

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.
Beweis. Tatsächlich,
$$\begin{cases} T\ C_{B'}(v) = C_B(v) \\ \end{cases}$$

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.

Beweis. Tatsächlich,

$$\begin{cases} T\ C_{B'}(v) & = & C_B(v) \\ T'\ C_{B''}(v) & = & C_{B'}(v) \end{cases}$$

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.

Beweis. Tatsächlich,

$$\begin{cases} T\ C_{B'}(v) & = & C_B(v) \\ T'\ C_{B''}(v) & = & C_{B'}(v) \end{cases}$$

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.

Beweis. Tatsächlich,

$$\left\{\begin{array}{ccc} T\ C_{B'}(v) & = & C_B(v) \\ T'\ C_{B''}(v) & = & C_{B'}(v) \end{array}\right. \implies T\ T'\ C_{B''}(v) = C_B(v),$$

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.

Beweis. Tatsächlich,

$$\begin{cases} T\ C_{B'}(v) & = & C_B(v) \\ T'\ C_{B''}(v) & = & C_{B'}(v) \end{cases} \implies T\ T'\ C_{B''}(v) = C_B(v), \qquad \square$$

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.
Beweis. Tatsächlich,

$$\left\{\begin{array}{rcl} T\ C_{B'}(v) & = & C_B(v) \\ T'\ C_{B''}(v) & = & C_{B'}(v) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad T\ T'\ C_{B''}(v) = C_B(v), \qquad \square$$

Def. 38

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.

Beweis. Tatsächlich,

$$\begin{cases} T\ C_{B'}(v) & = & C_B(v) \\ T'\ C_{B''}(v) & = & C_{B'}(v) \end{cases} \implies T\ T'\ C_{B''}(v) = C_B(v), \qquad \square$$

Def. 38 Wir sagen, dass zwei Basen B und B'

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.

Beweis. Tatsächlich,

$$\begin{cases} T\ C_{B'}(v) & = & C_B(v) \\ T'\ C_{B''}(v) & = & C_{B'}(v) \end{cases} \implies T\ T'\ C_{B''}(v) = C_B(v), \qquad \square$$

Def. 38 Wir sagen, dass zwei Basen B und B' (in einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}-$ Vektorraum V) gleich orientiert sind

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.

Beweis. Tatsächlich,

$$\begin{cases} T\ C_{B'}(v) & = & C_B(v) \\ T'\ C_{B''}(v) & = & C_{B'}(v) \end{cases} \implies T\ T'\ C_{B''}(v) = C_B(v), \qquad \square$$

Def. 38 Wir sagen, dass zwei Basen B und B' (in einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}-$ Vektorraum V) gleich orientiert sind (schreibweise: $B \overset{g.o.}{\sim} B'$),

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.

Beweis. Tatsächlich,

$$\begin{cases} T\ C_{B'}(v) & = & C_B(v) \\ T'\ C_{B''}(v) & = & C_{B'}(v) \end{cases} \implies T\ T'\ C_{B''}(v) = C_B(v), \qquad \square$$

Def. 38 Wir sagen, dass zwei Basen B und B' (in einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}-$ Vektorraum V) gleich orientiert sind (schreibweise: $B \overset{g.o.}{\sim} B'$), falls $det(T) > 0$.

Wiederholung — Transformationsmatrix: Seien $B = (b_1, ..., b_n)$ und $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ Basen in V.

Die Transformtionsmatrix von $(b_1, ..., b_n)$ nach $(b'_1, ..., b'_n)$ ist die Matrix T, deren $i-$te Spalte die Koordinatenvektor von b'_i in der Basis $(b_1, ..., b_n)$.

Äquivalente Definition — Satz 37: Das ist die Matrix s.d. (für jedes $v \in V$) gilt: $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$.

Bemerkung: Die Transformationsmatrix is immer nichtausgeartet

Lemma 25 Seien B, B'm B'' Basen in V. Die Transformationsmatrix von B nach B' sei T, von B' nach B'' sei T'. Dann gilt: die Transformationsmatrix von B nach B'' ist TT'.
Beweis. Tatsächlich,

$$\begin{cases} T\ C_{B'}(v) &= C_B(v) \\ T'\ C_{B''}(v) &= C_{B'}(v) \end{cases} \implies T\ T'\ C_{B''}(v) = C_B(v), \qquad \square$$

Def. 38 Wir sagen, dass zwei Basen B und B' (in einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}-$ Vektorraum V) gleich orientiert sind (schreibweise: $B \overset{g.o.}{\sim} B'$), falls $det(T) > 0$.
Andernfalls heißen B und B' entgegengesetzt orientiert.

Lemma 26

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: (Reflexivität)

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: (Reflexivität) Z.z.: Für jede Base B

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$.

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$.
Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität)

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$.

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: (Reflexivität) Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$.
Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$.

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$.

Lemma 26 Die Relation $\stackrel{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \stackrel{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \stackrel{T}{\to} B' \stackrel{T'}{\to} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T \; T'$. Dann ist $det(T'') =$

Lemma 26 Die Relation $\stackrel{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \stackrel{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \stackrel{T}{\to} B' \stackrel{T'}{\to} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT')$

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \overset{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0}$

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$.
Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \overset{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0} > 0$.

Lemma 26 Die Relation $\stackrel{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: (Reflexivität) Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \stackrel{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \stackrel{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0} > 0.$

(Symmetrie)

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$.
Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \overset{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0} > 0$.

(Symmetrie) Z.z.: Ist $B \overset{g.o.}{\sim} B'$,

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die

Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \overset{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0} > 0$.

(Symmetrie) Z.z.: Ist $B \overset{g.o.}{\sim} B'$, so ist $B' \overset{g.o.}{\sim} B$.

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \overset{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0} > 0$.

(Symmetrie) Z.z.: Ist $B \overset{g.o.}{\sim} B'$, so ist $B' \overset{g.o.}{\sim} B$. Aus $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$

Lemma 26 Die Relation $\stackrel{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: (Reflexivität) Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \stackrel{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die

Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \stackrel{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0} > 0$.

(Symmetrie) Z.z.: Ist $B \stackrel{g.o.}{\sim} B'$, so ist $B' \stackrel{g.o.}{\sim} B$. Aus $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$ folgt $C_{B'}(v) = T^{-1}\ C_B(v)$,

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: (Reflexivität) Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \overset{T}{\rightarrow} B' \overset{T'}{\rightarrow} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \overset{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0} > 0$.

(Symmetrie) Z.z.: Ist $B \overset{g.o.}{\sim} B'$, so ist $B' \overset{g.o.}{\sim} B$. Aus $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$ folgt $C_{B'}(v) = T^{-1}\ C_B(v)$, also die Transformationsmatrix von B' nach B ist T^{-1}.

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: (Reflexivität) Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die

Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \overset{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0} > 0$.

(Symmetrie) Z.z.: Ist $B \overset{g.o.}{\sim} B'$, so ist $B' \overset{g.o.}{\sim} B$. Aus $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$ folgt $C_{B'}(v) = T^{-1}\ C_B(v)$, also die Transformationsmatrix von B' nach B ist T^{-1}.
Da $1 = det(Id) =$

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \overset{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0} > 0$.

(Symmetrie) Z.z.: Ist $B \overset{g.o.}{\sim} B'$, so ist $B' \overset{g.o.}{\sim} B$. Aus $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$ folgt $C_{B'}(v) = T^{-1}\ C_B(v)$, also die Transformationsmatrix von B' nach B ist T^{-1}.
Da $1 = det(Id) = det(T\ T^{-1})$

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: (Reflexivität) Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \overset{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0} > 0$.

(Symmetrie) Z.z.: Ist $B \overset{g.o.}{\sim} B'$, so ist $B' \overset{g.o.}{\sim} B$. Aus $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$ folgt $C_{B'}(v) = T^{-1}\ C_B(v)$, also die Transformationsmatrix von B' nach B ist T^{-1}.
Da $1 = det(Id) = det(T\ T^{-1}) = \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot det(T^{-1})$,

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die

Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \overset{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0} > 0$.

(Symmetrie) Z.z.: Ist $B \overset{g.o.}{\sim} B'$, so ist $B' \overset{g.o.}{\sim} B$. Aus $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$ folgt $C_{B'}(v) = T^{-1}\ C_B(v)$, also die Transformationsmatrix von B' nach B ist T^{-1}.
Da $1 = det(Id) = det(T\ T^{-1}) = \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot det(T^{-1})$, ist

$det(T^{-1}) = \frac{1}{det(T)} > 0$.

Lemma 26 Die Relation $\overset{g.o.}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge allen Basen auf V.

Beweis: **(Reflexivität)** Z.z.: Für jede Base B gilt: $B \overset{g.o.}{\sim} B$. Offensichtlich, da $det(Id) = 1 > 0$.

(Transitivität) Wie in Lemma 25: seien T, T' die Transfomationsmatrizen: $B \xrightarrow{T} B' \xrightarrow{T'} B''$. Nach Definition gilt: $det(T) > 0$, $det(T') > 0$. Nach Lemma 25 gilt: die Transformationsmatrix T'' von B nach B'' ist $T'' = T\ T'$. Dann ist $det(T'') = det(TT') \overset{\text{Satz 40}}{=} \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot \underbrace{det(T')}_{>0} > 0$.

(Symmetrie) Z.z.: Ist $B \overset{g.o.}{\sim} B'$, so ist $B' \overset{g.o.}{\sim} B$. Aus $T\ C_{B'}(v) = C_B(v)$ folgt $C_{B'}(v) = T^{-1}\ C_B(v)$, also die Transformationsmatrix von B' nach B ist T^{-1}.
Da $1 = det(Id) = det(T\ T^{-1}) = \underbrace{det(T)}_{>0} \cdot det(T^{-1})$, ist

$det(T^{-1}) = \frac{1}{det(T)} > 0$.

Def. 38 – Vortsetzung:

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum.

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis:

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst:

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen.

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\stackrel{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V.

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V. Setze nun $B' := (-b_1, b_2, ..., b_n)$.

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V. Setze nun $B' := (-b_1, b_2, ..., b_n)$. Dann ist natürlich B' ebenfalls eine Basis von V.

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V. Setze nun $B' := (-b_1, b_2, ..., b_n)$. Dann ist natürlich B' ebenfalls eine Basis von V.

Untersuche die Orientierung:

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V. Setze nun $B' := (-b_1, b_2, ..., b_n)$. Dann ist natürlich B' ebenfalls eine Basis von V.

Untersuche die Orientierung: $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$.

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V. Setze nun $B' := (-b_1, b_2, ..., b_n)$. Dann ist natürlich B' ebenfalls eine Basis von V.

Untersuche die Orientierung: $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Also,

$det(T) = -1 < 0,$

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V. Setze nun $B' := (-b_1, b_2, ..., b_n)$. Dann ist natürlich B' ebenfalls eine Basis von V.

Untersuche die Orientierung: $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Also,

$det(T) = -1 < 0$, d.h. B und B' sind entgegengesetzt orientiert

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V. Setze nun $B' := (-b_1, b_2, ..., b_n)$. Dann ist natürlich B' ebenfalls eine Basis von V.

Untersuche die Orientierung: $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Also,

$det(T) = -1 < 0$, d.h. B und B' sind entgegengesetzt orientiert und definieren daher zwei verschiedene Orientierungen.

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V. Setze nun $B' := (-b_1, b_2, ..., b_n)$. Dann ist natürlich B' ebenfalls eine Basis von V.

Untersuche die Orientierung: $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Also,

$det(T) = -1 < 0$, d.h. B und B' sind entgegengesetzt orientiert und definieren daher zwei verschiedene Orientierungen.

Nun bleibt zu zeigen, dass V höchstens zwei Orientierungen besitzt.

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V. Setze nun $B' := (-b_1, b_2, ..., b_n)$. Dann ist natürlich B' ebenfalls eine Basis von V.

Untersuche die Orientierung: $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Also,

$det(T) = -1 < 0$, d.h. B und B' sind entgegengesetzt orientiert und definieren daher zwei verschiedene Orientierungen.

Nun bleibt zu zeigen, dass V höchstens zwei Orientierungen besitzt. Angenommen, B, B' und B'' definierten drei verschiedene Orientierungen,

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.
Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.
Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V. Setze nun $B' := (-b_1, b_2, ..., b_n)$. Dann ist natürlich B' ebenfalls eine Basis von V.

Untersuche die Orientierung: $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Also,

$det(T) = -1 < 0$, d.h. B und B' sind entgegengesetzt orientiert und definieren daher zwei verschiedene Orientierungen.
Nun bleibt zu zeigen, dass V höchstens zwei Orientierungen besitzt. Angenommen, B, B' und B'' definierten drei verschiedene Orientierungen, dann wären insbesondere B und B' sowie B' und B'' entgegengesetzt orientiert,

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\stackrel{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V. Setze nun $B' := (-b_1, b_2, ..., b_n)$. Dann ist natürlich B' ebenfalls eine Basis von V.

Untersuche die Orientierung: $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Also,

$det(T) = -1 < 0$, d.h. B und B' sind entgegengesetzt orientiert und definieren daher zwei verschiedene Orientierungen.

Nun bleibt zu zeigen, dass V höchstens zwei Orientierungen besitzt. Angenommen, B, B' und B'' definierten drei verschiedene Orientierungen, dann wären insbesondere B und B' sowie B' und B'' entgegengesetzt orientiert, also $det(T) < 0$, $det(T') < 0$. Dann ist $det(T'') = det(T') \cdot det(T) > 0$.

Def. 38 – Vortsetzung: Eine Orientierung von V ist eine Äquivalenzklasse von Basen bzgl. $\overset{g.o.}{\sim}$.

Lemma 27 Sei V ein nichttrivialer endlichdimensionaler $\mathbb{R}-$Vektorraum. Dann besitzt V genau zwei Orientierungen.

Beweis: Wir zeigen zunächst: V hat mindestens zwei Orientierungen. Sei dazu $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ eine Basis von V. Setze nun $B' := (-b_1, b_2, ..., b_n)$. Dann ist natürlich B' ebenfalls eine Basis von V.

Untersuche die Orientierung: $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Also,

$det(T) = -1 < 0$, d.h. B und B' sind entgegengesetzt orientiert und definieren daher zwei verschiedene Orientierungen.

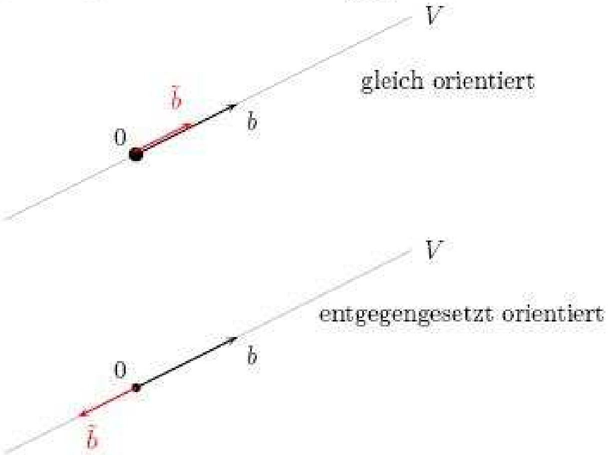
Nun bleibt zu zeigen, dass V höchstens zwei Orientierungen besitzt. Angenommen, B, B' und B'' definierten drei verschiedene Orientierungen, dann wären insbesondere B und B' sowie B' und B'' entgegengesetzt orientiert, also $det(T) < 0$, $det(T') < 0$. Dann ist $det(T'') = det(T') \cdot det(T) > 0$. $\square$

Orientierung in Dimensionen $n = 1, 2, 3$

Orientierung in Dimensionen $n = 1, 2, 3$

.

$\underline{n=1}$ $\tilde{b} = t \cdot b$
$\tilde{b}, b$ sind gleich orientiert:$\Leftrightarrow$ $\det\big((t)\big) = t > 0$.



Die Orientierung entspricht also der „Durchlaufrichtung“.

Orientierung in Dimension $n = 2$: Positive Basen auf der Ebene

Orientierung in Dimension $n = 2$: Positive Basen auf der Ebene

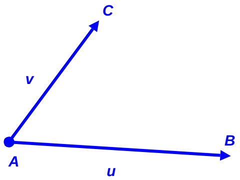
Betrachte eine Basis $(\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC})$ auf der Ebene.

Orientierung in Dimension $n = 2$: Positive Basen auf der Ebene

Betrachte eine Basis $(\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC})$ auf der Ebene.
Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen (traditionell: positive und negative Orientirung) von Basen

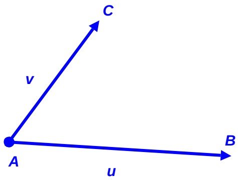
Orientierung in Dimension $n = 2$: Positive Basen auf der Ebene

Betrachte eine Basis $(\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC})$ auf der Ebene.
Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen (traditionell: positive und negative Orientirung) von Basen



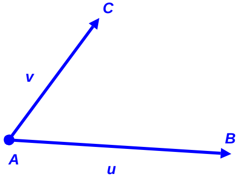
Orientierung in Dimension $n = 2$: Positive Basen auf der Ebene

Betrachte eine Basis ($\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$) auf der Ebene.
Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen (traditionell: positive und negative Orientirung) von Basen



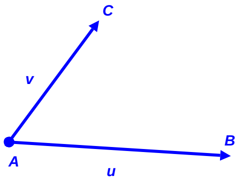
Orientierung in Dimension $n = 2$: Positive Basen auf der Ebene

Betrachte eine Basis $(\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC})$ auf der Ebene.
Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen (traditionell: positive und negative Orientirung) von Basen
Eine Basis positiv ist,



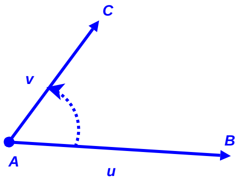
Orientierung in Dimension $n = 2$: Positive Basen auf der Ebene

Betrachte eine Basis $(\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC})$ auf der Ebene.
Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen (traditionell: positive und negative Orientirung) von Basen
Eine Basis positiv ist, falls wir die Halbgerade AB gegen den Uhrzeigersinn um Winkel $< 180^o$ drehen mussen, um die Halbgerade AC zu erreichen,



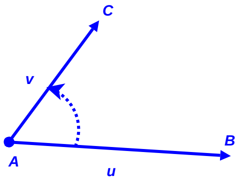
Orientierung in Dimension $n = 2$: Positive Basen auf der Ebene

Betrachte eine Basis $(\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC})$ auf der Ebene.
Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen (traditionell: positive und negative Orientirung) von Basen
Eine Basis positiv ist, falls wir die Halbgerade AB gegen den Uhrzeigersinn um Winkel $< 180^o$ drehen mussen, um die Halbgerade AC zu erreichen,



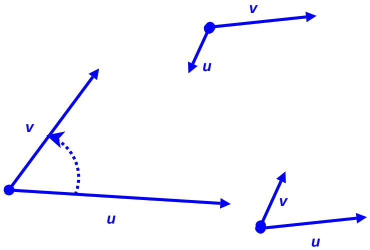
Orientierung in Dimension $n = 2$: Positive Basen auf der Ebene

Betrachte eine Basis $(\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC})$ auf der Ebene.
Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen (traditionell: positive und negative Orientirung) von Basen
Eine Basis positiv ist, falls wir die Halbgerade AB gegen den Uhrzeigersinn um Winkel $< 180^o$ drehen mussen, um die Halbgerade AC zu erreichen,



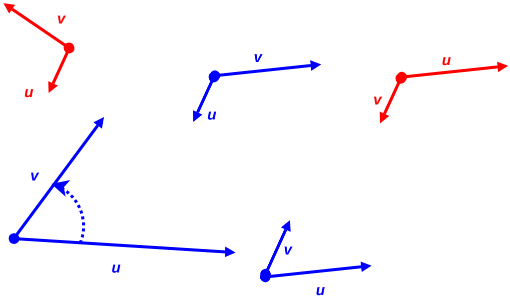
Orientierung in Dimension $n = 2$: Positive Basen auf der Ebene

Betrachte eine Basis $(\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC})$ auf der Ebene.
Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen (traditionell: positive und negative Orientirung) von Basen
Eine Basis positiv ist, falls wir die Halbgerade AB gegen den Uhrzeigersinn um Winkel $< 180^o$ drehen mussen, um die Halbgerade AC zu erreichen,



Orientierung in Dimension $n = 2$: Positive Basen auf der Ebene

Betrachte eine Basis $(\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC})$ auf der Ebene.
Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen (traditionell: positive und negative Orientirung) von Basen
Eine Basis positiv ist, falls wir die Halbgerade AB gegen den Uhrzeigersinn um Winkel $< 180^o$ drehen mussen, um die Halbgerade AC zu erreichen, und negative sonst.



Orientierung in Dimension $n = 3$: Positive Basen im 3-d-Raum

Orientierung in Dimension $n = 3$: Positive Basen im 3-d-Raum

Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen

Orientierung in Dimension $n = 3$: Positive Basen im 3-d-Raum

Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen

Orientierung in Dimension $n = 3$: Positive Basen im 3-d-Raum

Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen (traditionell: positive und negative Orientirung) von Basen

Orientierung in Dimension $n = 3$: Positive Basen im 3-d-Raum

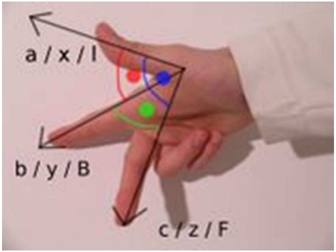
Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen (traditionell: positive und negative Orientirung) von Basen

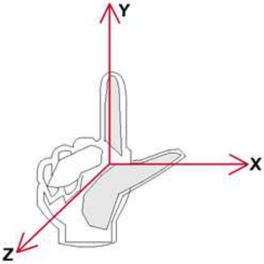
Mnemonische Drei-Finger-Regel (auch Rechte-Hand-Regel):

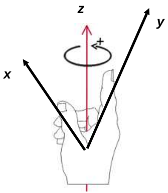
Orientierung in Dimension $n = 3$: Positive Basen im 3-d-Raum

Nach Lemma 27 gibt es zwei mögliche Orientirungen (traditionell: positive und negative Orientirung) von Basen

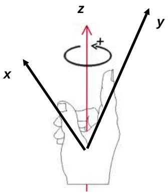
Mnemonische Drei-Finger-Regel (auch Rechte-Hand-Regel):
Daumen in Richtung des ersten Vektors, Zeigefinger in Richtung des zweiten Vektors, Mittelfinger (rechtwinklig zum Daumen und zum Zeigefinger abgespreizt) zeigt bei einem Rechtssystem in Richtung des dritten Vektors.



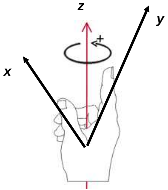




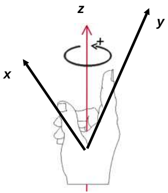
Mnemonische Schraubenregel:



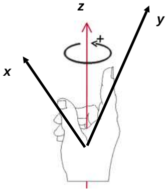
Mnemonische Schraubenregel:



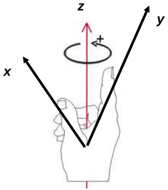
Mnemonische Schraubenregel: Wenn der erste Vektor in den zweiten Vektor gedreht wird,



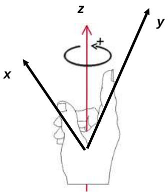
Mnemonische Schraubenregel: Wenn der erste Vektor in den zweiten Vektor gedreht wird, würde sich eine gleichermaßen gedrehte Schraube in Richtung des



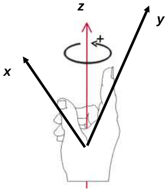
Mnemonische Schraubenregel: Wenn der erste Vektor in den zweiten Vektor gedreht wird, würde sich eine gleichermaßen gedrehte Schraube in Richtung des dritten Vektors bewegen,



Mnemonische Schraubenregel: Wenn der erste Vektor in den zweiten Vektor gedreht wird, würde sich eine gleichermaßen gedrehte Schraube in Richtung des dritten Vektors bewegen, wenn die Vektoren ein Rechtssystem bilden.



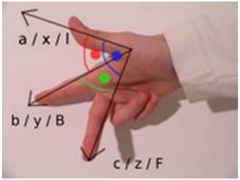
Mnemonische Schraubenregel: Wenn der erste Vektor in den zweiten Vektor gedreht wird, würde sich eine gleichermaßen gedrehte Schraube in Richtung des dritten Vektors bewegen, wenn die Vektoren ein Rechtssystem bilden.

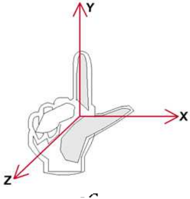


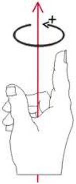
Mnemonische Schraubenregel: Wenn der erste Vektor in den zweiten Vektor gedreht wird, würde sich eine gleichermaßen gedrehte Schraube in Richtung des dritten Vektors bewegen, wenn die Vektoren ein Rechtssystem bilden.

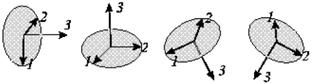
Ein bisschen Üben

Ein bisschen Üben





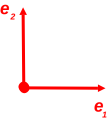




Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

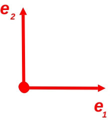
Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene,



Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

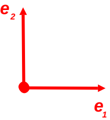
Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.



Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.

Definiere die Funktion $det_{geo} : Mat(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

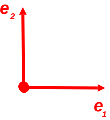


Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.

Definiere die Funktion $det_{geo} : Mat(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\left|det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right| :=$$

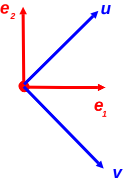


Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.

Definiere die Funktion $det_{geo} : Mat(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$|det_{\text{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}| :=$ Flächeninhalt des Parallelogramms, das auf $u_1 e_1 + u_2 e_2, \; v_1 e_1 + v_2 e_2$, aufgespannt ist.



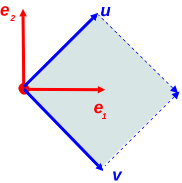
Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.

Definiere die Funktion $det_{geo} : Mat(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$\left|det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right| :=$ Flächeninhalt des Parallelogramms, das auf $u_1 e_1 + u_2 e_2, \;\; v_1 e_1 + v_2 e_2$, aufgespannt ist.

$$\text{Vorzeichen}\left(det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right) =$$



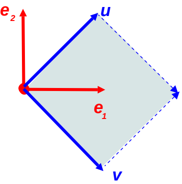
Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.

Definiere die Funktion $det_{geo} : Mat(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$\left| det_{\text{geo}} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| :=$ Flächeninhalt des Parallelogramms, das auf $u_1 e_1 + u_2 e_2,\ \ v_1 e_1 + v_2 e_2$, aufgespannt ist.

$$\text{Vorzeichen}\left(det_{\text{geo}} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} + & \text{falls } (u, v) \text{ eine positive Basis ist} \\ - & \text{sonst} \end{cases}$$



Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

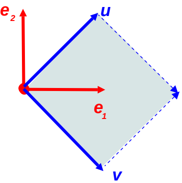
Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.

Definiere die Funktion $det_{geo} : Mat(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$\left|det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right| :=$ Flächeninhalt des Parallelogramms, das auf $u_1 e_1 + u_2 e_2, \ \ v_1 e_1 + v_2 e_2$, aufgespannt ist.

$$\text{Vorzeichen}\left(det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} + & \text{falls } (u, v) \text{ eine positive Basis ist} \\ - & \text{sonst} \end{cases}$$

Auf dem Bild:



Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

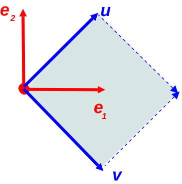
Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.

Definiere die Funktion $det_{geo} : Mat(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$\left|det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right| :=$ Flächeninhalt des Parallelogramms, das auf $u_1 e_1 + u_2 e_2,\ \ v_1 e_1 + v_2 e_2$, aufgespannt ist.

$$\text{Vorzeichen}\left(det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} + & \text{falls } (u,v) \text{ eine positive Basis ist} \\ - & \text{sonst} \end{cases}$$

Auf dem Bild:



Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

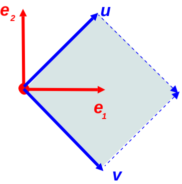
Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.

Definiere die Funktion $det_{geo} : Mat(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$\left|det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right| :=$ Flächeninhalt des Parallelogramms, das auf $u_1e_1 + u_2e_2,\ \ v_1e_1 + v_2e_2$, aufgespannt ist.

$$\text{Vorzeichen}\left(det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} + & \text{falls } (u, v) \text{ eine positive Basis ist} \\ - & \text{sonst} \end{cases}$$

Auf dem Bild: $u = e_1 + e_2$, $v = e_1 - e_2$, also $det_{geo}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$



Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

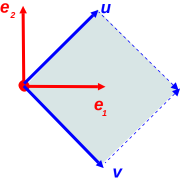
Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.

Definiere die Funktion $det_{geo} : Mat(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$\left|det_{\text{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right| :=$ Flächeninhalt des Parallelogramms, das auf $u_1 e_1 + u_2 e_2$, $v_1 e_1 + v_2 e_2$, aufgespannt ist.

$$\text{Vorzeichen}\left(det_{\text{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} + & \text{falls } (u,v) \text{ eine positive Basis ist} \\ - & \text{sonst} \end{cases}$$

Auf dem Bild: $u = e_1 + e_2$, $v = e_1 - e_2$, also
$det_{geo}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$



Behauptung: $det_{geo} = det$.
In Worten: *Determinante des Matrix A ist der orientierte Flächeninthalt des Parallelogramms, s.d. die Koordianten der Seiten die Zeilen von Matrix ist*

Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

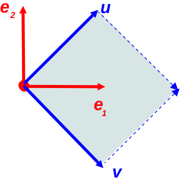
Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.

Definiere die Funktion $det_{geo} : Mat(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$\left|det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right| :=$ Flächeninhalt des Parallelogramms, das auf $u_1 e_1 + u_2 e_2,\ \ v_1 e_1 + v_2 e_2$, aufgespannt ist.

$$\text{Vorzeichen}\left(det_{\mathrm{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} + & \text{falls } (u, v) \text{ eine positive Basis ist} \\ - & \text{sonst} \end{cases}$$

Auf dem Bild: $u = e_1 + e_2$, $v = e_1 - e_2$, also
$det_{geo}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$



Behauptung: $det_{geo} = det$.
In Worten: *Determinante des Matrix A ist der orientierte Flächeninthalt des Parallelogramms, s.d. die Koordianten der Seiten die Zeilen von Matrix ist*

Wiederholung — Def. 35 :

Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

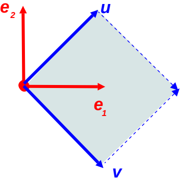
Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.

Definiere die Funktion $det_{geo} : Mat(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$|det_{\rm geo}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}| :=$ Flächeninhalt des Parallelogramms, das auf $u_1e_1 + u_2e_2, \ \ v_1e_1 + v_2e_2$, aufgespannt ist.

$$\text{Vorzeichen}\left(det_{\rm geo}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} + & \text{falls } (u,v) \text{ eine positive Basis ist} \\ - & \text{sonst} \end{cases}$$

Auf dem Bild: $u = e_1 + e_2$, $v = e_1 - e_2$, also $det_{geo}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$



Behauptung: $det_{geo} = det$.
In Worten: *Determinante des Matrix A ist der orientierte Flächeninthalt des Parallelogramms, s.d. die Koordianten der Seiten die Zeilen von Matrix ist*

Wiederholung — Def. 35 : Determinante ist eine Abbilldung, die (D1, D2, D3) erfüllt;

Determinante als das Volumen/Flächeninhalt

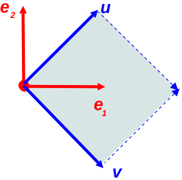
Man betrachte eine positive Basis (e_1, e_2) auf der Ebene, s.d. die Vektoren e_1, e_2 die Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 1 sind.

Definiere die Funktion $det_{geo} : Mat(2, 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$\left|det_{\text{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right| :=$ Flächeninhalt des Parallelogramms, das auf $u_1 e_1 + u_2 e_2, \;\; v_1 e_1 + v_2 e_2$, aufgespannt ist.

$$\text{Vorzeichen}\left(det_{\text{geo}}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} + & \text{falls } (u, v) \text{ eine positive Basis ist} \\ - & \text{sonst} \end{cases}$$

Auf dem Bild: $u = e_1 + e_2$, $v = e_1 - e_2$, also
$det_{geo}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$



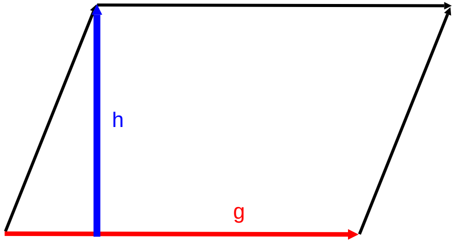
Behauptung: $det_{geo} = det$.
In Worten: *Determinante des Matrix A ist der orientierte Flächeninthalt des Parallelogramms, s.d. die Koordianten der Seiten die Zeilen von Matrix ist*

Wiederholung — Def. 35 : Determinante ist eine Abbilldung, die (D1, D2, D3) erfüllt; wir müssen (D1, D2, D3) für det_{geo} nachweisen.

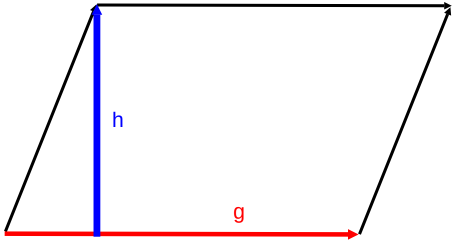
Wir müssen Prüfen, dass der orientierte

Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat.

Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.

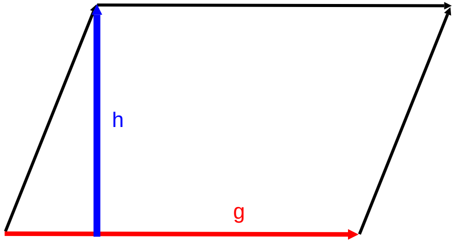


Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.
(D1) (Linearität)



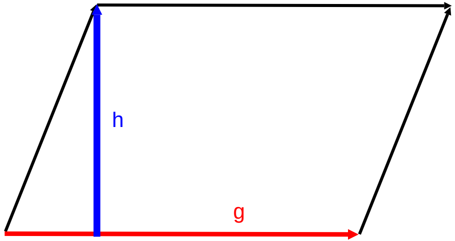
Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.

(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren,



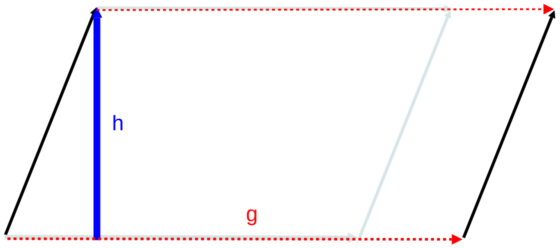
Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.

(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird deren Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe.



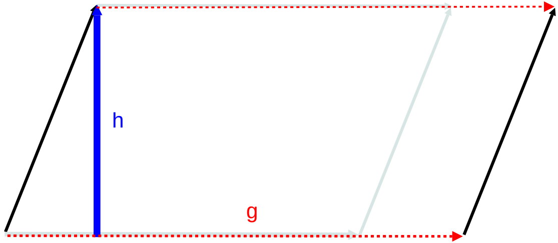
Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.

(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird deren Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe.

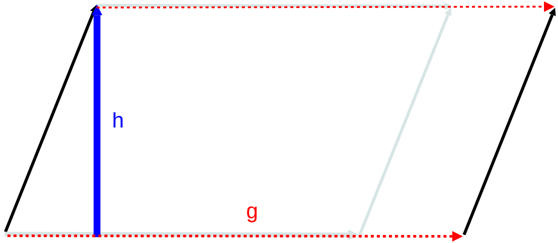


Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.

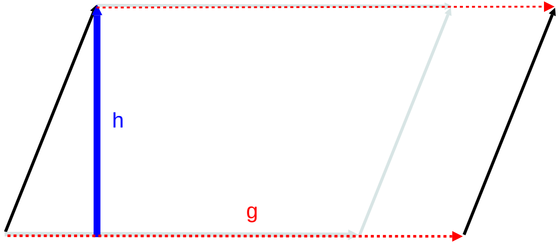
(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird deren Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe.



Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1)-(D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.
(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird deren Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe.

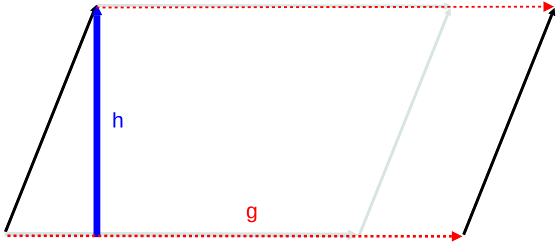


Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.
(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird deren Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe. Also, wird Flächeninhalt mit λ multipliziert.



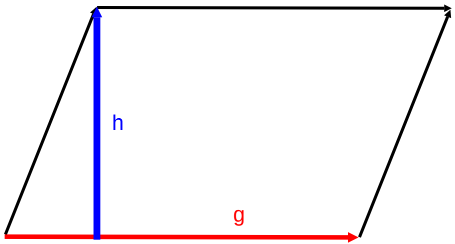
Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.

(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird deren Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe. Also, wird Flächeninhalt mit λ multipliziert.

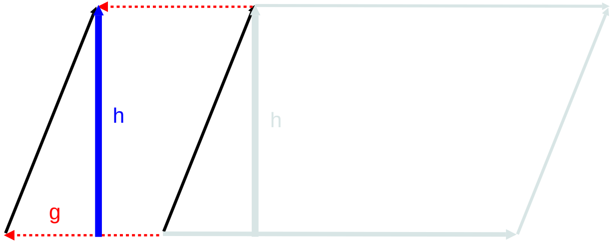


Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.

(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird deren Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe. Also, wird Flächeninhalt mit λ multipliziert. Falls λ negativ ist, wird zusätzlich die Orientation der Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ geändert.

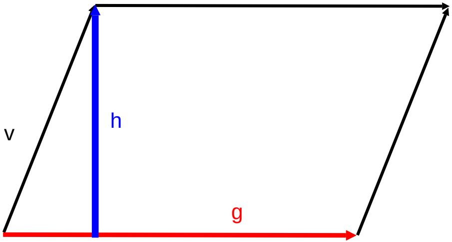


Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1)-(D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.
(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird deren Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe. Also, wird Flächeninhalt mit λ multipliziert. Falls λ negativ ist, wird zusätzlich die Orientation der Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ geändert.



Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1)-(D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.

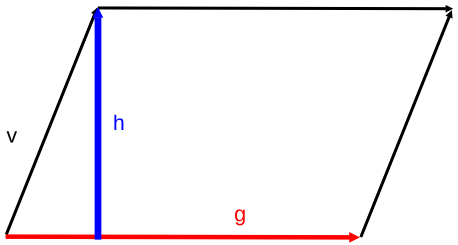
(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird deren Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe. Also, wird Flächeninhalt mit λ multipliziert. Falls λ negativ ist, wird zusätzlich die Orientation der Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ geändert.



Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.

(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird deren Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe. Also, wird Flächeninhalt mit λ multipliziert. Falls λ negativ ist, wird zusätzlich die Orientation der Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ geändert.

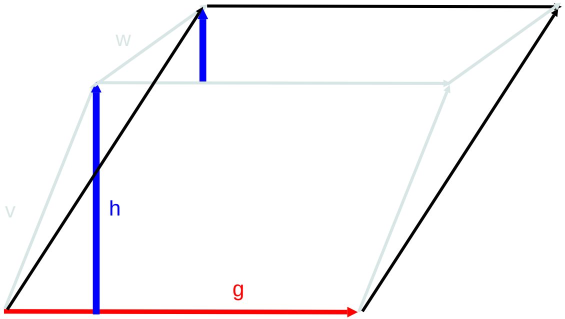
Wenn wir $\vec{v}$ mit $\vec{v} + \vec{w}$ ersetzen,



Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.

(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird deren Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe. Also, wird Flächeninhalt mit λ multipliziert. Falls λ negativ ist, wird zusätzlich die Orientation der Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ geändert.

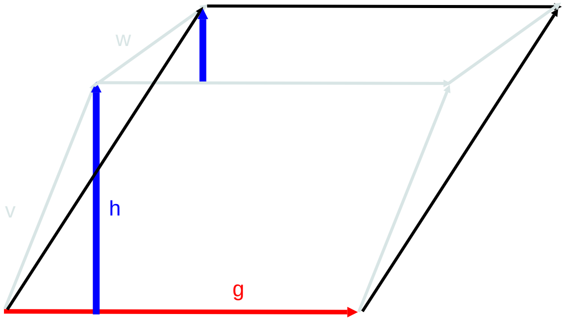
Wenn wir $\vec{v}$ mit $\vec{v} + \vec{w}$ ersetzen,



Wir müssen Prüfen, dass der orientierte Flächeninhalt die Eigenschaften $(D1) - (D3)$ hat. Wir wissen (Schulgeomentrie), dass der Flächeninhalt gleich Grundseite g mal Höhe h ist.

(D1) (Linearität) Wenn wir $\vec{u}$ mit λ multiplizieren, wird deren Länge auch mit λ multipliziert, die Höhe bleibt dieselbe. Also, wird Flächeninhalt mit λ multipliziert. Falls λ negativ ist, wird zusätzlich die Orientation der Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ geändert.

Wenn wir $\vec{v}$ mit $\vec{v} + \vec{w}$ ersetzen, werden wir Flächeninhalt um dem (orientierten) Flächeninhalt des Parallelogramm mit Seiten $\vec{u}, \vec{w}$ vergrößern bzw. verkleinert.



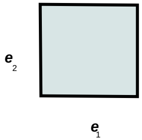
(D2)

(D2) Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind,

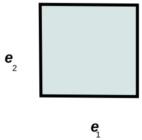
(D2) Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, ist die Höhe gleich 0 und deswegen ist der Flächeninhalt gleich 0.

(D2) Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, ist die Höhe gleich 0 und deswegen ist der Flächeninhalt gleich 0.

(D3) Flächeninhalt des Quadrats mit Seite 1 ist 1

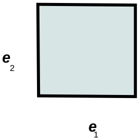


(D2) Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, ist die Höhe gleich 0 und deswegen ist der Flächeninhalt gleich 0.
(D3) Flächeninhalt des Quadrats mit Seite 1 ist 1



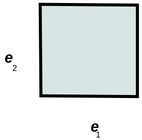
Ähnlich ist im Raum.

(D2) Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, ist die Höhe gleich 0 und deswegen ist der Flächeninhalt gleich 0.
(D3) Flächeninhalt des Quadrats mit Seite 1 ist 1



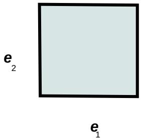
Ähnlich ist im Raum.
Da die Determinate der Matrix gleich die Determinante der transponierten Matrix ist (Satz 43),

(D2) Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, ist die Höhe gleich 0 und deswegen ist der Flächeninhalt gleich 0.
(D3) Flächeninhalt des Quadrats mit Seite 1 ist 1



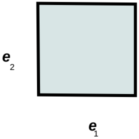
Ähnlich ist im Raum.
Da die Determinate der Matrix gleich die Determinante der transponierten Matrix ist (Satz 43), kann man die Determinante als orientierender Flächeninhalt des Parallelogramms auffassen,

(D2) Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, ist die Höhe gleich 0 und deswegen ist der Flächeninhalt gleich 0.
(D3) Flächeninhalt des Quadrats mit Seite 1 ist 1



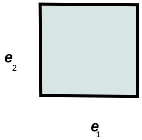
Ähnlich ist im Raum.
Da die Determinate der Matrix gleich die Determinante der transponierten Matrix ist (Satz 43), kann man die Determinante als orientierender Flächeninhalt des Parallelogramms auffassen, deren Seiten die Spalten der Matrix ist.

(D2) Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, ist die Höhe gleich 0 und deswegen ist der Flächeninhalt gleich 0.
(D3) Flächeninhalt des Quadrats mit Seite 1 ist 1



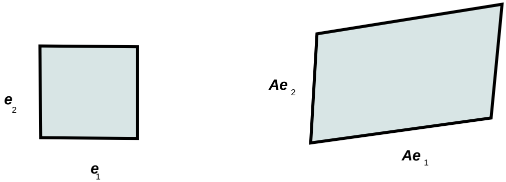
Ähnlich ist im Raum.
Da die Determinate der Matrix gleich die Determinante der transponierten Matrix ist (Satz 43), kann man die Determinante als orientierender Flächeninhalt des Parallelogramms auffassen, deren Seiten die Spalten der Matrix ist. Da die Spalten der Matrix genau die Bilder von Basisvektoren sind (unter der Abbildung f_A),

(D2) Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, ist die Höhe gleich 0 und deswegen ist der Flächeninhalt gleich 0.
(D3) Flächeninhalt des Quadrats mit Seite 1 ist 1



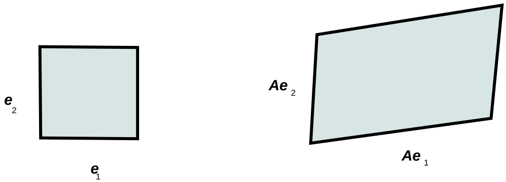
Ähnlich ist im Raum.
Da die Determinate der Matrix gleich die Determinante der transponierten Matrix ist (Satz 43), kann man die Determinante als orientierender Flächeninhalt des Parallelogramms auffassen, deren Seiten die Spalten der Matrix ist. Da die Spalten der Matrix genau die Bilder von Basisvektoren sind (unter der Abbildung f_A), wird der Flächeninhalt des Bildes des Quadrats mit der Seite gleich 1 gleich $det(A)$.

(D2) Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, ist die Höhe gleich 0 und deswegen ist der Flächeninhalt gleich 0.
(D3) Flächeninhalt des Quadrats mit Seite 1 ist 1



Ähnlich ist im Raum.
Da die Determinate der Matrix gleich die Determinante der transponierten Matrix ist (Satz 43), kann man die Determinante als orientierender Flächeninhalt des Parallelogramms auffassen, deren Seiten die Spalten der Matrix ist. Da die Spalten der Matrix genau die Bilder von Basisvektoren sind (unter der Abbildung f_A), wird der Flächeninhalt des Bildes des Quadrats mit der Seite gleich 1 gleich $det(A)$.

(D2) Falls $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, ist die Höhe gleich 0 und deswegen ist der Flächeninhalt gleich 0.
(D3) Flächeninhalt des Quadrats mit Seite 1 ist 1



Ähnlich ist im Raum.
Da die Determinate der Matrix gleich die Determinante der transponierten Matrix ist (Satz 43), kann man die Determinante als orientierender Flächeninhalt des Parallelogramms auffassen, deren Seiten die Spalten der Matrix ist. Da die Spalten der Matrix genau die Bilder von Basisvektoren sind (unter der Abbildung f_A), wird der Flächeninhalt des Bildes des Quadrats mit der Seite gleich 1 gleich $det(A)$. Also, die Abbildung f_A multipliziert alle Flächeninhälte mit $\det A$.

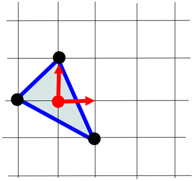
Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe *Finde Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\binom{-1}{0}, \binom{0}{1}$, $C = \binom{1}{-1}$.

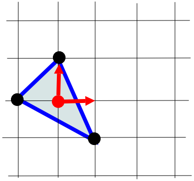


.

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe *Finde Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\binom{-1}{0}, \binom{0}{1}$, $C = \binom{1}{-1}$.

Lösung

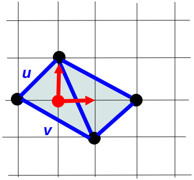


.

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe *Finde Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\binom{-1}{0}, \binom{0}{1}$, $C = \binom{1}{-1}$.

Lösung Das Parallelogramm besteht aus zwei kongruenten Dreiecken,

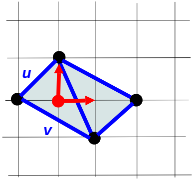


.

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe *Finde Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\binom{-1}{0}, \binom{0}{1}$, $C = \binom{1}{-1}$.

Lösung Das Parallelogramm besteht aus zwei kongruenten Dreiecken,



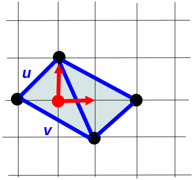
deswegen ist Flächeninhalt

.

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe *Finde Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Lösung Das Parallelogramm besteht aus zwei kongruenten Dreiecken,



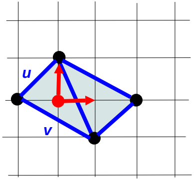
deswegen ist Flächeninhalt
$= \frac{1}{2}\left|det\begin{pmatrix}u_1 & v_1\\u_2 & v_2\end{pmatrix}\right|$

.

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe *Finde Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung Das Parallelogramm besteht aus zwei kongruenten Dreiecken,



deswegen ist Flächeninhalt

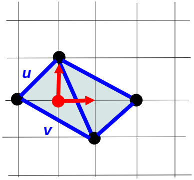
$= \frac{1}{2} \left| det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right|$

$= \frac{1}{2} \left| det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{3}{2}.$

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe *Finde Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\binom{-1}{0}, \binom{0}{1}$, $C = \binom{1}{-1}$.

Lösung Das Parallelogramm besteht aus zwei kongruenten Dreiecken,



deswegen ist Flächeninhalt

$$= \frac{1}{2}\left|det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\right|$$

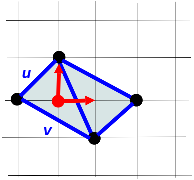
$$= \frac{1}{2}\left|det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}.$$

Hinweis für Hausaufgabe 5, Blatt 9

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe *Finde Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\binom{-1}{0}, \binom{0}{1}$, $C = \binom{1}{-1}$.

Lösung Das Parallelogramm besteht aus zwei kongruenten Dreiecken,



deswegen ist Flächeninhalt

$$= \frac{1}{2}\left|det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\right|$$

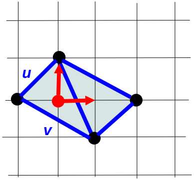
$$= \frac{1}{2}\left|det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}.$$

Hinweis für Hausaufgabe 5, Blatt 9 Dimension ist höher: Sie müssen Volum einer Doppelpiramide berechnen.

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe *Finde Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\binom{-1}{0}, \binom{0}{1}$, $C = \binom{1}{-1}$.

Lösung Das Parallelogramm besteht aus zwei kongruenten Dreiecken,



deswegen ist Flächeninhalt

$$= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\right|$$

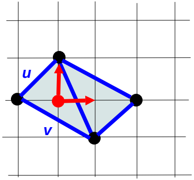
$$= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}.$$

Hinweis für Hausaufgabe 5, Blatt 9 Dimension ist höher: Sie müssen Volum einer Doppelpiramide berechnen. Benutzen Sie, dass Volum von Parallelepiped Betrag von Determinante von der Matrix ist,

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe *Finde Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Lösung Das Parallelogramm besteht aus zwei kongruenten Dreiecken,



deswegen ist Flächeninhalt

$$= \frac{1}{2}\left|det\begin{pmatrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{pmatrix}\right|$$

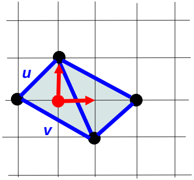
$$= \frac{1}{2}\left|det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}.$$

Hinweis für Hausaufgabe 5, Blatt 9 Dimension ist höher: Sie müssen Volum einer Doppelpiramide berechnen. Benutzen Sie, dass Volum von Parallelepiped Betrag von Determinante von der Matrix ist, deren Spalten die Koordinatenvektoren von Seiten des Parallelepipeds sind,

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe *Finde Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\binom{-1}{0}, \binom{0}{1}$, $C = \binom{1}{-1}$.

Lösung Das Parallelogramm besteht aus zwei kongruenten Dreiecken,



deswegen ist Flächeninhalt

$$= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\right|$$

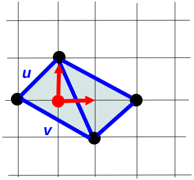
$$= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}.$$

Hinweis für Hausaufgabe 5, Blatt 9 Dimension ist höher: Sie müssen Volum einer Doppelpiramide berechnen. Benutzen Sie, dass Volum von Parallelepiped Betrag von Determinante von der Matrix ist, deren Spalten die Koordinatenvektoren von Seiten des Parallelepipeds sind, und überlegen, auf wie viel kongruenten Tetrahedern kann man Parallelepiped zerlegen

Anwendung: Flächeninhalte Berechnen

Beispielaufgabe *Finde Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken* $\binom{-1}{0}, \binom{0}{1}$, $C = \binom{1}{-1}$.

Lösung Das Parallelogramm besteht aus zwei kongruenten Dreiecken,



deswegen ist Flächeninhalt

$$= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}.$$

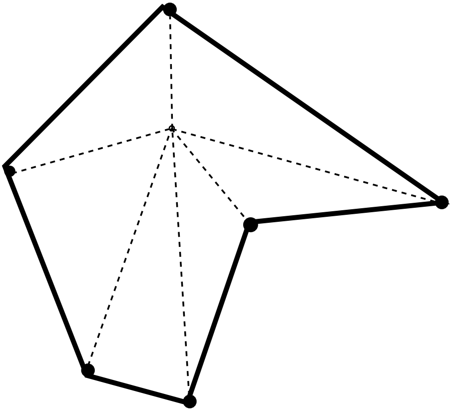
Hinweis für Hausaufgabe 5, Blatt 9 Dimension ist höher: Sie müssen Volum einer Doppelpiramide berechnen. Benutzen Sie, dass Volum von Parallelepiped Betrag von Determinante von der Matrix ist, deren Spalten die Koordinatenvektoren von Seiten des Parallelepipeds sind, und überlegen, auf wie viel kongruenten Tetrahedern kann man Parallelepiped zerlegen (Antwort: 6, aber Sie müssen die Antwort mit einem Bild begründen.)

Anwendung: Flächeninhalt von Polygon

Da man jedes Polygon in Dreiecke zerlegen kann,

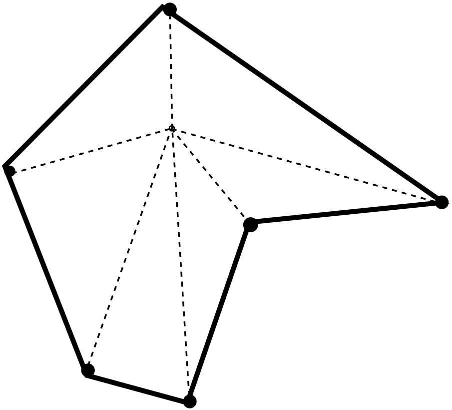
Anwendung: Flächeninhalt von Polygon

Da man jedes Polygon in Dreiecke zerlegen kann,



Anwendung: Flächeninhalt von Polygon

Da man jedes Polygon in Dreiecke zerlegen kann,



kann man mit Hilfe der Determinante den Flächeninhalt jedes Polygons ausrechnen.