Abschnitt: Determinante

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen.

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen.

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A =$

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}.$

Definition 35

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung det* : $Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine* *Determinanteabbildung*,

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}.$

Definition 35 *Eine Abbildung* $\det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} =$$

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda\, [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} =$$

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung det : $Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda\,[a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 *(Determinante ist alternierend):*

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda\,[a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 *(Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix A überein,*

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda\,[a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 *(Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix A überein, so ist $det(A) = 0$.*

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 *(Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix* A *überein, so ist* $det(A) = 0$.

D3 *(Determinante ist normiert):*

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda\,[a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 *(Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix* A *überein, so ist* $det(A) = 0$.

D3 *(Determinante ist normiert):* $det(Id) = 1$

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 *(Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix A überein, so ist $det(A) = 0$.*

D3 *(Determinante ist normiert): $det(Id) = 1$*

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda\,[a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 *(Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix* A *überein, so ist* $det(A) = 0$.

D3 *(Determinante ist normiert):* $det(Id) = 1$

Frage

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda\,[a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 *(Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix A überein, so ist $det(A) = 0$.*

D3 *(Determinante ist normiert): $det(Id) = 1$*

Frage *Existiert solche Funktion?*

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

- D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda\,[a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

- D2 *(Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix A überein, so ist $det(A) = 0$.*
- D3 *(Determinante ist normiert): $det(Id) = 1$*

Frage *Existiert solche Funktion? Ist sie eindeutig?*

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda\, [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 *(Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix A überein, so ist $det(A) = 0$.*

D3 *(Determinante ist normiert): $det(Id) = 1$*

Frage *Existiert solche Funktion? Ist sie eindeutig? Wie kann man sie ausrechnen?*

Abschnitt: Determinante

Bezeichnung Die i-te Zeile werden wir $[a_i]$ bezeichnen. Die Null-Zeile werden wir mit $\mathbf{0}$ bezeichnen. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$.

Definition 35 *Eine Abbildung* $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *heißt eine Determinanteabbildung, falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind*

D1 *Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h.*

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [b_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad ; \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \lambda\,[a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

D2 *(Determinante ist alternierend): Stimmen zwei Zeilen der Matrix A überein, so ist $det(A) = 0$.*

D3 *(Determinante ist normiert):* $det(Id) = 1$

Frage *Existiert solche Funktion? Ist sie eindeutig? Wie kann man sie ausrechnen?*

Satz 38

Satz 38 *Sei* $\det : M(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Determinanteabbildung.*

Satz 38 *Sei det* : $M(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Determinanteabbildung. Dann gilt für alle* $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$

Satz 38 *Sei* $det : M(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Determinanteabbildung. Dann gilt für alle* $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

Satz 38 *Sei* $det : M(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Determinanteabbildung. Dann gilt für alle* $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

D4 *Ist eine Zeile von* A *gleich* $\mathbf{0}$*, so ist* $det(A) = 0$.

Satz 38 *Sei* $det : M(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Determinanteabbildung. Dann gilt für alle* $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

- D4 *Ist eine Zeile von* A *gleich* $\mathbf{0}$*, so ist* $det(A) = 0$*.*
- D5 *Entsteht* B *aus* A *durch Vertauschung zweier Zeilen, so ist* $det(B) = -det(A)$*.*

Satz 38 *Sei* $det : M(n,n,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Determinanteabbildung. Dann gilt für alle* $A, B \in Mat(n,n,\mathbb{K})$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

D4 *Ist eine Zeile von* A *gleich* $\mathbf{0}$*, so ist* $det(A) = 0$*.*

D5 *Entsteht* B *aus* A *durch Vertauschung zweier Zeilen, so ist* $det(B) = -det(A)$*.*

D6 *Entsteht* B *aus* A *durch Addition des Vielefachen einer Zeile zu einer anderen, so ist* $det(B) = det(A)$*.*

Satz 38 *Sei* $det : M(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Determinanteabbildung. Dann gilt für alle* $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

- D4 *Ist eine Zeile von* A *gleich* $\mathbf{0}$*, so ist* $det(A) = 0$.
- D5 *Entsteht* B *aus* A *durch Vertauschung zweier Zeilen, so ist* $det(B) = -det(A)$.
- D6 *Entsteht* B *aus* A *durch Addition des Vielefachen einer Zeile zu einer anderen, so ist* $det(B) = det(A)$.

Beweis für (D4):

Satz 38 *Sei* $det : M(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Determinanteabbildung. Dann gilt für alle* $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

- D4 *Ist eine Zeile von* A *gleich* $\mathbf{0}$, *so ist* $det(A) = 0$.
- D5 *Entsteht* B *aus* A *durch Vertauschung zweier Zeilen, so ist* $det(B) = -det(A)$.
- D6 *Entsteht* B *aus* A *durch Addition des Vielefachen einer Zeile zu einer anderen, so ist* $det(B) = det(A)$.

Beweis für (D4):

$$det(A) =_{det} \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} =$$

Satz 38 *Sei det* : $M(n,n,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Determinanteabbildung. Dann gilt für alle* $A, B \in Mat(n,n,\mathbb{K})$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{K}$:

- D4 *Ist eine Zeile von A gleich* $\mathbf{0}$, *so ist* $det(A) = 0$.
- D5 *Entsteht B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen, so ist* $det(B) = -det(A)$.
- D6 *Entsteht B aus A durch Addition des Vielefachen einer Zeile zu einer anderen, so ist* $det(B) = det(A)$.

Beweis für (D4):

$$det(A) =_{det} \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

Satz 38 *Sei* $det : M(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Determinanteabbildung. Dann gilt für alle* $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

- D4 *Ist eine Zeile von* A *gleich* $\mathbf{0}$*, so ist* $det(A) = 0$*.*
- D5 *Entsteht* B *aus* A *durch Vertauschung zweier Zeilen, so ist* $det(B) = -det(A)$*.*
- D6 *Entsteht* B *aus* A *durch Addition des Vielefachen einer Zeile zu einer anderen, so ist* $det(B) = det(A)$*.*

Beweis für (D4):

$$det(A) =_{det} \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=}$$

Satz 38 *Sei* $det : M(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Determinanteabbildung. Dann gilt für alle* $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

- D4 *Ist eine Zeile von* A *gleich* $\mathbf{0}$*, so ist* $det(A) = 0$*.*
- D5 *Entsteht* B *aus* A *durch Vertauschung zweier Zeilen, so ist* $det(B) = -det(A)$*.*
- D6 *Entsteht* B *aus* A *durch Addition des Vielefachen einer Zeile zu einer anderen, so ist* $det(B) = det(A)$*.*

Beweis für (D4):

$$det(A) =_{det} \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=} 0 \cdot det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

Satz 38 *Sei det* : $M(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *eine Determinanteabbildung. Dann gilt für alle* $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

D4 *Ist eine Zeile von A gleich* $\mathbf{0}$*, so ist* $det(A) = 0$.

D5 *Entsteht B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen, so ist* $det(B) = -det(A)$.

D6 *Entsteht B aus A durch Addition des Vielefachen einer Zeile zu einer anderen, so ist* $det(B) = det(A)$.

Beweis für (D4):

$$det(A) =_{det} \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ 0 \cdot \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=} 0 \cdot det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = 0$$

Beweis für (D5):

Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} det \left(\begin{array}{c} {[a_1]} \\ \vdots \\ {[a_i] + [a_j]} \\ \vdots \\ {[a_i] + [a_j]} \\ \vdots \\ {[a_n]} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} \mathit{det} \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] + [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{Linearität}}{=}$$

Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] + [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i] + [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} +$$

Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=}$$

Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} det \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} +$$

Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow\ i\text{-te Zeile} \\ \\ \longleftarrow\ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix} \overset{\text{Linearität}}{=} det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=}$$

Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{ } i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \text{ } j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix} \overset{\text{Linearität}}{=} \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=}$$

$$0 + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + 0;$$

Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=}$$

$$0 + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + 0; \quad \text{Also} \quad det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

Beweis für (D5):

$$0 \overset{(D2)}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix} \overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i]+[a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=}$$

$$0 + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + 0;$$ Also $$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \qquad \square$$

Beweis für (D6)

Beweis für (D6)

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + \lambda \left[a_j\right] \\ \vdots \\ \left[a_j\right] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

Beweis für (D6)

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + \lambda \left[a_j\right] \\ \vdots \\ \left[a_j\right] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \ i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

Beweis für (D6)

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + \lambda \left[a_j\right] \\ \vdots \\ \left[a_j\right] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \ i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix} \stackrel{\text{Linearität}}{=}$$

Beweis für (D6)

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + \lambda \left[a_j\right] \\ \vdots \\ \left[a_j\right] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \ i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ \left[a_j\right] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} +$$

Beweis für (D6)

$$det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + \lambda\,[a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \; i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \; j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix} \overset{\text{Linearität}}{=} det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \lambda det \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

Beweis für (D6)

$$det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + \lambda\,[a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow \ i\text{-te Zeile} \\ \\ \longleftarrow \ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix} \overset{\text{Linearität}}{=} det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \lambda\, det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=}$$

$$det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} +$$

Beweis für (D6)

$$det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] + \lambda\,[a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{ i-te Zeile} \\ \\ \leftarrow \text{ j-te Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix} \overset{\text{Linearität}}{=} det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \lambda det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=}$$

$$det\begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_i] \\ \vdots \\ [a_j] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} + \lambda 0$$

$\square$

Folgerung

Folgerung *Sind die Zeilen von* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *linear unabhängig,*

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis.

Folgerung *Sind die Zeilen von* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *linear unabhängig,so ist* $det(A) = 0$.

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_i] = \mathbf{0}$,

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind.

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$,

Folgerung *Sind die Zeilen von* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *linear unabhängig,so ist* $det(A) = 0$.

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen.

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}[a_i]$,

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} [a_i]$, also

$det(A) =$

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}[a_i]$, also

$$det(A) = \det \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} [a_i] \,, \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}[a_i]$, also

$$det(A) = \det \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} [a_i] \, , \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=}$$

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}[a_i]$, also

$$det(A) = \det \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \, [a_i] \, , \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \det \begin{pmatrix} [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix}$$

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} [a_i]$, also

$$det(A) = \det \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \, [a_i] \, , \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \stackrel{\text{Linearität}}{=} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \det \begin{pmatrix} [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \stackrel{\text{(D2)}}{=}$$

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}[a_i]$, also

$$det(A) = \det \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} [a_i] , \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \det \begin{pmatrix} [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} \sum_{i=2}^{n} 0 = 0$$

□

Hilfssatz

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} [a_i]$, also

$$det(A) = \det \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \, [a_i] \, , \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \det \begin{pmatrix} [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} \sum_{i=2}^{n} 0 = 0$$

$\square$

Hilfssatz $\rightleftharpoons$ Folgerung aus 1. Dimensionsformel

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,[a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}[a_i]$, also

$$det(A) = \det \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}\,[a_i]\,, \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \det \begin{pmatrix} [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} \sum_{i=2}^{n} 0 = 0$$

$\square$

Hilfssatz $\rightleftharpoons$ Folgerung aus 1. Dimensionsformel

$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *ist kein Isomorphismus*

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}[a_i]$, also

$$det(A) = \det \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} [a_i] \,, \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \det \begin{pmatrix} [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} \sum_{i=2}^{n} 0 = 0$$

$\square$

Hilfssatz $\rightleftharpoons$ Folgerung aus 1. Dimensionsformel

$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *ist kein Isomorphismus* $\Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{K}^n$*,* $x \neq \vec{0}$ *s.d.* $Ax = \vec{0}$

Folgerung *Sind die Zeilen von $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ linear unabhängig,so ist $det(A) = 0$.*

Beweis. Angenommen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [a_i] = \mathbf{0}$, wobei nicht alle λ_i gleich 0 sind. OBdA ist dann $\lambda_1 \neq 0$, sonst die Zeilen vertauschen. Dann ist $[a_1] = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}[a_i]$, also

$$det(A) = \det \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} [a_i] , \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{Linearität}}{=} -\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \det \begin{pmatrix} [a_i] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} \sum_{i=2}^{n} 0 = 0$$

□

Hilfssatz $\rightleftharpoons$ Folgerung aus 1. Dimensionsformel

$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *ist kein Isomorphismus* $\Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{K}^n$*,* $x \neq \vec{0}$ *s.d.* $Ax = \vec{0}$

Satz 39

Satz 39 *Ist A ausgeartet,*

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis.

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet.

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist det(A) = 0*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$.

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.

Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) =$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$,

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist det*$(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.

Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K})$,

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist det(A) = 0*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.

Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear.

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.

Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen:

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$ $(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus.

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\stackrel{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein
Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$ $(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$. Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$ $(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$. Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\stackrel{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein
Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left\{ \vphantom{\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}} \right.$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), & \\ & \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\stackrel{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \quad \text{weil } Ax = \vec{0} \\ \\ \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist det(A) = 0*

Beweis. Sei $A \in Mat(n,n,\mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1,n,\mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1,n,\mathbb{K}) \to Mat(1,n,\mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \quad \text{weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil} \\ \\ \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\stackrel{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$. Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil} \\ \\ \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA = (y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \\ \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \\ \\ \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist det(A) = 0*

Beweis. Sei $A \in Mat(n,n,\mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1,n,\mathbb{K}) = \{(\lambda_1,...,\lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1,n,\mathbb{K}) \to Mat(1,n,\mathbb{K}), \quad f(y) := yA = (y_1,...,y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1,...,y_n)$ mit $yA = (1,0,...,0)$. Dann ist

$$(y_1,...,y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1,\dots,y_n)A = (1,0,\dots,0) \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \\ \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\stackrel{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \ \text{weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \\ \\ \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist det(A) = 0*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.

Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA = (y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$. Dann ist

$$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \\ \text{und} \\ \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \qquad \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$ $(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \ldots, y_n)A = (1, 0, \ldots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \ldots, y_n)A = (1, 0, \ldots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA = (y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \ \text{weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$ $(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$. Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.

Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$ $(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$. Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein
Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \ \text{weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \ldots, y_n)A = (1, 0, \ldots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA = (y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \quad \text{weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \quad \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \ldots, y_n)A = (1, 0, \ldots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist det*$(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.

Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$. Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \ \text{weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Widerspruch

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$. Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \dots, 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Widerspruch zeigt dass f kein Isomorphismus ist.

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \text{ weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \ldots, y_n)A = (1, 0, \ldots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Widerspruch zeigt dass f kein Isomorphismus ist. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein

$(\lambda_1, ...\lambda_n) \neq \mathbf{0}$ mit

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist* $det(A) = 0$

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\stackrel{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$ $(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \ \text{weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Widerspruch zeigt dass f kein Isomorphismus ist. $\stackrel{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $(\lambda_1, ...\lambda_n) \neq \mathbf{0}$ mit $(\lambda_1, ...\lambda_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein
Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \ \text{weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \quad \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Widerspruch zeigt dass f kein Isomorphismus ist. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein
$(\lambda_1, ...\lambda_n) \neq \mathbf{0}$ mit $(\lambda_1, ...\lambda_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda_1 [a_1] + ... + \lambda_n [a_n] =$

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.

Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und $f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$

$(y_1, ..., y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$. Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \ \text{weil } Ax = \vec{0} \\ \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \ldots, y_n)A = (1, 0, \ldots, 0) \\ \qquad \text{und } (1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Widerspruch zeigt dass f kein Isomorphismus ist. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein

$(\lambda_1, ...\lambda_n) \neq \mathbf{0}$ mit $(\lambda_1, ...\lambda_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda_1 [a_1] + ... + \lambda_n [a_n] = \mathbf{0}$

$\overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow}$ $det(A) = 0$.

Satz 39 *Ist A ausgeartet, so ist $det(A) = 0$*

Beweis. Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $Ax = \vec{0}$. OBdA ist $x_1 \neq 0$.
Betrachte $Mat(1, n, \mathbb{K}) = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, und
$f : Mat(1, n, \mathbb{K}) \to Mat(1, n, \mathbb{K}), \quad f(y) := yA =$
$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. f ist linear. Wir zeigen: f ist kein Isomorphismus. Sonst gibt es ein $y = (y_1, ..., y_n)$ mit $yA = (1, 0, ..., 0)$.
Dann ist

$$(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{cases} (0), \ \text{weil } Ax = \vec{0} \\ x_1 \neq 0, \quad \text{weil } (y_1, \dots, y_n)A = (1, 0, \dots, 0) \\ \text{und } (1, 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \end{cases}$$

Widerspruch zeigt dass f kein Isomorphismus ist. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ gibt es ein

$$(\lambda_1, ...\lambda_n) \neq \mathbf{0} \text{ mit } (\lambda_1, ...\lambda_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda_1 [a_1] + ... + \lambda_n [a_n] = \mathbf{0}$$

$\overset{\text{Folgerung}}{\Longrightarrow} det(A) = 0.$ □

Lemma 24

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante)

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung.*

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet,*

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$.

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$,

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$,

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *nichtausgeartet, so ist* $det(A) \neq 0$

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort:

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \stackrel{(D5)}{=}$

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A))$

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$.

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \stackrel{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \stackrel{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt:

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \stackrel{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \stackrel{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis.

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet,

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 39}}{=} 0$.

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \stackrel{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \stackrel{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \stackrel{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \stackrel{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \stackrel{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \stackrel{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 36): $A = E_1 ... E_{m-1} E_m Id$.

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 36): $A = E_1 ... E_{m-1} E_m Id$.

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 36): $A = E_1 ... E_{m-1} E_m Id$.

Dann ist $det(A) = det(E_1 ... E_{m-1} E_m Id)$.

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 36): $A = E_1 ... E_{m-1} E_m Id$.

Dann ist $det(A) = det(E_1 ... E_{m-1} E_m Id)$. Nach (D3) ist $det(Id) = 1$.

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 36): $A = E_1 ... E_{m-1} E_m Id$.

Dann ist $det(A) = det(E_1 ... E_{m-1} E_m Id)$. Nach (D3) ist $det(Id) = 1$. Dann ist $det(E_m Id)$ eindeutig bestimmt

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 36): $A = E_1 ... E_{m-1} E_m Id$.

Dann ist $det(A) = det(E_1 ... E_{m-1} E_m Id)$. Nach (D3) ist $det(Id) = 1$. Dann ist $det(E_m Id)$ eindeutig bestimmt (und nicht Null).

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 36): $A = E_1 ... E_{m-1} E_m Id$.

Dann ist $det(A) = det(E_1 ... E_{m-1} E_m Id)$. Nach (D3) ist $det(Id) = 1$. Dann ist $det(E_m Id)$ eindeutig bestimmt (und nicht Null). Dann ist $det(E_{m-1} E_m Id)$ eindeutung bestimmt

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 36): $A = E_1 ... E_{m-1} E_m Id$.

Dann ist $det(A) = det(E_1 ... E_{m-1} E_m Id)$. Nach (D3) ist $det(Id) = 1$. Dann ist $det(E_m Id)$ eindeutig bestimmt (und nicht Null). Dann ist $det(E_{m-1} E_m Id)$ eindeuting bestimmt (und auch nicht Null),

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 36): $A = E_1 ... E_{m-1}E_m Id$.

Dann ist $det(A) = det(E_1 ... E_{m-1}E_m Id)$. Nach (D3) ist $det(Id) = 1$. Dann ist $det(E_m Id)$ eindeutig bestimmt (und nicht Null). Dann ist $det(E_{m-1}E_m Id)$ eindeutung bestimmt (und auch nicht Null), u.s.w.

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 36): $A = E_1 ... E_{m-1}E_m Id$.

Dann ist $det(A) = det(E_1 ... E_{m-1}E_m Id)$. Nach (D3) ist $det(Id) = 1$. Dann ist $det(E_m Id)$ eindeutig bestimmt (und nicht Null). Dann ist $det(E_{m-1}E_m Id)$ eindeuting bestimmt (und auch nicht Null), u.s.w. Also, $det(A)$ ist eindeutig bestimmt

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \overset{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \overset{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \overset{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \overset{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 36): $A = E_1...E_{m-1}E_m Id$.

Dann ist $det(A) = det(E_1...E_{m-1}E_m Id)$. Nach (D3) ist $det(Id) = 1$. Dann ist $det(E_m Id)$ eindeutig bestimmt (und nicht Null). Dann ist $det(E_{m-1}E_m Id)$ eindeuting bestimmt (und auch nicht Null), u.s.w. Also, $det(A)$ ist eindeutig bestimmt (und nicht Null).

Lemma 24(Eindeutigkit der Determinante) *Es gibt höchstens eine Determinanteabbildung. Ferner gilt: ist $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ nichtausgeartet, so ist $det(A) \neq 0$*

Frage vor dem Beweis Angenommen, wir kennen $det(A)$. Was ist $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$?

Antwort: $det(E_{ij}A) \stackrel{(D5)}{=} -det(A)$ (falls $i \neq j$), $det(E_{ij}^{\lambda}A)) \stackrel{(D6)}{=} det(A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \lambda det(A)$. Ferner gilt: ist $det(A) \neq 0$, so sind $det(E_{ij}A)$, $det(E_{ij}^{\lambda}A)$, $det(E_{ii}^{\lambda}A)$ auch nicht 0.

Beweis. Ist A ausgeartet, so ist $det(A) \stackrel{\text{Satz 39}}{=} 0$. Ist A nichtsausgeartet, so kann man A in Produkt von Elementarmatrizen zerlegen (Satz 36): $A = E_1 ... E_{m-1}E_m Id$.

Dann ist $det(A) = det(E_1 ... E_{m-1}E_m Id)$. Nach (D3) ist $det(Id) = 1$. Dann ist $det(E_m Id)$ eindeutig bestimmt (und nicht Null). Dann ist $det(E_{m-1}E_m Id)$ eindeuting bestimmt (und auch nicht Null), u.s.w. Also, $det(A)$ ist eindeutig bestimmt (und nicht Null). □

Satz 40

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$.

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB)$

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis.

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet.

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist,

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34
$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow}$

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\stackrel{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34
$\stackrel{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow}$ $det(AB) = 0$

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34
$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow}$ $det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B)$,

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34

$$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow} \quad det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B),$$ $\square$.

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34

$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow}$ $det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B)$, $\square$.

Fall 2 Sei A nichtausgeartet.

Satz 40 $A, B \in Mat(n,n,\mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34

$$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow} \quad det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B),$$ □.

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\overset{\text{Satz 36}}{\Longrightarrow}$

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34

$$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow} \; det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B),$$ □.

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\overset{\text{Satz 36}}{\Longrightarrow}$ $A = E_1 E_2 ... E_m$.

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34

$$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow} det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B),$$ □.

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\overset{\text{Satz 36}}{\Longrightarrow} A = E_1 E_2 ... E_m$.
Dann ist

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34

$$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow} \quad det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B), \qquad \square.$$

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\overset{\text{Satz 36}}{\Longrightarrow}$ $A = E_1 E_2 ... E_m$.
Dann ist $det(AB) = det(E_1 E_2 ... E_m B)$

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34

$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow}$ $det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B)$, $\square$.

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\overset{\text{Satz 36}}{\Longrightarrow}$ $A = E_1 E_2 ... E_m$.

Dann ist $det(AB) = det(E_1 E_2 ... E_m B) = det(E_1)det(E_2 ... E_m B)$

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34
$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow}$ $det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B)$, $\square$.

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\overset{\text{Satz 36}}{\Longrightarrow}$ $A = E_1 E_2 ... E_m$.
Dann ist $det(AB) = det(E_1 E_2 ... E_m B) = det(E_1)det(E_2 ... E_m B) = det(E_1)det(E_2)det(E_3 ... E_m B) =$

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34

$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow}$ $det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B)$, $\square$.

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\overset{\text{Satz 36}}{\Longrightarrow}$ $A = E_1 E_2 ... E_m$.
Dann ist $det(AB) = det(E_1 E_2 ... E_m B) = det(E_1)det(E_2 ... E_m B) = det(E_1)det(E_2)det(E_3 ... E_m B) = \ ...$
$= det(E_1)det(E_2)...det(E_m)\mathrm{det}(B)$.

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34
$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow}$ $det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B)$, $\square$.

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\overset{\text{Satz 36}}{\Longrightarrow}$ $A = E_1 E_2 ... E_m$.
Dann ist $det(AB) = det(E_1 E_2 ... E_m B) = det(E_1)det(E_2 ... E_m B) =$
$det(E_1)det(E_2)det(E_3 ... E_m B) = \; ...$
$= det(E_1)det(E_2)...det(E_m)\mathrm{det}(B)$.

Ähnlich,
$det(A) = det(A \cdot Id) =$

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34

$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow}$ $det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B)$, $\square$.

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\overset{\text{Satz 36}}{\Longrightarrow}$ $A = E_1 E_2 ... E_m$.
Dann ist $det(AB) = det(E_1 E_2 ... E_m B) = det(E_1)det(E_2 ... E_m B) = det(E_1)det(E_2)det(E_3 ... E_m B) = \; ...$
$= det(E_1)det(E_2)...det(E_m)\mathrm{det}(B)$.

Ähnlich,
$det(A) = det(A \cdot Id) = det(E_1)det(E_2)...det(E_m) \cdot 1$.

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34
$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow}$ $det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B)$, $\square$.

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\overset{\text{Satz 36}}{\Longrightarrow}$ $A = E_1 E_2 ... E_m$.
Dann ist $det(AB) = det(E_1 E_2 ... E_m B) = det(E_1)det(E_2 ... E_m B) = det(E_1)det(E_2)det(E_3 ... E_m B) = \; ...$
$= det(E_1)det(E_2)...det(E_m)\mathrm{det}(B)$.

Ähnlich,
$det(A) = det(A \cdot Id) = det(E_1)det(E_2)...det(E_m) \cdot 1$.

Also, $det(AB) = det(A)det(B)$.

Satz 40 $A, B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Dann ist $det(AB) = det(A)det(B)$.

Beweis. 2 Fälle: A ausgeartet und A ist nicht ausgeartet.

Fall 1 Sei A ausgeartet. $\overset{\text{Hilfssatz}}{\Longrightarrow}$ f_A ist keine Surjektion. Dann ist $f_A \circ f_B$ auch keine Surjektion (weil $v \in \mathbb{K}^n$, das nicht in form $f_A(u)$ darstellbar ist, ist auch nicht in der Form $f_A(f_B(w))$ darstellbar.)

Dann ist AB ausgeartet nach Satz 34

$$\overset{\text{Satz 39}}{\Longrightarrow} \quad det(AB) = 0 = \underbrace{det(A)}_{=0} det(B),$$

$\square$.

Fall 2 Sei A nichtausgeartet. $\overset{\text{Satz 36}}{\Longrightarrow}$ $A = E_1 E_2 ... E_m$.
Dann ist $det(AB) = det(E_1 E_2 ... E_m B) = det(E_1)det(E_2 ... E_m B) =$
$det(E_1)det(E_2)det(E_3 ... E_m B) = \ ...$
$= det(E_1)det(E_2)...det(E_m)\mathrm{det}(B)$.

Ähnlich,
$det(A) = det(A \cdot Id) = det(E_1)det(E_2)...det(E_m) \cdot 1$.

Also, $det(AB) = det(A)det(B)$. $\square$

Satz 41

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24).

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) =$

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$.
Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$.
Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.

I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$.
Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.

I.V. Es gibt eine Determinateabbildung

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$.
Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$. Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$. Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*

Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.

I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$. Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.

I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$.
Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$.
Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Wähle ein $j \in \{1, ..., n\}$.

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$.
Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Wähle ein $j \in \{1, ..., n\}$. Wir setzen

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$. Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Wähle ein $j \in \{1, ..., n\}$. Wir setzen

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}), \qquad \text{Laplace-Spaltenentwicklung}$$

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$. Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Wähle ein $j \in \{1, ..., n\}$. Wir setzen

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}), \qquad \text{Laplace-Spaltenentwicklung}$$

wobei A_{ij}^{Str}

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1,1,\mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$. Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Wähle ein $j \in \{1, ..., n\}$. Wir setzen

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}), \qquad \text{Laplace-Spaltenentwicklung}$$

wobei A_{ij}^{Str} diejenige $(n-1) \times (n-1)$ Matrix bezeichne, welche durch Streichen der i-ten Zeile und die j-ten Spalte

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$. Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Wähle ein $j \in \{1, ..., n\}$. Wir setzen

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}), \qquad \text{Laplace-Spaltenentwicklung}$$

wobei A_{ij}^{Str} diejenige $(n-1) \times (n-1)$ Matrix bezeichne, welche durch Streichen der i-ten Zeile und die j-ten Spalte entsteht.

A

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$.
Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Wähle ein $j \in \{1, ..., n\}$. Wir setzen

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}), \qquad \text{Laplace-Spaltenentwicklung}$$

wobei A_{ij}^{Str} diejenige $(n-1) \times (n-1)$ Matrix bezeichne, welche durch Streichen der i-ten Zeile und die j-ten Spalte entsteht.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ j-1} & a_{1j} & a_{1\ j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \cdots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j} & a_{i-1\ j+1} & \cdots & a_{i-1\ n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i\ j-1} & a_{ij} & a_{i\ j+1} & \cdots & a_{i\ n} \\ a_{i+1\ 1} & \cdots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j} & a_{i+1\ j+1} & \cdots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ j-1} & a_{nj} & a_{n\ j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1, 1, \mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$.
Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Wähle ein $j \in \{1, ..., n\}$. Wir setzen

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}), \qquad \text{Laplace-Spaltenentwicklung}$$

wobei A_{ij}^{Str} diejenige $(n-1) \times (n-1)$ Matrix bezeichne, welche durch Streichen der i-ten Zeile und die j-ten Spalte entsteht.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ j-1} & a_{1j} & a_{1\ j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \cdots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j} & a_{i-1\ j+1} & \cdots & a_{i-1\ n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i\ j-1} & a_{ij} & a_{i\ j+1} & \cdots & a_{i\ n} \\ a_{i+1\ 1} & \cdots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j} & a_{i+1\ j+1} & \cdots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ j-1} & a_{nj} & a_{n\ j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1,1,\mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$. Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Wähle ein $j \in \{1, ..., n\}$. Wir setzen

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}), \qquad \text{Laplace-Spaltenentwicklung}$$

wobei A_{ij}^{Str} diejenige $(n-1) \times (n-1)$ Matrix bezeichne, welche durch Streichen der i-ten Zeile und die j-ten Spalte entsteht.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ j-1} & a_{1j} & a_{1\ j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \cdots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j} & a_{i-1\ j+1} & \cdots & a_{i-1\ n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i\ j-1} & a_{ij} & a_{i\ j+1} & \cdots & a_{i\ n} \\ a_{i+1\ 1} & \cdots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j} & a_{i+1\ j+1} & \cdots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ j-1} & a_{nj} & a_{n\ j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Satz 41 *Es gibt genau eine Determinateabbildung*
Eindeutigkeit ist bewiesen (Lemma 24). Wir zeigen Existenz. Induktion in n.
I.A. $n = 1$. $Mat(1,1,\mathbb{K}) = \{(x), \text{ wobei } x \in \mathbb{K}\}$. Definiere $det((x)) := x$. Die Eigenschaften $(D1), (D2), (D3)$ sind erfüllt.
I.V. Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n-1, n-1, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
I.S. Z.z.: Es gibt eine Determinateabbildung $det : Mat(n, n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Wähle ein $j \in \{1, ..., n\}$. Wir setzen

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}), \qquad \text{Laplace-Spaltenentwicklung}$$

wobei A_{ij}^{Str} diejenige $(n-1) \times (n-1)$ Matrix bezeichne, welche durch Streichen der i-ten Zeile und die j-ten Spalte entsteht.

$$A^{Str}{}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

; ;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$det(A) =$

; ;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str})$

; ;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str})$$

; ;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} \color{blue}{det(A_{12}^{Str})} \color{black}{+ (-1)^{2+2} a_{22}} \color{red}{det(A_{22}^{Str})} \color{black}{=}$$

; ;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} \color{blue}{det(A_{12}^{Str})} \color{black}{+ (-1)^{2+2} a_{22}} \color{red}{det(A_{22}^{Str})} \color{black}{= -}$$

; ;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12}$$

; ;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12}$$

$det(A_{12}^{Str})$; ;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21};$;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21};$;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21};$;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str})$;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str}) = a_{11}$;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \stackrel{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str}) = a_{11}$;

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str}) = a_{11}$;

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} \color{blue}{det(A_{12}^{Str})} \color{black}{+ (-1)^{2+2} a_{22}} \color{red}{det(A_{22}^{Str})} \color{black}{= -a_{12}} \color{blue}{a_{21}} \color{black}{+ a_{22}} \color{red}{a_{11}}$$

$\color{blue}{det(A_{12}^{Str}) = a_{21};}$ $\color{red}{det(A_{22}^{Str}) = a_{11};}$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str}) = a_{11}$;

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Mnemonische Regel:

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \stackrel{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str}) = a_{11}$;

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Mnemonische Regel: det von (2×2) Matrix

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str}) = a_{11}$;

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Mnemonische Regel: *det* von (2×2) Matrix ist Produkt von Diagonalelementen

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str}) = a_{11}$;

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Mnemonische Regel: *det* von (2×2) Matrix ist Produkt von Diagonalelementen

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str}) = a_{11}$;

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Mnemonische Regel: *det* von (2×2) Matrix ist Produkt von Diagonalelementen

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str}) = a_{11}$;

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Mnemonische Regel: *det* von (2×2) Matrix ist Produkt von Diagonalelementen minus Produkt von Antidiagonalelementen.

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str}) = a_{11}$;

$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$

Mnemonische Regel: *det* von (2×2) Matrix ist Produkt von Diagonalelementen minus Produkt von Antidiagonalelementen.

Bsp: Laplace-Spaltenentwicklung für $n = 2$

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$j \overset{\text{z.B.}}{=} 2$

$$det(A) = (-1)^{1+2} a_{12} det(A_{12}^{Str}) + (-1)^{2+2} a_{22} det(A_{22}^{Str}) = -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}$$

$det(A_{12}^{Str}) = a_{21}$; $det(A_{22}^{Str}) = a_{11}$;

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Mnemonische Regel: *det* von (2×2) Matrix ist Produkt von Diagonalelementen minus Produkt von Antidiagonalelementen.

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

- D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

$$det(A) :=$$

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

$$det(A) := (-1)^{k+j}a_{kj}det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}$$

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

$$det(A) := (-1)^{k+j}a_{kj}det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$$

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

$$det(A) := (-1)^{k+j}a_{kj}det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$$

Nach Multiplizieren:

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

$$det(A) := (-1)^{k+j}a_{kj}det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$$

Nach Multiplizieren:

$$det(\tilde{A}) := (-1)^{k+j}$$

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

$$det(A) := (-1)^{k+j}a_{kj}det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$$

Nach Multiplizieren:

$$det(\tilde{A}) := (-1)^{k+j}\underbrace{\tilde{a}_{kj}}_{\lambda a_{kj}}$$

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

$$det(A) := (-1)^{k+j}a_{kj}det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$$

Nach Multiplizieren:

$$det(\tilde{A}) := (-1)^{k+j} \underbrace{\tilde{a}_{kj}}_{\lambda a_{kj}} \underbrace{det(\tilde{A}_{kj}^{Str})}_{det(A_{kj}^{Str})}$$

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

Nach Multiplizieren:

$$det(\tilde{A}) := (-1)^{k+j} \underbrace{\tilde{a}_{kj}}_{\lambda a_{kj}} \underbrace{det(\tilde{A}_{kj}^{Str})}_{det(A_{kj}^{Str})} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j}$$

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

$$det(A) := (-1)^{k+j}a_{kj}det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$$

Nach Multiplizieren:

$$det(\tilde{A}) := (-1)^{k+j}\underbrace{\tilde{a}_{kj}}_{\lambda a_{kj}}\underbrace{det(\tilde{A}_{kj}^{Str})}_{det(A_{kj}^{Str})} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j}\underbrace{\tilde{a}_{ij}}_{a_{ij}}\underbrace{det(\tilde{A}_{ij}^{Str})}_{\lambda det(A^{Str})}$$

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

$$det(A) := (-1)^{k+j}a_{kj}det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$$

Nach Multiplizieren:

$$det(\tilde{A}) := (-1)^{k+j}\underbrace{\tilde{a}_{kj}}_{\lambda a_{kj}}\underbrace{det(\tilde{A}_{kj}^{Str})}_{det(A_{kj}^{Str})} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (-1)^{i+j}\underbrace{\tilde{a}_{ij}}_{a_{ij}}\underbrace{det(\tilde{A}_{ij}^{Str})}_{\lambda det(A^{Str})}$$

$$= \lambda det(A)$$

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

Nach Multiplizieren:

$$det(\tilde{A}) := (-1)^{k+j} \underbrace{\tilde{a}_{kj}}_{\lambda a_{kj}} \underbrace{det(\tilde{A}_{kj}^{Str})}_{det(A_{kj}^{Str})} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (-1)^{i+j} \underbrace{\tilde{a}_{ij}}_{a_{ij}} \underbrace{det(\tilde{A}_{ij}^{Str})}_{\lambda det(A^{Str})}$$

$$= \lambda det(A)$$

Die Additivität zeigt man analog.

Z.z.: $det(A) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$ erfüllt die Eigenschaften $D1 - D3$.

D1 Enstehe $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der $k-$ten Zeile mie λ. Vor Multiplizieren:

$$det(A) := (-1)^{k+j}a_{kj}det(A_{kj}^{Str}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (-1)^{i+j}a_{ij}det(A_{ij}^{Str})$$

Nach Multiplizieren:

$$det(\tilde{A}) := (-1)^{k+j}\underbrace{\tilde{a}_{kj}}_{\lambda a_{kj}}\underbrace{det(\tilde{A}_{kj}^{Str})}_{det(A_{kj}^{Str})} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (-1)^{i+j}\underbrace{\tilde{a}_{ij}}_{a_{ij}}\underbrace{det(\tilde{A}_{ij}^{Str})}_{\lambda det(A^{Str})}$$

$$= \lambda det(A)$$

Die Additivität zeigt man analog.

D2 Angenommen,

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein ($k < m$);

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein $(k < m)$; Z.z: $det(A) = 0$

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein ($k < m$); Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) :=$$

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein ($k < m$); Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A^{Str}_{kj}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A^{Str}_{mj}) +$$

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein ($k < m$); Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \overset{(D2)}{=}$$

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein $(k < m)$; Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \overset{(D2)}{=}$$

$$(-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) + 0 \qquad (*)$$

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein ($k < m$); Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \overset{(D2)}{=}$$

$$(-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) + 0 \qquad (*)$$

Da die k-te und die m-te Zeilen gleich sind,

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein ($k < m$); Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \overset{(D2)}{=}$$

$$(-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) + 0 \qquad (*)$$

Da die k-te und die m-te Zeilen gleich sind, ist $a_{kj} = a_{mj}$. Da A_{kj}^{Str} aus A_{mj}^{Str} durch $m - k - 1$

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein $(k < m)$; Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \overset{(D2)}{=}$$

$$(-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) + 0 \qquad (*)$$

Da die k-te und die m-te Zeilen gleich sind, ist $a_{kj} = a_{mj}$. Da A_{kj}^{Str} aus A_{mj}^{Str} durch $m - k - 1$ Zeilenvertauschungen hervorgeht.

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein ($k < m$); Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \overset{(D2)}{=}$$

$$(-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) + 0 \qquad (*)$$

Da die k-te und die m-te Zeilen gleich sind, ist $a_{kj} = a_{mj}$. Da A_{kj}^{Str} aus A_{mj}^{Str} durch $m - k - 1$ Zeilenvertauschungen hervorgeht. Also $det(A_{kj}^{Str}) =$

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein ($k < m$); Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \overset{(D2)}{=}$$

$$(-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) + 0 \qquad (*)$$

Da die k-te und die m-te Zeilen gleich sind, ist $a_{kj} = a_{mj}$. Da A_{kj}^{Str} aus A_{mj}^{Str} durch $m - k - 1$ Zeilenvertauschungen hervorgeht. Also $det(A_{kj}^{Str}) = (-1)^{m+k+1} det(A_{mj}^{Str})$.

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein ($k < m$); Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \overset{(D2)}{=}$$

$$(-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) + 0 \qquad (*)$$

Da die k-te und die m-te Zeilen gleich sind, ist $a_{kj} = a_{mj}$. Da A_{kj}^{Str} aus A_{mj}^{Str} durch $m - k - 1$ Zeilenvertauschungen hervorgeht. Also $det(A_{kj}^{Str}) = (-1)^{m+k+1} det(A_{mj}^{Str})$. Dann ist $(*)$ gleich

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein ($k < m$); Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \overset{(D2)}{=}$$

$$(-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) + 0 \qquad (*)$$

Da die k-te und die m-te Zeilen gleich sind, ist $a_{kj} = a_{mj}$. Da A_{kj}^{Str} aus A_{mj}^{Str} durch $m - k - 1$ Zeilenvertauschungen hervorgeht. Also $det(A_{kj}^{Str}) = (-1)^{m+k+1} det(A_{mj}^{Str})$. Dann ist ($*$) gleich
$((-1)^{k+j+m-k-1} + (-1)^{m+j}) det(A_{mj}^{Str}) =$

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein ($k < m$); Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \stackrel{(D2)}{=}$$

$$(-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) + 0 \qquad (*)$$

Da die k-te und die m-te Zeilen gleich sind, ist $a_{kj} = a_{mj}$. Da A_{kj}^{Str} aus A_{mj}^{Str} durch $m - k - 1$ Zeilenvertauschungen hervorgeht. Also $det(A_{kj}^{Str}) = (-1)^{m+k+1} det(A_{mj}^{Str})$. Dann ist $(*)$ gleich
$((-1)^{k+j+m-k-1} + (-1)^{m+j}) det(A_{mj}^{Str}) =$
$((-1)^{j+m+1} + (-1)^{m+j}) det(A_{mj}^{Str}) = 0$

D2 Angenommen, stimmen die k-te und die m-te Zeilen von A überein ($k < m$); Z.z: $det(A) = 0$

$$det(A) := (-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq m}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \overset{(D2)}{=}$$

$$(-1)^{k+j} a_{kj} det(A_{kj}^{Str}) + (-1)^{m+j} a_{mj} det(A_{mj}^{Str}) + 0 \qquad (*)$$

Da die k-te und die m-te Zeilen gleich sind, ist $a_{kj} = a_{mj}$. Da A_{kj}^{Str} aus A_{mj}^{Str} durch $m - k - 1$ Zeilenvertauschungen hervorgeht. Also $det(A_{kj}^{Str}) = (-1)^{m+k+1} det(A_{mj}^{Str})$. Dann ist $(*)$ gleich
$((-1)^{k+j+m-k-1} + (-1)^{m+j}) det(A_{mj}^{Str}) =$
$((-1)^{j+m+1} + (-1)^{m+j}) det(A_{mj}^{Str}) = 0$

D3 Für $A = Id$

D3 Für $A = Id$ ist

$$det(Id) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

D3 Für $A = Id$ ist

$$det(Id) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$

D3 Für $A = Id$ ist

$$det(Id) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$

Also $det(Id) = (-1)^{i+i} det(Id) = 1$.

D3 Für $A = Id$ ist

$$det(Id) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$

Also $det(Id) = (-1)^{i+i} det(Id) = 1.$ $\square$

Folgerung (Spaltenentwicklungssatz von Laplace)

D3 Für $A = Id$ ist

$$det(Id) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$

Also $det(Id) = (-1)^{i+i} det(Id) = 1$. $\square$

Folgerung (Spaltenentwicklungssatz von Laplace) *Für jedes $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ gilt*

$$(D7) \qquad det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \qquad (*),$$

Beweis:

D3 Für $A = Id$ ist

$$det(Id) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$

Also $det(Id) = (-1)^{i+i} det(Id) = 1.$ $\square$

Folgerung (Spaltenentwicklungssatz von Laplace) *Für jedes $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ gilt*

$$(D7) \qquad det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \qquad (*),$$

Beweis: Es gibt nur eine Determinateabbildung

D3 Für $A = Id$ ist

$$det(Id) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$

Also $det(Id) = (-1)^{i+i} det(Id) = 1$. $\square$

Folgerung (Spaltenentwicklungssatz von Laplace) *Für jedes $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ gilt*

$$(D7) \qquad det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \qquad (*),$$

Beweis: Es gibt nur eine Determinateabbildung (Lemma 24),

D3 Für $A = Id$ ist

$$det(Id) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$

Also $det(Id) = (-1)^{i+i} det(Id) = 1$. $\square$

Folgerung (Spaltenentwicklungssatz von Laplace) *Für jedes $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ gilt*

$$(D7) \quad det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \qquad (*),$$

Beweis: Es gibt nur eine Determinateabbildung (Lemma 24), und sie haben wir mit Hilfe von $(*)$ konstruiert.

D3 Für $A = Id$ ist

$$det(Id) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str})$$

mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$

Also $det(Id) = (-1)^{i+i} det(Id) = 1$. $\square$

Folgerung (Spaltenentwicklungssatz von Laplace) *Für jedes $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ gilt*

$$(D7) \quad det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) \qquad (*),$$

Beweis: Es gibt nur eine Determinateabbildung (Lemma 24), und sie haben wir mit Hilfe von $(*)$ konstruiert. $\square$

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

,

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad ,$$

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=}$$

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$

$$,$$

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) +$

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$
$$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) +$$

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$

$$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$$

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^{2} a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32})$

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$
$$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$$
$$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})$$

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$
$$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$$
$$(-1)^2 a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + (-1)^3 a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}) +$$
$$(-1)^{3+1} a_{31} (a_{12} a_{22} - a_{22} a_{13})$$

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$
$$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$$
$$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$$
$$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel:

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix*

,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten* ,

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$
$$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$$
$$(-1)^{2} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^{3} a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$$
$$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen,*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$
$$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$$
$$(-1)^{2} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^{3} a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$$
$$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen,*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen,*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$
$$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$$
$$(-1)^{2} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^{3} a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$$
$$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$
$$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$$
$$(-1)^{2} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^{3} a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$$
$$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^{2} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^{3} a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen minus die Summe von Produkten der Elemente aus Antidiagonalen,*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$
$$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$$
$$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$$
$$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen minus die Summe von Produkten der Elemente aus Antidiagonalen,*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen minus die Summe von Produkten der Elemente aus Antidiagonalen,*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen minus die Summe von Produkten der Elemente aus Antidiagonalen, der Elemente aus den Nebenantidiagonalen*

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen minus die Summe von Produkten der Elemente aus Antidiagonalen, der Elemente aus den Nebenantidiagonalen*

Regel von Sarrus (Rechenverfahren)

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$$
$$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$$
$$(-1)^{2} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^{3} a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$$
$$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$$
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Mnemonische Regel: *det einer (3×3) Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen minus die Summe von Produkten der Elemente aus Antidiagonalen, der Elemente aus den Nebenantidiagonalen*

Regel von Sarrus (Rechenverfahren)

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \diagdown & & \times & & \times & & \diagup & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \diagup & & \times & & \times & & \diagdown & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen minus die Summe von Produkten der Elemente aus Antidiagonalen, der Elemente aus den Nebenantidiagonalen*

Regel von Sarrus (Rechenverfahren)

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \diagdown & & \times & & \times & & \diagup & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \diagup & & \times & & \times & & \diagdown & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

Anwendung: Determinante einer (3×3) Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \qquad j \overset{\text{z.B.}}{=} 1$$

$det(A) \overset{\text{Folgerung}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}) =$
$(-1)^{1+1} a_{11} det(A_{11}^{Str}) + (-1)^{2+1} a_{21} det(A_{21}^{Str}) + (-1)^{3+1} a_{31} det(A_{31}^{Str}) =$
$(-1)^2 a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^3 a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) +$
$(-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}) =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Mnemonische Regel: *det einer* (3×3) *Matrix ist die Summe vom Produkten der Elemente aus der Hauptdiagonalen, der Elemente aus den Nebendiagonalen minus die Summe von Produkten der Elemente aus Antidiagonalen, der Elemente aus den Nebenantidiagonalen*

Regel von Sarrus (Rechenverfahren)

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \diagdown & & \times & & \times & & \diagup & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \diagup & & \times & & \times & & \diagdown & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

Weitere Anwendungen der Laplace-Spaltenentwicklung

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Spalteentw. j=1}}{=} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}det(A_{i1}^{Str})$$

nur $\underset{=}{a_{11}} \neq 0$

Weitere Anwendungen der Laplace-Spaltenentwicklung

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Spalteentw. j=1}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} det(A_{i1}^{Str})$$

$$\overset{\text{nur } a_{11} \neq 0}{=} a_{11} \; det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Weitere Anwendungen der Laplace-Spaltenentwicklung

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Spalteentw. j=1}}{=} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}det(A_{i1}^{Str})$$

$$\overset{\text{nur } a_{11}\neq 0}{=} a_{11}\ det\begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Weitere Anwendungen der Laplace-Spaltenentwicklung

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Spalteentw. j=1}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} det(A_{i1}^{Str})$$

$$\overset{\text{nur } a_{11} \neq 0}{=} a_{11}\ det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir zeigen Determinante einer Oberdiagonalmatrix ist das Produkt von Diagonalelementen.

Weitere Anwendungen der Laplace-Spaltenentwicklung

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Spalteentw. j=1}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} det(A_{i1}^{Str})$$

$$\overset{\text{nur } a_{11} \neq 0}{=} a_{11} \; det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir zeigen Determinante einer Oberdiagonalmatrix ist das Produkt von Diagonalelementen.

$$det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \text{irgendwas} \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

Weitere Anwendungen der Laplace-Spaltenentwicklung

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Spalteentw. j=1}}{=} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}det(A_{i1}^{Str})$$

$$\overset{\text{nur } a_{11}\neq 0}{=} a_{11}\ det\begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir zeigen Determinante einer Oberdiagonalmatrix ist das Produkt von Diagonalelementen.

$$det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \text{irgendwas} \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1\ det\begin{pmatrix} \lambda_2 & & & \text{irgendwas} \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Weitere Anwendungen der Laplace-Spaltenentwicklung

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Spalteentw. j=1}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} det(A_{i1}^{Str})$$

$$\overset{\text{nur } a_{11} \neq 0}{=} a_{11} \; det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir zeigen Determinante einer Oberdiagonalmatrix ist das Produkt von Diagonalelementen.

$$det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \text{irgendwas} \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \; det \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & \text{irgendwas} \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 det \begin{pmatrix} \lambda_3 & & \text{irgendwas} \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Weitere Anwendungen der Laplace-Spaltenentwicklung

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Spalteentw. j=1}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} det(A_{i1}^{Str})$$

$$\overset{\text{nur } a_{11} \neq 0}{=} a_{11} \; det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir zeigen Determinante einer Oberdiagonalmatrix ist das Produkt von Diagonalelementen.

$$det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \text{irgendwas} \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \; det \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & \text{irgendwas} \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 det \begin{pmatrix} \lambda_3 & & \text{irgendwas} \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \dots =$$

Weitere Anwendungen der Laplace-Spaltenentwicklung

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Spalteentw. j=1}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} det(A_{i1}^{Str})$$

$$\overset{\text{nur } a_{11} \neq 0}{=} a_{11} \; det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir zeigen Determinante einer Oberdiagonalmatrix ist das Produkt von Diagonalelementen.

$$det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \text{irgendwas} \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \; det \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & \text{irgendwas} \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 det \begin{pmatrix} \lambda_3 & & \text{irgendwas} \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \ldots = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

Weitere Anwendungen der Laplace-Spaltenentwicklung

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Spalteentw. j=1}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} det(A_{i1}^{Str})$$

$$\overset{\text{nur } a_{11} \neq 0}{=} a_{11} \; det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir zeigen Determinante einer Oberdiagonalmatrix ist das Produkt von Diagonalelementen.

$$det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \text{irgendwas} \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \; det \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & \text{irgendwas} \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 det \begin{pmatrix} \lambda_3 & & \text{irgendwas} \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \dots = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

Also, Determinate von der Matrix s.d. alle Elemente unter Diagonale $= 0$ sind ist das Produkt von Diagonalelementen.

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} + b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} + b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Beweis: Wie benutzen die Laplace-Spaltenentwicklung

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Beweis: Wie benutzen die Laplace-Spaltenentwicklung

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

Nach Multipliziren der $j-$ten Spalte mit λ

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Beweis: Wie benutzen die Laplace-Spaltenentwicklung

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

Nach Multipliziren der $j-$ten Spalte mit λ wird jedes a_{ij}

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Beweis: Wie benutzen die Laplace-Spaltenentwicklung

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

Nach Multipliziren der $j-$ten Spalte mit λ wird jedes a_{ij} mit λ multipliziert.

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Beweis: Wie benutzen die Laplace-Spaltenentwicklung

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

Nach Multipliziren der $j-$ten Spalte mit λ wird jedes a_{ij} mit λ multipliziert. $det(A_{ij}^{Str})$

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Beweis: Wie benutzen die Laplace-Spaltenentwicklung

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

Nach Multipliziren der $j-$ten Spalte mit λ wird jedes a_{ij} mit λ multipliziert. $det(A_{ij}^{Str})$ bleibt unverändert.

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Beweis: Wie benutzen die Laplace-Spaltenentwicklung

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

Nach Multipliziren der $j-$ten Spalte mit λ wird jedes a_{ij} mit λ multipliziert. $det(A_{ij}^{Str})$ bleibt unverändert. Dann wird die Determinante

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Beweis: Wie benutzen die Laplace-Spaltenentwicklung

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

Nach Multipliziren der $j-$ten Spalte mit λ wird jedes a_{ij} mit λ multipliziert. $det(A_{ij}^{Str})$ bleibt unverändert. Dann wird die Determinante mit λ multipliziert.

Satz 42 *(D1)' Determinateabbildung ist linear in Spalten:*

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Beweis: Wie benutzen die Laplace-Spaltenentwicklung

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}^{Str}),$$

Nach Multipliziren der $j-$ten Spalte mit λ wird jedes a_{ij} mit λ multipliziert. $det(A_{ij}^{Str})$ bleibt unverändert. Dann wird die Determinante mit λ multipliziert. Ähnlich mit der Addition. $\square$