Wiederholung:

,

,

ab.

Wiederholung:

Satz 32

,

,

ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix,*

,

ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von* $\mathbb{K}^n$ *nach* $\mathbb{K}^m$ *ist die Multiplikation mit der Matrix, deren* i*-te Spalte das Bild von* e_i *ist.*

Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene ,

ab.

Wiederholung:

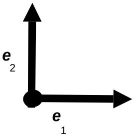
Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*

Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, ,

ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*

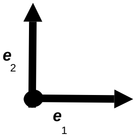


Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis ,

ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*

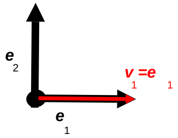


Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2),

ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*

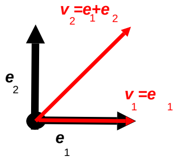


Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\stackrel{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$,

ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*

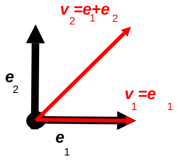


Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$

ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*

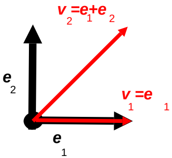


Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*



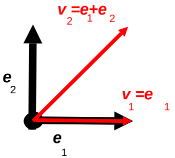
Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

Die Matrix der Abbildung

ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*



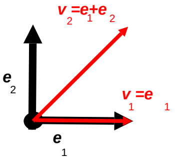
Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

Die Matrix der Abbildung ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*



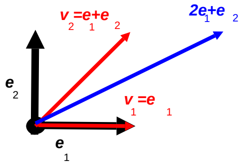
Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

Die Matrix der Abbildung ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*



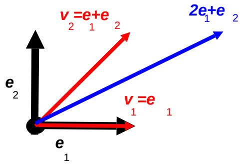
Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

Die Matrix der Abbildung ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Abbildung bildet $2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*



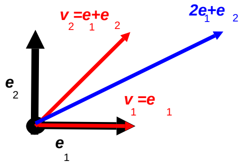
Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

Die Matrix der Abbildung ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Abbildung bildet $2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*



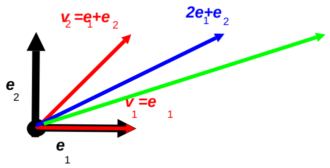
Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

Die Matrix der Abbildung ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Abbildung bildet $2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*



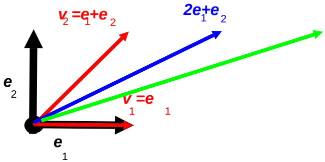
Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

Die Matrix der Abbildung ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Abbildung bildet $2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab.

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*



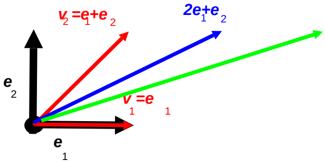
Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

Die Matrix der Abbildung ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Abbildung bildet $2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab.

Wied. Def. 30 — Satz 33

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*



Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

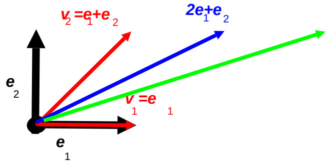
Die Matrix der Abbildung ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Abbildung bildet $2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab.

Wied. Def. 30 — Satz 33 *Matrix der Verkettung von linearen Abbildungen f_A,*

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*



Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

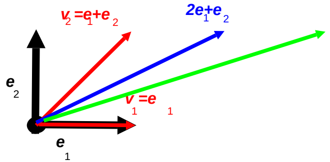
Die Matrix der Abbildung ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Abbildung bildet $2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab.

Wied. Def. 30 — Satz 33 *Matrix der Verkettung von linearen Abbildungen f_A,* $\quad x \mapsto Ax$

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*



Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

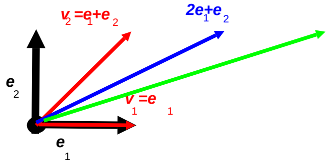
Die Matrix der Abbildung ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Abbildung bildet $2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab.

Wied. Def. 30 — Satz 33 *Matrix der Verkettung von linearen Abbildungen f_A, $x \mapsto Ax$ und f_B, $y \mapsto By$*

Wiederholung:

Satz 32 *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.*



Bsp: Betrachte Vektoren auf der Ebene $\overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{R}^2$, eine Basis (e_1, e_2), Vektoren $v_1 := e_1$, $v_2 := e_1 + e_2$ und eine lin. Abbildung, die $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$

Die Matrix der Abbildung ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Abbildung bildet $2e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab.

Wied. Def. 30 — Satz 33 *Matrix der Verkettung von linearen Abbildungen f_A, $x \mapsto Ax$ und f_B, $y \mapsto By$ ist AB.*

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt*

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse*

Matrix zu $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*,*

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse*

Matrix zu $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *falls* $BA = Id :=$

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp.

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n,n,\mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n,n,\mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \Bigg($$

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n,n,\mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n,n,\mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \Big(1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2)$$

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ \end{pmatrix}$$

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine* *inverse* *Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & \end{pmatrix}$$

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine* *inverse* *Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wied – Satz 34

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wied – Satz 34

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wied – Satz 34 *Die folgende Aussagen über* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *sind äquivalent:*

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n,n,\mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n,n,\mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wied – Satz 34 *Die folgende Aussagen über* $A \in Mat(n,n,\mathbb{K})$ *sind äquivalent:*

(a) *A hat eine inverse Matrix.*

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wied – Satz 34 *Die folgende Aussagen über* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *sind äquivalent:*

(a) *A hat eine inverse Matrix.*

(b) *Die Multiplikation mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.*

Wied. Def. 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* $B \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *heißt eine inverse Matrix zu* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, *falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wied – Satz 34 *Die folgende Aussagen über* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$ *sind äquivalent:*

(a) *A hat eine inverse Matrix.*

(b) *Die Multiplikation mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.*

(c) *Die Spalten von A sind linear unabhängig*

Wied. Def. 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix $B \in Mat(n,n,\mathbb{K})$ heißt eine inverse Matrix zu $A \in Mat(n,n,\mathbb{K})$, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wied – Satz 34 *Die folgende Aussagen über $A \in Mat(n,n,\mathbb{K})$ sind äquivalent:*

(a) *A hat eine inverse Matrix.*

(b) *Die Multiplikation mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.*

(c) *Die Spalten von A sind linear unabhängig (und bilden deswegen eine Basis in $\mathbb{K}^n$).*

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \ \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}.$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \ \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \ \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)
Satz 35

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \ \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1:

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \; \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \; \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$.

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) :=$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)
Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)
Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \ \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \ \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \ \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \ \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \ \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \}$

Gruppe $GL(n,\mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n,\mathbb{K}) := \{A \in Mat(n,n,\mathbb{K}) \mid \ \exists\ B \in Mat(n,n,\mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n,\mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n,\mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}}\ \}$$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)
Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \ \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \}$$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}}\}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$):

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \left\{ \right.$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \Bigg\{$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}}\} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \left\{ \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \right.$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}}\} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \left\{ \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \right.$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \ \exists \ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \left\{ \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \right.$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}}\ \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n} \text{ eine}$$

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \left\{ \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \right.$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}}\} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}}\} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren):

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren): $\Longleftarrow$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass $GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren): $\Longleftarrow$ Lemma 22: Inverse Abbildung zum Isomorphismus ist Isomorphismus.

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n} \text{ eine}$$

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren): $\Longleftarrow$ Lemma 22: Inverse Abbildung zum Isomorphismus ist Isomorphismus.

Also ist $(GL(\mathbb{K}^n), \circ)$ eine Untergruppe,

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren): $\Longleftarrow$ Lemma 22: Inverse Abbildung zum Isomorphismus ist Isomorphismus.

Also ist $(GL(\mathbb{K}^n), \circ)$ eine Untergruppe, und deswegen (Satz 5) eine Gruppe.

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren): $\Longleftarrow$ Lemma 22: Inverse Abbildung zum Isomorphismus ist Isomorphismus.

Also ist $(GL(\mathbb{K}^n), \circ)$ eine Untergruppe, und deswegen (Satz 5) eine Gruppe.

Da die Abbildung $\aleph : GL(n, \mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K}^n)$,

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}}\} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren): $\Longleftarrow$ Lemma 22: Inverse Abbildung zum Isomorphismus ist Isomorphismus.

Also ist $(GL(\mathbb{K}^n), \circ)$ eine Untergruppe, und deswegen (Satz 5) eine Gruppe.
Da die Abbildung $\aleph : GL(n, \mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K}^n),\ \ A \mapsto f_A$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}}\} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren): $\Longleftarrow$ Lemma 22: Inverse Abbildung zum Isomorphismus ist Isomorphismus.

Also ist $(GL(\mathbb{K}^n), \circ)$ eine Untergruppe, und deswegen (Satz 5) eine Gruppe.

Da die Abbildung $\aleph : GL(n, \mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K}^n),\ \ A \mapsto f_A$ (wohldefiniert nach Satz 34)

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass

$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}}\} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren): $\Longleftarrow$ Lemma 22: Inverse Abbildung zum Isomorphismus ist Isomorphismus.

Also ist $(GL(\mathbb{K}^n), \circ)$ eine Untergruppe, und deswegen (Satz 5) eine Gruppe.

Da die Abbildung $\aleph : GL(n, \mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K}^n)$, $A \mapsto f_A$ (wohldefiniert nach Satz 34) die Multiplikation erhält

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \ \exists\ B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}}\} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren): $\Longleftarrow$ Lemma 22: Inverse Abbildung zum Isomorphismus ist Isomorphismus.

Also ist $(GL(\mathbb{K}^n), \circ)$ eine Untergruppe, und deswegen (Satz 5) eine Gruppe.
Da die Abbildung $\aleph : GL(n, \mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K}^n)$, $A \mapsto f_A$ (wohldefiniert nach Satz 34) die Multiplikation erhält ($f_A \circ f_B \overset{\text{Def. 30}}{=} f_{A \cdot B}$)

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ \phi \text{ ist bijektiv } \}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren): $\Longleftarrow$ Lemma 22: Inverse Abbildung zum Isomorphismus ist Isomorphismus.

Also ist $(GL(\mathbb{K}^n), \circ)$ eine Untergruppe, und deswegen (Satz 5) eine Gruppe.
Da die Abbildung $\aleph : GL(n, \mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K}^n)$, $A \mapsto f_A$ (wohldefiniert nach Satz 34) die Multiplikation erhält ($f_A \circ f_B \overset{\text{Def. 30}}{=} f_{A \cdot B}$) und bijektiv nach Satz 32 ist,

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}}\} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren): $\Longleftarrow$ Lemma 22: Inverse Abbildung zum Isomorphismus ist Isomorphismus.

Also ist $(GL(\mathbb{K}^n), \circ)$ eine Untergruppe, und deswegen (Satz 5) eine Gruppe.
Da die Abbildung $\aleph : GL(n, \mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K}^n)$, $A \mapsto f_A$ (wohldefiniert nach Satz 34) die Multiplikation erhält ($f_A \circ f_B \overset{\text{Def. 30}}{=} f_{A \cdot B}$) und bijektiv nach Satz 32 ist, erfüllt die Matrix-Multiplikation alle Eigenschaften, die $\circ$ erfüllt, also ist $(GL(n, \mathbb{K}), \ \cdot)$

Gruppe $GL(n, \mathbb{K})$

Def. 34 Die allgemeine lineare Gruppe ist die Menge
$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \mid \exists\, B \in Mat(n, n, \mathbb{K}) \text{ s.d. } BA = Id\}$.
(Die Elemente von $GL(n, \mathbb{K})$ heißen invertierbare oder nichtausgeartete Matrizen.)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Beweis 1: Die Menge $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n} := \{\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \phi \text{ ist bijektiv }\}$ ist nach Satz 3 eine Gruppe bzgl. $\circ$. Wir zeigen, dass
$GL(\mathbb{K}^n) := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ f \text{ ist } \underbrace{\text{bijektiv und linear}}_{\text{Isomorphismus}} \} \subseteq S_{\mathbb{K}^n}$ eine

Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{K}^n}$ ist.

(Abgeschl. bzgl. $\circ$): $\Longleftarrow \begin{cases} \text{Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear} \\ \text{Hausaufgabe 3c, Blatt 2: Verkettung von Bijektionen ist bijektiv} \end{cases}$

(Abgeschl. bzgl. Invertieren): $\Longleftarrow$ Lemma 22: Inverse Abbildung zum Isomorphismus ist Isomorphismus.

Also ist $(GL(\mathbb{K}^n), \circ)$ eine Untergruppe, und deswegen (Satz 5) eine Gruppe.
Da die Abbildung $\aleph : GL(n, \mathbb{K}) \to GL(\mathbb{K}^n)$, $A \mapsto f_A$ (wohldefiniert nach Satz 34) die Multiplikation erhält ($f_A \circ f_B \overset{\text{Def. 30}}{=} f_{A \cdot B}$) und bijektiv nach Satz 32 ist, erfüllt die Matrix-Multiplikation alle Eigenschaften, die $\circ$ erfüllt, also ist $(GL(n, \mathbb{K}),\ \cdot)$ eine Gruppe.

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C$

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id :=$

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert)

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.:

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$,

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$.

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat,

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden:

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

Satz 35 $GL(n,\mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n,\mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n,\mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n,\mathbb{K})$.

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n, \mathbb{K})$ liegt.

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n, \mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n, \mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$ABA =$

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n, \mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) \\ \end{cases}$$

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n, \mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) = A \cdot Id \\ \end{cases}$$

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n, \mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) = A \cdot Id = A \\ (AB)A \end{cases}.$$

Satz 35 $GL(n,\mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n,\mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n,\mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n,\mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n,\mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) = A \cdot Id = A \\ (AB)A \end{cases}.$$

Also, $(AB)A = A$.

Satz 35 $GL(n,\mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n,\mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n,\mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n,\mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n,\mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) = A \cdot Id = A \\ \qquad (AB)A \end{cases}.$$

Also, $(AB)A = A$. Die $i-te$ Spalte von $(AB)A$

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n, \mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) = A \cdot Id = A \\ \qquad (AB)A \end{cases}.$$

Also, $(AB)A = A$. Die $i-te$ Spalte von $(AB)A$ ist Matrix (AB) multipliziert mit der $i-$ten Spalte von A.

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n, \mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) = A \cdot Id = A \\ (AB)A \end{cases}.$$

Also, $(AB)A = A$. Die $i-te$ Spalte von $(AB)A$ ist Matrix (AB) multipliziert mit der $i-$ten Spalte von A. Also, für jede Spalte v von A gilt $(AB)v = v$.

Satz 35 $GL(n,\mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n,\mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n,\mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n,\mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n,\mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) = A \cdot Id = A \\ (AB)A \end{cases}.$$

Also, $(AB)A = A$. Die $i-te$ Spalte von $(AB)A$ ist Matrix (AB) multipliziert mit der $i-$ten Spalte von A. Also, für jede Spalte v von A gilt $(AB)v = v$. Da A invertierbar ist,

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n, \mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) = A \cdot Id = A \\ (AB)A \end{cases}.$$

Also, $(AB)A = A$. Die $i-te$ Spalte von $(AB)A$ ist Matrix (AB) multipliziert mit der $i-$ten Spalte von A. Also, für jede Spalte v von A gilt $(AB)v = v$. Da A invertierbar ist, sind nach Satz 34 die Spalten linear unabhängig,

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n, \mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) = A \cdot Id = A \\ (AB)A \end{cases}.$$

Also, $(AB)A = A$. Die $i-te$ Spalte von $(AB)A$ ist Matrix (AB) multipliziert mit der $i-$ten Spalte von A. Also, für jede Spalte v von A gilt $(AB)v = v$. Da A invertierbar ist, sind nach Satz 34 die Spalten linear unabhängig, und bilden deswegen eine Basis.

Satz 35 $GL(n,\mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n,\mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n,\mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n,\mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n,\mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) = A \cdot Id = A \\ (AB)A \end{cases}.$$

Also, $(AB)A = A$. Die $i-te$ Spalte von $(AB)A$ ist Matrix (AB) multipliziert mit der $i-$ten Spalte von A. Also, für jede Spalte v von A gilt $(AB)v = v$. Da A invertierbar ist, sind nach Satz 34 die Spalten linear unabhängig, und bilden deswegen eine Basis. Dann ist $f_{(AB)} = Id$ nach Satz 30,

Satz 35 $GL(n, \mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n, \mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n, \mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) = A \cdot Id = A \\ (AB)A \end{cases}.$$

Also, $(AB)A = A$. Die $i-te$ Spalte von $(AB)A$ ist Matrix (AB) multipliziert mit der $i-$ten Spalte von A. Also, für jede Spalte v von A gilt $(AB)v = v$. Da A invertierbar ist, sind nach Satz 34 die Spalten linear unabhängig, und bilden deswegen eine Basis. Dann ist $f_{(AB)} = Id$ nach Satz 30, und deswegen $AB = Id$.

Satz 35 $GL(n,\mathbb{K})$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Matrizen.
Beweis 2:

(G1) $A(BC) = (AB)C \Longleftarrow$ Folgerung aus Def. 30/ Satz 33.

(G2) $Id := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element.

(Wohl-definiert) Z.z.: Sind $A, B \in GL(n,\mathbb{K})$, so ist $AB \in GL(n,\mathbb{K})$. In der Tat, man kann die Inverse zu AB finden: $B^{-1}A^{-1}AB = Id$.

(G3) Sei $A \in GL(n,\mathbb{K})$. Z.z. B s.d. $BA = Id$ auch in $GL(n,\mathbb{K})$ liegt. Es genügend: $AB = Id$.

$$ABA = \begin{cases} A(BA) = A \cdot Id = A \\ (AB)A \end{cases}.$$

Also, $(AB)A = A$. Die $i-te$ Spalte von $(AB)A$ ist Matrix (AB) multipliziert mit der $i-$ten Spalte von A. Also, für jede Spalte v von A gilt $(AB)v = v$. Da A invertierbar ist, sind nach Satz 34 die Spalten linear unabhängig, und bilden deswegen eine Basis. Dann ist $f_{(AB)} = Id$ nach Satz 30, und deswegen $AB = Id$. $\square$

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$.

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n.

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 34).

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 34). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen,

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 34). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen, sei also

$e_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i$.   (*)

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 34). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen, sei also

$e_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} u_i. \quad (*)$

(Für jedes j ist (*) ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen auf n unbekannten; also ingesamt müssen wir ein lineares Gleichungssystem aus n^2 Gleichugen auf n^2 unbekannten lösen.)

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 34). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen, sei also

$e_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} u_i$.   (*)

(Für jedes j ist (*) ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen auf n unbekannten; also ingesamt müssen wir ein lineares Gleichungssystem aus n^2 Gleichugen auf n^2 unbekannten lösen.)

Dann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 34). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen, sei also

$e_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} u_i$.   (*)

(Für jedes j ist (*) ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen auf n unbekannten; also ingesamt müssen wir ein lineares Gleichungssystem aus n^2 Gleichugen auf n^2 unbekannten lösen.)

Dann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

die inverse Matrix zu A.

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 34). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen, sei also

$e_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} u_i.$ (*)

(Für jedes j ist (*) ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen auf n unbekannten; also ingesamt müssen wir ein lineares Gleichungssystem aus n^2 Gleichugen auf n^2 unbekannten lösen.)

Dann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

die inverse Matrix zu A. Tatsächlich nach Konstruktion bildet die Multiplikation mit der Matrix

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 34). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen, sei also

$e_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i. \quad (*)$

(Für jedes j ist (*) ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen auf n unbekannten; also ingesamt müssen wir ein lineares Gleichungssystem aus n^2 Gleichugen auf n^2 unbekannten lösen.)

Dann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

die inverse Matrix zu A. Tatsächlich nach Konstruktion bildet die Multiplikation mit der Matrix den Vektor u_j nach e_j ab.

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 34). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen, sei also

$e_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} u_i.$ (*)

(Für jedes j ist (*) ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen auf n unbekannten; also ingesamt müssen wir ein lineares Gleichungssystem aus n^2 Gleichugen auf n^2 unbekannten lösen.)

Dann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

die inverse Matrix zu A. Tatsächlich nach Konstruktion bildet die Multiplikation mit der Matrix den Vektor u_j nach e_j ab. Dann bildet BA jedes $e_j \overset{A}{\longmapsto} u_j \overset{B}{\longmapsto} e_j$ ab,

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 34). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen, sei also

$e_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i$. (*)

(Für jedes j ist (*) ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen auf n unbekannten; also ingesamt müssen wir ein lineares Gleichungssystem aus n^2 Gleichugen auf n^2 unbekannten lösen.)

Dann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

die inverse Matrix zu A. Tatsächlich nach Konstruktion bildet die Multiplikation mit der Matrix den Vektor u_j nach e_j ab. Dann bildet BA jedes $e_j \xmapsto{A} u_j \xmapsto{B} e_j$ ab, also $f_{BA} = Id$

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 34). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen, sei also

$e_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} u_i$.   (*)

(Für jedes j ist (*) ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen auf n unbekannten; also ingesamt müssen wir ein lineares Gleichungssystem aus n^2 Gleichugen auf n^2 unbekannten lösen.)

Dann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

die inverse Matrix zu A. Tatsächlich nach Konstruktion bildet die Multiplikation mit der Matrix den Vektor u_j nach e_j ab. Dann bildet BA jedes $e_j \stackrel{A}{\longmapsto} u_j \stackrel{B}{\longmapsto} e_j$ ab, also $f_{BA} = Id$ folglich $BA = Id$.

Direkte Konstruktion einer Inversen Matrix:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$. Die Spalten von A seien Vektoren u_1,..., u_n. Ist $(u_1, ..., u_n)$ keine Basis, so ist die Matrix nicht invertierbar (Satz 34). Ist sie eine Basis, kann man die Vektoren e_j als Linearkombination der Vektoren u_i darstellen, sei also

$e_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i. \quad (*)$

(Für jedes j ist (*) ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen auf n unbekannten; also ingesamt müssen wir ein lineares Gleichungssystem aus n^2 Gleichugen auf n^2 unbekannten lösen.)

Dann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

die inverse Matrix zu A. Tatsächlich nach Konstruktion bildet die Multiplikation mit der Matrix den Vektor u_j nach e_j ab. Dann bildet BA jedes $e_j \overset{A}{\longmapsto} u_j \overset{B}{\longmapsto} e_j$ ab, also $f_{BA} = Id$ folglich $BA = Id$.

Wir werden zwei bessere Algoritmen bekommen (einen Heute noch, zweiten später), um die Inverse Matrizen zu berechnen.

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\left\{ \begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right.$$

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

kann man in Matrixform schreiben:

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

kann man in Matrixform schreiben:

$Ax = b,$

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

kann man in Matrixform schreiben:

$$Ax = b, \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K}),$$

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right.$$

kann man in Matrixform schreiben:

$Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

und

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

kann man in Matrixform schreiben:

$$Ax = b, \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K}), \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

$$\text{und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

kann man in Matrixform schreiben:

$$Ax = b, \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K}), \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

Die Matrix A heißt dei Koeffizientenmatrix von System.

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\left\{ \begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right.$$

kann man in Matrixform schreiben:

$Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

Die Matrix A heißt dei Koeffizientenmatrix von System.

Die Matrix $A_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

kann man in Matrixform schreiben:

$Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

Die Matrix A heißt dei Koeffizientenmatrix von System.

Die Matrix $A_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in Mat(m, n+1)$

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

kann man in Matrixform schreiben:

$$Ax = b, \text{ wobei } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K}),\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

$$\text{und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

Die Matrix A heißt dei Koeffizientenmatrix von System.

Die Matrix $A_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in Mat(m, n+1)$ heißt die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems.

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

kann man in Matrixform schreiben:

$Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

Die Matrix A heißt dei Koeffizientenmatrix von System.

Die Matrix $A_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in Mat(m, n+1)$ heißt die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems.

Man kann die elementare Zeilenumtauschungen

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

kann man in Matrixform schreiben:

$Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

Die Matrix A heißt dei Koeffizientenmatrix von System.

Die Matrix $A_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in Mat(m, n+1)$ heißt die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems.

Man kann die elementare Zeilenumtauschungen des Systems als elementare Zeilenumtauschungen der erweiterten Koeffizientenmatrix verstehen.

Matrizendarstellung von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem
(m Gleichungen, n Unbekannten $x_1, .., x_n$.)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

kann man in Matrixform schreiben:

$Ax = b$, wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n, \mathbb{K})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

Die Matrix A heißt dei Koeffizientenmatrix von System.

Die Matrix $A_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in Mat(m, n+1)$ heißt die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems.

Man kann die elementare Zeilenumtauschungen des Systems als elementare Zeilenumtauschungen der erweiterten Koeffizientenmatrix verstehen.

Folgerung aus Sätze 34/35

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$*,*

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$, *wobei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ *und* $b \in \mathbb{K}^n$.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet,*

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist.*

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis:

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung,

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir:

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.

$\Longleftarrow$

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$.
Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar,

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$.
Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert,

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil
$A(x + x') =$

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$.
Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil
$A(x + x') = Ax + Ax'$

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$.
Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil
$A(x + x') = Ax + Ax' = b$

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil
$A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0}$

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$.
Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also, ist

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also, ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar,

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$*, wobei* $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$*,* $x \in \mathbb{K}^n$ *und* $b \in \mathbb{K}^n$*.* A *ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung* $x = A^{-1}b$*.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$.
Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also, ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar, und die Lösung ist $x = \vec{0}$.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.

$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also, ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar, und die Lösung ist $x = \vec{0}$.

Da $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also, ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar, und die Lösung ist $x = \vec{0}$.

Da $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots +$

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also, ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar, und die Lösung ist $x = \vec{0}$.

Da $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also, ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar, und die Lösung ist $x = \vec{0}$.

Da $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$

die Linearkombination von Spalten der A mit Koeffizienten

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also, ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar, und die Lösung ist $x = \vec{0}$.
Da $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$
die Linearkombination von Spalten der A mit Koeffizienten $x_1, ..., x_n$ ist,

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also, ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar, und die Lösung ist $x = \vec{0}$.
Da $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$
die Linearkombination von Spalten der A mit Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$ ist, ist nur die triviale Linearkombination von Spalten gleich Null.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also, ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar, und die Lösung ist $x = \vec{0}$.
Da $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$
die Linearkombination von Spalten der A mit Koeffizienten $x_1, \dots, x_n$ ist, ist nur die triviale Linearkombination von Spalten gleich Null. Dann sind die Spalten von A linear unabhängig,

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also, ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar, und die Lösung ist $x = \vec{0}$.
Da $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$
die Linearkombination von Spalten der A mit Koeffizienten $x_1, \dots, x_n$ ist, ist nur die triviale Linearkombination von Spalten gleich Null. Dann sind die Spalten von A linear unabhängig, und die Matrix ist nichtausgeartet nach Satz 34.

Folgerung aus Sätze 34/35 *Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$. A ist genau dann nichtausgeartet, wenn das System von Gleichungen eindeutig lösbar ist. In dem Fall ist die Lösung $x = A^{-1}b$.*

Beweis: $\Longrightarrow$ Sei A nichtausgeartet. Dann ist das System lösbar. Tatsächlich, $x := A^{-1}b$ ist eine Lösung, weil $Ax = AA^{-1}b = b$. Diese Lösung ist eindeutig. Tatsächlich, sei x eine Lösung. Nach der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung $Ax = b$ mit A^{-1} bekommen wir: $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, also $x = A^{-1}b$.
$\Longleftarrow$ Angenommen das System ist eindeutig lösbar. Dann ist das System $Ax = \vec{0}$ auch eindeutig lösbar. Tatsächlich, es ist lösbar, weil $\vec{0}$ eine Lösung ist. Falls noch eine Lösung $x' \neq 0$ des Systems $Ax = \vec{0}$ existiert, dann ist $x + x'$ eine Lösung von $Ax = b$ (weil $A(x + x') = Ax + Ax' = b + \vec{0} = b$), was den Voraussetzungen widerspricht. Also, ist $Ax = \vec{0}$ eindeutig lösbar, und die Lösung ist $x = \vec{0}$.
Da $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$
die Linearkombination von Spalten der A mit Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$ ist, ist nur die triviale Linearkombination von Spalten gleich Null. Dann sind die Spalten von A linear unabhängig, und die Matrix ist nichtausgeartet nach Satz 34. $\square$

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist,

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.
Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.
Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Bezeichnung

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.
Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Bezeichnung *Sei* $i, j \in \{1, ..., n\}$. *Setze die Elementarmatrix*
$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.
Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Bezeichnung *Sei $i, j \in \{1, ..., n\}$. Setze die Elementarmatrix*
$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$
Bemerkung: $E_{ii} = Id$.

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.
Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Bezeichnung *Sei $i, j \in \{1, ..., n\}$. Setze die Elementarmatrix*
$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$
Bemerkung: $E_{ii} = Id$.
Sei $\lambda \in \mathbb{K}$.

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.
Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Bezeichnung *Sei $i, j \in \{1, ..., n\}$. Setze die Elementarmatrix*
$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$
Bemerkung: $E_{ii} = Id$.
Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Falls $i \neq j$, setze $E_{ij}^{\lambda} := Id + \lambda B_{ij}$.

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.
Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Bezeichnung *Sei $i, j \in \{1, ..., n\}$. Setze die Elementarmatrix*
$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$
Bemerkung: $E_{ii} = Id$.
Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Falls $i \neq j$, setze $E_{ij}^{\lambda} := Id + \lambda B_{ij}$. Falls $i = j$ und $\lambda \neq 0$,

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.

Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.

Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bezeichnung *Sei $i, j \in \{1, ..., n\}$. Setze die Elementarmatrix*

$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$

Bemerkung: $E_{ii} = Id$.

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Falls $i \neq j$, setze $E_{ij}^{\lambda} := Id + \lambda B_{ij}$. Falls $i = j$ und $\lambda \neq 0$, setze $E_{ii}^{\lambda} = Id + (\lambda - 1)B_{ii}$.

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.
Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Bezeichnung *Sei* $i, j \in \{1, ..., n\}$. *Setze die Elementarmatrix*
$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$
Bemerkung: $E_{ii} = Id$.
Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. *Falls* $i \neq j$, *setze* $E_{ij}^{\lambda} := Id + \lambda B_{ij}$. *Falls* $i = j$ *und* $\lambda \neq 0$, *setze* $E_{ii}^{\lambda} = Id + (\lambda - 1)B_{ii}$.

Bsp:

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.
Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Bezeichnung *Sei $i, j \in \{1, ..., n\}$. Setze die Elementarmatrix*
$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$
Bemerkung: $E_{ii} = Id$.
Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Falls $i \neq j$, setze $E_{ij}^{\lambda} := Id + \lambda B_{ij}$. Falls $i = j$ und $\lambda \neq 0$, setze $E_{ii}^{\lambda} = Id + (\lambda - 1)B_{ii}$.
Bsp: $E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.
Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.
Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Bezeichnung *Sei $i, j \in \{1, ..., n\}$. Setze die Elementarmatrix*
$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$
Bemerkung: $E_{ii} = Id$.
Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Falls $i \neq j$, setze $E_{ij}^{\lambda} := Id + \lambda B_{ij}$. Falls $i = j$ und $\lambda \neq 0$, setze $E_{ii}^{\lambda} = Id + (\lambda - 1)B_{ii}$.
Bsp: $E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{23}^{5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Elementarmatrizen in $Mat(n, n)$

Elementarmatrizen sind quadratische Matrizen von spezieller Gestalt.

Wiederholung. Standard-Basis in $Mat(n, n, \mathbb{K})$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.

Bsp: $B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bezeichnung *Sei $i, j \in \{1, ..., n\}$. Setze die Elementarmatrix*

$E_{ij} := Id - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$

Bemerkung: $E_{ii} = Id$.

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Falls $i \neq j$, setze $E_{ij}^{\lambda} := Id + \lambda B_{ij}$. Falls $i = j$ und $\lambda \neq 0$, setze $E_{ii}^{\lambda} = Id + (\lambda - 1)B_{ii}$.

Bsp: $E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{23}^{5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_{11}^{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix.

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$.

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$. Gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zu der i-ten Zeile

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$. Gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zu der i-ten Zeile λ-facher die j-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1)

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$. Gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zu der i-ten Zeile λ-facher die j-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^{\lambda})^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$. Gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zu der i-ten Zeile λ-facher die j-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^{\lambda})^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$
- Multiplikation von links mit E_{ii}^{λ} multipliziert die i-te Zeile mit λ.

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$. Gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zu der i-ten Zeile λ-facher die j-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^{\lambda})^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$
- Multiplikation von links mit E_{ii}^{λ} multipliziert die i-te Zeile mit λ. (Elementare Zeilenumformung (S2) aus Vorl. 1) Ferner gilt:

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$. Gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zu der i-ten Zeile λ-facher die j-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^{\lambda})^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$
- Multiplikation von links mit E_{ii}^{λ} multipliziert die i-te Zeile mit λ. (Elementare Zeilenumformung (S2) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ii}^{\lambda})^{-1} = E_{ii}^{1/\lambda}$.
- Multiplikation von links mit E_{ij} vertauscht die i- und die j-te Zeile (von A)

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$. Gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zu der i-ten Zeile λ-facher die j-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^{\lambda})^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$
- Multiplikation von links mit E_{ii}^{λ} multipliziert die i-te Zeile mit λ. (Elementare Zeilenumformung (S2) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ii}^{\lambda})^{-1} = E_{ii}^{1/\lambda}$.
- Multiplikation von links mit E_{ij} vertauscht die i- und die j-te Zeile (von A) (Elementare Zeilenumformung (S3) aus Vorl. 1)
.

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$. Gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zu der i-ten Zeile λ-facher die j-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^{\lambda})^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$
- Multiplikation von links mit E_{ii}^{λ} multipliziert die i-te Zeile mit λ. (Elementare Zeilenumformung (S2) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ii}^{\lambda})^{-1} = E_{ii}^{1/\lambda}$.
- Multiplikation von links mit E_{ij} vertauscht die i- und die j-te Zeile (von A) (Elementare Zeilenumformung (S3) aus Vorl. 1) . Ferner gilt: $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$. Gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zu der i-ten Zeile λ-facher die j-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^{\lambda})^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$
- Multiplikation von links mit E_{ii}^{λ} multipliziert die i-te Zeile mit λ. (Elementare Zeilenumformung (S2) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ii}^{\lambda})^{-1} = E_{ii}^{1/\lambda}$.
- Multiplikation von links mit E_{ij} vertauscht die i- und die j-te Zeile (von A) (Elementare Zeilenumformung (S3) aus Vorl. 1) . Ferner gilt: $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

Beweis: Zu Hause ausrechnen.

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$. Gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zu der i-ten Zeile λ-facher die j-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^{\lambda})^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$
- Multiplikation von links mit E_{ii}^{λ} multipliziert die i-te Zeile mit λ. (Elementare Zeilenumformung (S2) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ii}^{\lambda})^{-1} = E_{ii}^{1/\lambda}$.
- Multiplikation von links mit E_{ij} vertauscht die i- und die j-te Zeile (von A) (Elementare Zeilenumformung (S3) aus Vorl. 1) . Ferner gilt: $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

Beweis: Zu Hause ausrechnen.

Folgerung

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$. Gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zu der i-ten Zeile λ-facher die j-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^{\lambda})^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$
- Multiplikation von links mit E_{ii}^{λ} multipliziert die i-te Zeile mit λ. (Elementare Zeilenumformung (S2) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ii}^{\lambda})^{-1} = E_{ii}^{1/\lambda}$.
- Multiplikation von links mit E_{ij} vertauscht die i- und die j-te Zeile (von A) (Elementare Zeilenumformung (S3) aus Vorl. 1) . Ferner gilt: $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

Beweis: Zu Hause ausrechnen.

Folgerung *Jede Elementarmatrix ist nichtausgeartet. Deren inverse ist auch eine Elementarmatrix*

Eigenschaften der Elementarmatrizen

Sei A eine Matrix. Dann gilt:

- Sei $i \neq j$. Gilt: Multiplikation von links mit E_{ij}^{λ} addiert zu der i-ten Zeile λ-facher die j-ten Zeile. (Elementare Zeilenumformung (S1) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ij}^{\lambda})^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$
- Multiplikation von links mit E_{ii}^{λ} multipliziert die i-te Zeile mit λ. (Elementare Zeilenumformung (S2) aus Vorl. 1) Ferner gilt: $(E_{ii}^{\lambda})^{-1} = E_{ii}^{1/\lambda}$.
- Multiplikation von links mit E_{ij} vertauscht die i- und die j-te Zeile (von A) (Elementare Zeilenumformung (S3) aus Vorl. 1) . Ferner gilt: $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

Beweis: Zu Hause ausrechnen.

Folgerung *Jede Elementarmatrix ist nichtausgeartet. Deren inverse ist auch eine Elementarmatrix*

Satz 36

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix*

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein!

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Satz 36 *Jede nichtausgeartete $(n \times n)$ Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises:

Satz 36 *Jede nichtausgeartete $(n \times n)$ Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix.

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen.

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen. Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung

Satz 36 *Jede nichtausgeartete $(n \times n)$ Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen. Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix.

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen. Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen.
Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, ..., E_m$,

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen. Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, ..., E_m$, so dass

$$E_1 E_2 ... E_m A = Id. \qquad (*)$$

Satz 36 *Jede nichtausgeartete $(n \times n)$ Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen. Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, ..., E_m$, so dass

$$E_1 E_2 ... E_m A = Id. \qquad (*)$$

Dann ist $E_1 E_2 ... E_m$

Satz 36 *Jede nichtausgeartete* $(n \times n)$ *Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen. Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, ..., E_m$, so dass

$$E_1 E_2 ... E_m A = Id. \qquad (*)$$

Dann ist $E_1 E_2 ... E_m$ die inverse Matrix zu A,

Satz 36 *Jede nichtausgeartete $(n \times n)$ Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen. Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, ..., E_m$, so dass

$$E_1 E_2 ... E_m A = Id. \qquad (*)$$

Dann ist $E_1 E_2 ... E_m$ die inverse Matrix zu A, also $A = (E_1 E_2 ... E_m)^{-1}$

Satz 36 *Jede nichtausgeartete $(n \times n)$ Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen. Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, ..., E_m$, so dass

$$E_1 E_2 ... E_m A = Id. \qquad (*)$$

Dann ist $E_1 E_2 ... E_m$ die inverse Matrix zu A, also $A = (E_1 E_2 ... E_m)^{-1} = E_m^{-1} ... E_2^{-1} E_1^{-1}$.

Satz 36 *Jede nichtausgeartete ($n \times n$) Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen. Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, ..., E_m$, so dass

$$E_1 E_2 ... E_m A = Id. \qquad (*)$$

Dann ist $E_1 E_2 ... E_m$ die inverse Matrix zu A, also $A = (E_1 E_2 ... E_m)^{-1} = E_m^{-1} ... E_2^{-1} E_1^{-1}$.

Satz 36 *Jede nichtausgeartete $(n \times n)$ Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen.
Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, ..., E_m$, so dass

$$E_1 E_2 ... E_m A = Id. \qquad (*)$$

Dann ist $E_1 E_2 ... E_m$ die inverse Matrix zu A, also
$A = (E_1 E_2 ... E_m)^{-1} = E_m^{-1} ... E_2^{-1} E_1^{-1}$.
Wie kann man eine nichtausgeartete Matrix mit Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen?

Satz 36 *Jede nichtausgeartete $(n \times n)$ Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen*

Frage *Kann eine ausgeartete Matrix Produkt von Elementarmatrizen sein?*
Nein! Produkt von nichtausgearteten Matrizen ist nichtausgeartet.

Die Idee des Beweises: Sei A eine nichtausgeartete Matrix. Es genügt zu zeigen: Man kann sie mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen.
Tatsächlich, jede elementare Zeilenumformung ist dasselbe wie die Multiplikation mit einer geeigneten Elementarmatrix. Also gibt es Elementarmatrizen $E_1, E_2, ..., E_m$, so dass

$$E_1 E_2 ... E_m A = Id. \qquad (*)$$

Dann ist $E_1 E_2 ... E_m$ die inverse Matrix zu A, also
$A = (E_1 E_2 ... E_m)^{-1} = E_m^{-1} ... E_2^{-1} E_1^{-1}$.
Wie kann man eine nichtausgeartete Matrix mit Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix Id überführen?
Gauß-Algorithmus.

Aus Satz 2 (Gauß) folgt:

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen:

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen: nach k schritten bekommen wir

$$A^{(k)} = E_1 ... E_k A =$$

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen: nach k schritten bekommen wir

$$A^{(k)} = E_1 \ldots E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \ldots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \ldots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen: nach k schritten bekommen wir

$$A^{(k)} = E_1 ... E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(Da die Matrix $(n \times n)$ ist, sind alle Elemente unter der Diagonale gleich 0.)

Da die Matrix A nichtausgeartet ist,

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen: nach k schritten bekommen wir

$$A^{(k)} = E_1 ... E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(Da die Matrix ($n \times n$) ist, sind alle Elemente unter der Diagonale gleich 0.)

Da die Matrix A nichtausgeartet ist, ist die Matrix $A^{(k)}$

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen: nach k schritten bekommen wir

$$A^{(k)} = E_1 ... E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(Da die Matrix $(n \times n)$ ist, sind alle Elemente unter der Diagonale gleich 0.)

Da die Matrix A nichtausgeartet ist, ist die Matrix $A^{(k)}$ auch nichtausgeartet

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen: nach k schritten bekommen wir

$$A^{(k)} = E_1 ... E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(Da die Matrix ($n \times n$) ist, sind alle Elemente unter der Diagonale gleich 0.)

Da die Matrix A nichtausgeartet ist, ist die Matrix $A^{(k)}$ auch nichtausgeartet(Weil $GL(n, \mathbb{K})$ eine Gruppe ist, ist das Produkt $E_1 ... E_k \cdot A \in GL(n, \mathbb{K})$,

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen: nach k schritten bekommen wir

$$A^{(k)} = E_1 ... E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(Da die Matrix ($n \times n$) ist, sind alle Elemente unter der Diagonale gleich 0.)

Da die Matrix A nichtausgeartet ist, ist die Matrix $A^{(k)}$ auch nichtausgeartet(Weil $GL(n, \mathbb{K})$ eine Gruppe ist, ist das Produkt $E_1 ... E_k \cdot A \in GL(n, \mathbb{K})$, ist also eine nichtausgeartete Matrix.)

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen: nach k schritten bekommen wir

$$A^{(k)} = E_1 ... E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(Da die Matrix $(n \times n)$ ist, sind alle Elemente unter der Diagonale gleich 0.)

Da die Matrix A nichtausgeartet ist, ist die Matrix $A^{(k)}$ auch nichtausgeartet(Weil $GL(n, \mathbb{K})$ eine Gruppe ist, ist das Produkt $E_1 ... E_k \cdot A \in GL(n, \mathbb{K})$, ist also eine nichtausgeartete Matrix.)

Dann sind die Elemente $a_{ii}^{(k)}$ auf der Diagonale $\neq 0$

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen: nach k schritten bekommen wir

$$A^{(k)} = E_1 ... E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(Da die Matrix $(n \times n)$ ist, sind alle Elemente unter der Diagonale gleich 0.)

Da die Matrix A nichtausgeartet ist, ist die Matrix $A^{(k)}$ auch nichtausgeartet(Weil $GL(n, \mathbb{K})$ eine Gruppe ist, ist das Produkt $E_1 ... E_k \cdot A \in GL(n, \mathbb{K})$, ist also eine nichtausgeartete Matrix.)

Dann sind die Elemente $a_{ii}^{(k)}$ auf der Diagonale $\neq 0$ (sonst, falls i-tes Element auf der Diagonale von $E_1 ... E_k \cdot A$ gleich 0 ist,

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen: nach k schritten bekommen wir

$$A^{(k)} = E_1 ... E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(Da die Matrix $(n \times n)$ ist, sind alle Elemente unter der Diagonale gleich 0.)

Da die Matrix A nichtausgeartet ist, ist die Matrix $A^{(k)}$ auch nichtausgeartet(Weil $GL(n, \mathbb{K})$ eine Gruppe ist, ist das Produkt $E_1 ... E_k \cdot A \in GL(n, \mathbb{K})$, ist also eine nichtausgeartete Matrix.)

Dann sind die Elemente $a_{ii}^{(k)}$ auf der Diagonale $\neq 0$ (sonst, falls i-tes Element auf der Diagonale von $E_1 ... E_k \cdot A$ gleich 0 ist, dann ist für alle $j \leq i$ das Produkt $E_1 ... E_k \cdot A e_i$ eine Linearkombination von Vektoren $e_1, ..., e_{i-1}$,

Aus Satz 2 (Gauß) folgt: Jede Matrix kann man in Stufenform mit Hilfe von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen bringen: nach k schritten bekommen wir

$$A^{(k)} = E_1 ... E_k A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(Da die Matrix $(n \times n)$ ist, sind alle Elemente unter der Diagonale gleich 0.)

Da die Matrix A nichtausgeartet ist, ist die Matrix $A^{(k)}$ auch nichtausgeartet(Weil $GL(n, \mathbb{K})$ eine Gruppe ist, ist das Produkt $E_1 ... E_k \cdot A \in GL(n, \mathbb{K})$, ist also eine nichtausgeartete Matrix.)

Dann sind die Elemente $a_{ii}^{(k)}$ auf der Diagonale $\neq 0$ (sonst, falls i-tes Element auf der Diagonale von $E_1 ... E_k \cdot A$ gleich 0 ist, dann ist für alle $j \leq i$ das Produkt $E_1 ... E_k \cdot Ae_i$ eine Linearkombination von Vektoren $e_1, ..., e_{i-1}$, und deswegen ist $E_1 ... E_k \cdot A$ ausgeartet.)

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ}

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen.

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$)

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) gleich Null zu machen, können wir mit E_{ij}^{λ}

multiplizieren,

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) gleich Null zu machen, können wir mit E_{ij}^{λ} multiplizieren, wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$.

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) gleich Null zu machen, können wir mit E_{ij}^{λ} multiplizieren, wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$. Diese Multiplikation addiert zu der i-te Zeile die j-te Zeile der Matrix $A^{(k)}$,

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) gleich Null zu machen, können wir mit E_{ij}^{λ} multiplizieren, wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$. Diese Multiplikation addiert zu der i-te Zeile die j-te Zeile der Matrix $A^{(k)}$, und ändert nicht die Unterdiagonalelemente der Matrix.

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) gleich Null zu machen, können wir mit E_{ij}^{λ} multiplizieren, wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$. Diese Multiplikation addiert zu der i-te Zeile die j-te Zeile der Matrix $A^{(k)}$, und ändert nicht die Unterdiagonalelemente der Matrix. Wir tun das zuerst für die letzte Spalte, dann für die vorletzte u.s.w.

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) gleich Null zu machen, können wir mit E_{ij}^{λ} multiplizieren, wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$. Diese Multiplikation addiert zu der i-te Zeile die j-te Zeile der Matrix $A^{(k)}$, und ändert nicht die Unterdiagonalelemente der Matrix. Wir tun das zuerst für die letzte Spalte, dann für die vorletzte u.s.w.
Wir bekommen eine Matrix so dass nur die Elemente auf der Diagonale von 0 verschieden sind.

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) gleich Null zu machen, können wir mit E_{ij}^{λ} multiplizieren, wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$. Diese Multiplikation addiert zu der i-te Zeile die j-te Zeile der Matrix $A^{(k)}$, und ändert nicht die Unterdiagonalelemente der Matrix. Wir tun das zuerst für die letzte Spalte, dann für die vorletzte u.s.w.
Wir bekommen eine Matrix so dass nur die Elemente auf der Diagonale von 0 verschieden sind.

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \ldots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) gleich Null zu machen, können wir mit E_{ij}^{λ} multiplizieren, wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$. Diese Multiplikation addiert zu der i-te Zeile die j-te Zeile der Matrix $A^{(k)}$, und ändert nicht die Unterdiagonalelemente der Matrix. Wir tun das zuerst für die letzte Spalte, dann für die vorletzte u.s.w.
Wir bekommen eine Matrix so dass nur die Elemente auf der Diagonale von 0 verschieden sind.

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & \dots & 0 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Letzter Schritt Mit Hilfe der Multiplikation mit geeigneten E_{ii}^{λ}

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) gleich Null zu machen, können wir mit E_{ij}^{λ} multiplizieren, wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$. Diese Multiplikation addiert zu der i-te Zeile die j-te Zeile der Matrix $A^{(k)}$, und ändert nicht die Unterdiagonalelemente der Matrix. Wir tun das zuerst für die letzte Spalte, dann für die vorletzte u.s.w.
Wir bekommen eine Matrix so dass nur die Elemente auf der Diagonale von 0 verschieden sind.

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & \dots & 0 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Letzter Schritt Mit Hilfe der Multiplikation mit geeigneten E_{ii}^{λ} können wir auch die Elemente auf der Diagonale gleich 1 machen.

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) gleich Null zu machen, können wir mit E_{ij}^{λ} multiplizieren, wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$. Diese Multiplikation addiert zu der i-te Zeile die j-te Zeile der Matrix $A^{(k)}$, und ändert nicht die Unterdiagonalelemente der Matrix. Wir tun das zuerst für die letzte Spalte, dann für die vorletzte u.s.w.
Wir bekommen eine Matrix so dass nur die Elemente auf der Diagonale von 0 verschieden sind.

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & \dots & 0 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Letzter Schritt Mit Hilfe der Multiplikation mit geeigneten E_{ii}^{λ} können wir auch die Elemente auf der Diagonale gleich 1 machen. Wir bekommen die Id Matrix. Also, $E_1 E_2 \dots E_m A = Id$. $\square$

Dann kann man die Elemente über Diagonale mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen gleich 0 machen:
Mit Hilfe von Multiplikation mit Elementarmatrizen E_{ij}^{λ} können wir die Elemente über der Diagonale auch gleich 0 machen. Tatsächlich, um Element $a_{ij}^{(k)}$ (wobei $i < j$) gleich Null zu machen, können wir mit E_{ij}^{λ} multiplizieren, wobei $\lambda = -\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$. Diese Multiplikation addiert zu der i-te Zeile die j-te Zeile der Matrix $A^{(k)}$, und ändert nicht die Unterdiagonalelemente der Matrix. Wir tun das zuerst für die letzte Spalte, dann für die vorletzte u.s.w.
Wir bekommen eine Matrix so dass nur die Elemente auf der Diagonale von 0 verschieden sind.

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & \dots & 0 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Letzter Schritt Mit Hilfe der Multiplikation mit geeigneten E_{ii}^{λ} können wir auch die Elemente auf der Diagonale gleich 1 machen. Wir bekommen die Id Matrix. Also, $E_1 E_2 \dots E_m A = Id$. $\square$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{33}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{33}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{33}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also, die inverse Matrix ist

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{33}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also, die inverse Matrix ist $E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{33}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also, die inverse Matrix ist $E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}Id$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{33}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also, die inverse Matrix ist $E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}Id$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{33}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also, die inverse Matrix ist $E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}Id$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \qquad E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{33}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also, die inverse Matrix ist $E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}Id$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \qquad E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{33}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also, die inverse Matrix ist $E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}Id$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \qquad E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 22 & 10 & -11 \\ 13 & -6 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{33}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also, die inverse Matrix ist $E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}Id$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \qquad E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 22 & 10 & -11 \\ 13 & -6 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{33}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12} = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -5 \\ 13 & -6 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also, die inverse Matrix ist $E_{11}^{1/2}E_{22}^{1/3}E_{12}^{-1}E_{13}^{-11}E_{23}^{-6}E_{32}^{-2}E_{31}^{1}E_{12}Id$

Beispiel zum Beweis/ Konstruktion der inversen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}^1 E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \qquad E_{31}^1 E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} = \begin{pmatrix} 22 & 10 & -11 \\ 13 & -6 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{33}^1 E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -5 \\ 13 & -6 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11}^{1/2} E_{22}^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{11}^{1/2} E_{22}^{1/3} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} = \begin{pmatrix} 9/2 & -2 & -5/2 \\ 13/3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also, die inverse Matrix ist $E_{11}^{1/2} E_{22}^{1/3} E_{12}^{-1} E_{13}^{-11} E_{23}^{-6} E_{32}^{-2} E_{31}^1 E_{12} Id$

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix.

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee:

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren,

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lass uns die Matrix A in Id überführen.

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lass uns die Matrix A in Id überführen. Jede elementare Zeilenumformung auch auf der rechten Seite anwenden.

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lass uns die Matrix A in Id überführen. Jede elementare Zeilenumformung auch auf der rechten Seite anwenden. Wenn von links Id stehet, steht von rechts A^{-1}.

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lass uns die Matrix A in Id überführen. Jede elementare Zeilenumformung auch auf der rechten Seite anwenden. Wenn von links Id stehet, steht von rechts A^{-1}.

Bsp:

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lass uns die Matrix A in Id überführen. Jede elementare Zeilenumformung auch auf der rechten Seite anwenden. Wenn von links Id stehet, steht von rechts A^{-1}.

Bsp: Invertiere die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lass uns die Matrix A in Id überführen. Jede elementare Zeilenumformung auch auf der rechten Seite anwenden. Wenn von links Id stehet, steht von rechts A^{-1}.

Bsp: Invertiere die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lass uns die Matrix A in Id überführen. Jede elementare Zeilenumformung auch auf der rechten Seite anwenden. Wenn von links Id stehet, steht von rechts A^{-1}.

Bsp: Invertiere die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Zeile II:= Zeile II- 2(Zeile I)

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lass uns die Matrix A in Id überführen. Jede elementare Zeilenumformung auch auf der rechten Seite anwenden. Wenn von links Id stehet, steht von rechts A^{-1}.

Bsp: Invertiere die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Zeile II:= Zeile II- 2(Zeile I)

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lass uns die Matrix A in Id überführen. Jede elementare Zeilenumformung auch auf der rechten Seite anwenden. Wenn von links Id stehet, steht von rechts A^{-1}.

Bsp: Invertiere die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Zeile II:= Zeile II- 2(Zeile I)

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Zeile I:= Zeile I -2 (Zeile II)

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lass uns die Matrix A in Id überführen. Jede elementare Zeilenumformung auch auf der rechten Seite anwenden. Wenn von links Id stehet, steht von rechts A^{-1}.

Bsp: Invertiere die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Zeile II:= Zeile II- 2(Zeile I)

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Zeile I:= Zeile I -2 (Zeile II)

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

Methode der Elementarmatrizen für berechnen der inversen Matrix

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix. Die Idee: wir werden die Zerlegung von A in das Produkt von Elementarmatrizen mit dem Gauß-Algorithmus konstruieren, wie wir im Beweis von Satz 36 gemacht haben.

Schreibe die Matrix Id neben A. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$

Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen lass uns die Matrix A in Id überführen. Jede elementare Zeilenumformung auch auf der rechten Seite anwenden. Wenn von links Id stehet, steht von rechts A^{-1}.

Bsp: Invertiere die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Zeile II:= Zeile II- 2(Zeile I)

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Zeile I:= Zeile I -2 (Zeile II)

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Rechts steht die inverse Matrix zu A.

Wiederholung und Plan

Wiederholung und Plan

- Ziel: alle lineare $f : V \longrightarrow U$ zu beschreiben, wobei $dim(V) = n < \infty, \ \dim(U) = m < \infty,$

Wiederholung und Plan

- Ziel: alle lineare $f : V \longrightarrow U$ zu beschreiben, wobei $dim(V) = n < \infty$, $\dim(U) = m < \infty$, also $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$.

Wiederholung und Plan

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei $dim(V) = n < \infty$, $\dim(U) = m < \infty$, also $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$. Um Isomorpismus festzulegen, brauchen wir nur die Basis eingeben

Wiederholung und Plan

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei $dim(V) = n < \infty$, $\dim(U) = m < \infty$, also $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$. Um Isomorpismus festzulegen, brauchen wir nur die Basis eingeben
- Strategie:

Wiederholung und Plan

- Ziel: alle lineare $f : V \longrightarrow U$ zu beschreiben, wobei $dim(V) = n < \infty$, $\dim(U) = m < \infty$, also $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$. Um Isomorpismus festzulegen, brauchen wir nur die Basis eingeben
- Strategie:
  - Wir haben bereit alle lineare $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ beschrieben:

Wiederholung und Plan

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei $dim(V) = n < \infty$, $\dim(U) = m < \infty$, also $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$. Um Isomorpismus festzulegen, brauchen wir nur die Basis eingeben
- Strategie:
  - Wir haben bereit alle lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ beschrieben: jedes f ist f_A für irgednwelche $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$
  - Für alle Basen B_V, B_U (in V bzw. U) sind die Koordinatenabbildungen $C_{B_V} : V \to \mathbb{K}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{K}^n$ Isomorphismen.

Wiederholung und Plan

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei $dim(V) = n < \infty$, $\dim(U) = m < \infty$, also $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$. Um Isomorpismus festzulegen, brauchen wir nur die Basis eingeben
- Strategie:
  - Wir haben bereit alle lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ beschrieben: jedes f ist f_A für irgednwelche $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$
  - Für alle Basen B_V, B_U (in V bzw. U) sind die Koordinatenabbildungen $C_{B_V} : V \to \mathbb{K}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{K}^n$ Isomorphismen.
  - Dann ist $C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist wohldefiniert und ist eine lineare Abbildung.

.

Wiederholung und Plan

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei $dim(V) = n < \infty$, $\dim(U) = m < \infty$, also $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$. Um Isomorpismus festzulegen, brauchen wir nur die Basis eingeben
- Strategie:
  - Wir haben bereit alle lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ beschrieben: jedes f ist f_A für irgednwelche $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$
  - Für alle Basen B_V, B_U (in V bzw. U) sind die Koordinatenabbildungen $C_{B_V} : V \to \mathbb{K}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{K}^n$ Isomorphismen.
  - Dann ist $C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist wohldefiniert und ist eine lineare Abbildung. Deren Matrix heißt die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen B_V, B_U .

Wiederholung und Plan

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei $dim(V) = n < \infty$, $\dim(U) = m < \infty$, also $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$. Um Isomorpismus festzulegen, brauchen wir nur die Basis eingeben
- Strategie:
  - Wir haben bereit alle lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ beschrieben: jedes f ist f_A für irgednwelche $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$
  - Für alle Basen B_V, B_U (in V bzw. U) sind die Koordinatenabbildungen $C_{B_V} : V \to \mathbb{K}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{K}^n$ Isomorphismen.
  - Dann ist $C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist wohldefiniert und ist eine lineare Abbildung. Deren Matrix heißt die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. Basen B_V, B_U .
  - Wir untersuchen jetzt, wie ändert sich die darstellende Matrix der Abbildung, wenn wir andere Basen B'_V, B'_U in V bzw. U wählen.

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + \ldots + x^n v_n$.

Frage

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit:

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Satz 32;

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Satz 32; ferner gilt: $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$.

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Satz 32; ferner gilt: $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$.

Ferner gilt:

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat* v *in einer anderen Basis* $(b_1, .., b_n)$*?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Satz 32; ferner gilt: $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$.

Ferner gilt: die Matrix T ist nichtausgeartet

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Satz 32; ferner gilt: $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$.

Ferner gilt: die Matrix T ist nichtausgeartet (Satz 34),

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Satz 32; ferner gilt: $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$.

Ferner gilt: die Matrix T ist nichtausgeartet (Satz 34), also T^{-1} ist wohldefiniert.

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis* $(b_1, .., b_n)$*?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Satz 32; ferner gilt: $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$.

Ferner gilt: die Matrix T ist nichtausgeartet (Satz 34), also T^{-1} ist wohldefiniert. Diese Matrix $T \in GL(n, \mathbb{K})$ heißt Transformationsmatrix.

Satz 37

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Satz 32; ferner gilt: $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$.

Ferner gilt: die Matrix T ist nichtausgeartet (Satz 34), also T^{-1} ist wohldefiniert. Diese Matrix $T \in GL(n, \mathbb{K})$ heißt Transformationsmatrix.

Satz 37 *Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis*

$(v_1, ..., v_n)$.

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Satz 32; ferner gilt: $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$.

Ferner gilt: die Matrix T ist nichtausgeartet (Satz 34), also T^{-1} ist wohldefiniert. Diese Matrix $T \in GL(n, \mathbb{K})$ heißt Transformationsmatrix.

Satz 37 *Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$. Dann gilt: Der Koordinatenvektor des Vektors v*

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Satz 32; ferner gilt: $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$.

Ferner gilt: die Matrix T ist nichtausgeartet (Satz 34), also T^{-1} ist wohldefiniert. Diese Matrix $T \in GL(n, \mathbb{K})$ heißt Transformationsmatrix.

Satz 37 *Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$. Dann gilt: Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $b_1, ..., b_n$*

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis $(b_1, .., b_n)$?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Satz 32; ferner gilt: $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$.

Ferner gilt: die Matrix T ist nichtausgeartet (Satz 34), also T^{-1} ist wohldefiniert. Diese Matrix $T \in GL(n, \mathbb{K})$ heißt Transformationsmatrix.

Satz 37 *Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$. Dann gilt: Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $b_1, ..., b_n$ ist $T^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$*

Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$,

d.h., $v = x^1 v_1 + ... + x^n v_n$.

Frage *Welche Koordinaten hat v in einer anderen Basis* $(b_1, .., b_n)$*?*

Die Koordinaten den vektor b_i in der Basis $(v_1, ..., v_n)$ seien $\begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Betrachte die $(n \times n)$- Matrix T s.d. $Te_i = \begin{pmatrix} b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^n \end{pmatrix}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Satz 32; ferner gilt: $T = \begin{pmatrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^n & \dots & b_n^n \end{pmatrix}$.

Ferner gilt: die Matrix T ist nichtausgeartet (Satz 34), also T^{-1} ist wohldefiniert. Diese Matrix $T \in GL(n, \mathbb{K})$ heißt Transformationsmatrix.

Satz 37 *Vektor $v \in V$ habe Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ in der Basis $(v_1, ..., v_n)$. Dann gilt: Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $b_1, ..., b_n$ ist $T^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$*

(Oder: für jedes v gilt: $C_B(v) = T^{-1} C_{(v_1,...,v_n)}(v)$.)

Satz 37

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v*

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis* $B := (b_1, ..., b_n)$

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$*

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis:

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$.

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist* $T^{-1}x$ (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i$ gilt

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist* $T^{-1}x$ (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,\dots,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,\dots,v_n)}$ an: Wegen

$C_{(v_1,\dots,v_n)}(b_i) = Te_i$ gilt $x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n)$.

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$,

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i$ gilt $x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n)$.

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen $C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i$ gilt $x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n)$.

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage).

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i \text{ gilt } x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n).$$

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist* $T^{-1}x$ (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i$ gilt $x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n)$.

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung:

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors* v *in der Basis* $B := (b_1, ..., b_n)$ *ist* $T^{-1}x$ (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen $C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i$ gilt $x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n)$.

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung.

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors* v *in der Basis* $B := (b_1, ..., b_n)$ *ist* $T^{-1}x$ (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i \text{ gilt } x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n).$$

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U,

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i \text{ gilt } x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n).$$

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen.

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i$ gilt $x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n)$.

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen. Dann gilt:

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors* v *in der Basis* $B := (b_1, ..., b_n)$ *ist* $T^{-1}x$ (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1b_1 + ... + y_nb_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i$ gilt $x = y_1Te_1 + ... + y_nTe_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1e_1 + ... + y_ne_n)$.

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1}AT_V$.

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist* $T^{-1}x$ (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i \text{ gilt } x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n).$$

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.
Beweis:

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i \text{ gilt } x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n).$$

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.
Beweis: A ist darstellende Matrix $\Longleftrightarrow$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i$ gilt $x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n)$.

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Beweis: A ist darstellende Matrix $\iff$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$Ax = C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1}(x)$$

$$=$$

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i \text{ gilt } x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n).$$

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Beweis: A ist darstellende Matrix $\iff$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\begin{array}{ccccc} Ax & = & C_{B_U} & \circ f \circ & (C_{B_V})^{-1}(x) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & = & & & \end{array}$$

Wir Multiplizieren von rechts mit T_U^{-1} und benutzen, dass $T_V T_V^{-1} = Id$.

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i \text{ gilt } x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n).$$

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Beweis: A ist darstellende Matrix $\iff$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\begin{array}{ccccc} Ax & = & C_{B_U} & \circ f \circ & (C_{B_V})^{-1}(x) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underbrace{T_U^{-1} A T_V}\, \underbrace{T_V^{-1} x} & = & \underbrace{T_U^{-1} C_{B_U}}_{C_{B'_U}} & \circ f \circ & \underbrace{(C_{B_V})^{-1}(T_V}\, \underbrace{T_V^{-1} x)} \end{array}$$

Wir Multiplizieren von rechts mit T_U^{-1} und benutzen, dass $T_V T_V^{-1} = Id$.

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1} C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i \text{ gilt } x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n).$$

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). □

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Beweis: A ist darstellende Matrix $\Longleftrightarrow$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$Ax = C_{B_U} \circ f \circ (C_{B_V})^{-1}(x)$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{T_U^{-1} A T_V}_{A'} \underbrace{T_V^{-1} x}_{y} = \underbrace{T_U^{-1} C_{B_U}}_{C_{B'_U}} \circ f \circ \underbrace{(C_{B_V})^{-1}(T_V}_{} \underbrace{T_V^{-1} x)}_{y}$$

Wir Multiplizieren von rechts mit T_U^{-1} und benutzen, dass $T_V T_V^{-1} = Id$.

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i \text{ gilt } x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n).$$

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Beweis: A ist darstellende Matrix $\iff$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\begin{array}{ccccc} Ax & = & C_{B_U} & \circ f \circ & (C_{B_V})^{-1}(x) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underbrace{T_U^{-1} A T_V}_{A'} \underbrace{T_V^{-1} x}_{y} & = & \underbrace{T_U^{-1} C_{B_U}}_{C_{B'_U}} & \circ f \circ & \underbrace{(C_{B_V})^{-1}(T_V}_{\left(T_V^{-1} C_{B_V}\right)^{-1}} \underbrace{T_V^{-1} x)}_{y} \end{array}$$

Wir Multiplizieren von rechts mit T_U^{-1} und benutzen, dass $T_V T_V^{-1} = Id$.

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist $T^{-1}x$* (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i \text{ gilt } x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n).$$

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). $\square$

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1}AT_V$.

Beweis: A ist darstellende Matrix $\iff$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\begin{array}{ccccc} Ax & = & C_{B_U} & \circ f \circ & (C_{B_V})^{-1}(x) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underbrace{T_U^{-1}AT_V}_{A'}\ \underbrace{T_V^{-1}x}_{y} & = & \underbrace{T_U^{-1}C_{B_U}}_{C_{B'_U}} & \circ f \circ & \underbrace{(C_{B_V})^{-1}(T_V}_{\left(T_V^{-1}C_{B_V}\right)^{-1}}\ \underbrace{T_V^{-1}x)}_{y} \end{array}$$

Wir Multiplizieren von rechts mit T_U^{-1} und benutzen, dass $T_V T_V^{-1} = Id$.

Also, $\forall y \in \mathbb{K}^n$ gilt $A'y = C_{B'_U} \circ f \circ (C_{B'_V})^{-1}(y)$,

Satz 37 *Der Koordinatenvektor des Vektors v in der Basis $B := (b_1, ..., b_n)$ ist* $T^{-1}x$ (oder: $C_B(v) = T^{-1}C_{(v_1,...,v_n)}(v)$)

Beweis: nach Definition sind die Koordinaten von v die Skalare $y_1, ..., y_n$ s.d. $v = y_1 b_1 + ... + y_n b_n$. Wir wenden $C_{(v_1,...,v_n)}$ an: Wegen

$C_{(v_1,...,v_n)}(b_i) = Te_i$ gilt $x = y_1 Te_1 + ... + y_n Te_n \overset{\text{Linearität}}{=} T(y_1 e_1 + ... + y_n e_n)$.

Also, $\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$, und deswegen $y = T^{-1}x$ (Multiplizieren von rechts mit T^{-1} gibt die Aussage). □

Folgerung: Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Die darstellende Matrix von f bzgl. Basen B_V (in V) und B_U (in U) sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Seien B'_V, B'_U andere Basen in V bzw. U, T_U, T_V die Transformationsmatrizen. Dann gilt:
Darstellende Matrix von f bzgl. der Basen B'_V, B'_U ist $A' := T_U^{-1} A T_V$.

Beweis: A ist darstellende Matrix $\iff$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\begin{array}{ccccc} Ax & = & C_{B_U} & \circ f \circ & (C_{B_V})^{-1}(x) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underbrace{T_U^{-1} A T_V}_{A'} \underbrace{T_V^{-1}x}_{y} & = & \underbrace{T_U^{-1} C_{B_U}}_{C_{B'_U}} & \circ f \circ & \underbrace{(C_{B_V})^{-1}(T_V}_{(T_V^{-1}C_{B_V})^{-1}} \underbrace{T_V^{-1}x)}_{y} \end{array}$$

Wir Multiplizieren von rechts mit T_U^{-1} und benutzen, dass $T_V T_V^{-1} = Id$.

Also, $\forall y \in \mathbb{K}^n$ gilt $A'y = C_{B'_U} \circ f \circ (C_{B'_V})^{-1}(y)$, □