Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \rightarrow U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt:*
$dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt:* $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt:* $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional,

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt: $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.*

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt: $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.*

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.
Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von Kern_f.

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt:* $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) können wir die Basis $(v_1, ..., v_k)$ bis zum einer Basis in V erganzen:

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt:*
$dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.
Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) (Basisergänzungsatz) können wir die Basis $(v_1, ..., v_k)$ bis zum einer Basis in V erganzen: es gibt $v_{k+1}, ..., v_n$ so dass $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis ist.

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt: $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.*

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.
Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) (Basisergänzungsatz) können wir die Basis $(v_1, ..., v_k)$ bis zum einer Basis in V erganzen: es gibt $v_{k+1}, ..., v_n$ so dass $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis ist.
Wir zeigen: $(f(v_{k+1}), ..., f(v_n))$ ist eine Basis in $Bild_f$.

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt:* $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) (Basisergänzungsatz) können wir die Basis $(v_1, ..., v_k)$ bis zum einer Basis in V erganzen: es gibt $v_{k+1}, ..., v_n$ so dass $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis ist.

Wir zeigen: $(f(v_{k+1}), ..., f(v_n))$ ist eine Basis in $Bild_f$.

$f(v_{k+1}), ..., f(v_n)$ ist erzeugend: Aus Beweis von Satz 30 folgt, dass man jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt:* $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.
Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) (Basisergänzungsatz) können wir die Basis $(v_1, ..., v_k)$ bis zum einer Basis in V erganzen: es gibt $v_{k+1}, ..., v_n$ so dass $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis ist.
Wir zeigen: $(f(v_{k+1}), ..., f(v_n))$ ist eine Basis in $Bild_f$.
$f(v_{k+1}), ..., f(v_n)$ ist erzeugend: Aus Beweis von Satz 30 folgt, dass man jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_1), ..., f(v_n)$ darstellen kann:

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt:* $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) (Basisergänzungsatz) können wir die Basis $(v_1, ..., v_k)$ bis zum einer Basis in V erganzen: es gibt $v_{k+1}, ..., v_n$ so dass $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis ist.

Wir zeigen: $(f(v_{k+1}), ..., f(v_n))$ ist eine Basis in $Bild_f$.

$f(v_{k+1}), ..., f(v_n)$ ist erzeugend: Aus Beweis von Satz 30 folgt, dass man jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_1), ..., f(v_n)$ darstellen kann:

$$u = f(\lambda_1 v_1 + ...\lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + ... + \lambda_n f(v_n).$$

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt:* $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) können wir die Basis $(v_1, ..., v_k)$ bis zum einer Basis in V erganzen: es gibt $v_{k+1}, ..., v_n$ so dass $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis ist.

Wir zeigen: $(f(v_{k+1}), ..., f(v_n))$ ist eine Basis in $Bild_f$.

$f(v_{k+1}), ..., f(v_n)$ ist erzeugend: Aus Beweis von Satz 30 folgt, dass man jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_1), ..., f(v_n)$ darstellen kann:

$$u = f(\lambda_1 v_1 + ...\lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + ... + \lambda_n f(v_n).$$

Aber $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = 0$,

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt: $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.*

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) (Basisergänzungsatz) können wir die Basis $(v_1, ..., v_k)$ bis zum einer Basis in V erganzen: es gibt $v_{k+1}, ..., v_n$ so dass $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis ist.

Wir zeigen: $(f(v_{k+1}), ..., f(v_n))$ ist eine Basis in $Bild_f$.

$f(v_{k+1}), ..., f(v_n)$ ist erzeugend: Aus Beweis von Satz 30 folgt, dass man jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_1), ..., f(v_n)$ darstellen kann:

$$u = f(\lambda_1 v_1 + ... \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + ... + \lambda_n f(v_n).$$

Aber $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = 0$, da $v_1, ..., v_k \in \mathrm{Kern}_f$.

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt:* $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) (Basisergänzungsatz) können wir die Basis $(v_1, ..., v_k)$ bis zum einer Basis in V erganzen: es gibt $v_{k+1}, ..., v_n$ so dass $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis ist.

Wir zeigen: $(f(v_{k+1}), ..., f(v_n))$ ist eine Basis in $Bild_f$.

$f(v_{k+1}), ..., f(v_n)$ ist erzeugend: Aus Beweis von Satz 30 folgt, dass man jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_1), ..., f(v_n)$ darstellen kann:

$$u = f(\lambda_1 v_1 + ... \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + ... + \lambda_n f(v_n).$$

Aber $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = 0$, da $v_1, ..., v_k \in \mathrm{Kern}_f$. Dann $u = \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \lambda_{k+2} f(v_{k+2}) + ... + \lambda_n f(v_n)$.

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt:* $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) (Basisergänzungsatz) können wir die Basis $(v_1, ..., v_k)$ bis zum einer Basis in V erganzen: es gibt $v_{k+1}, ..., v_n$ so dass $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis ist.

Wir zeigen: $(f(v_{k+1}), ..., f(v_n))$ ist eine Basis in $Bild_f$.

$f(v_{k+1}), ..., f(v_n)$ ist erzeugend: Aus Beweis von Satz 30 folgt, dass man jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_1), ..., f(v_n)$ darstellen kann:

$$u = f(\lambda_1 v_1 + ...\lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + ... + \lambda_n f(v_n).$$

Aber $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = 0$, da $v_1, ..., v_k \in \mathrm{Kern}_f$. Dann $u = \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \lambda_{k+2} f(v_{k+2}) + ... + \lambda_n f(v_n)$. Also ist $\mathrm{span}(\{f(v_{k+1}), ...f(v_n)\}) = \mathrm{Bild}_f$.

Satz 31 (Erste Dimensionsformel) *Sei $f : V \to U$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: Ist V endlichdimensional, so gilt:* $dim(V) = dim(Bild_f) + dim(Kern_f)$.

Bemerkung. Nach Lemma 20 sind $Kern_f$ und $Bild_f$ Untervektorräumen.

Beweis. Angenommen, V hat dimension n. Dann ist Kern_f endlichdimensional, weil $\mathrm{Kern}_f \subseteq V$.
Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis von Kern_f. Nach Folgerung (c) (Basisergänzungsatz) können wir die Basis $(v_1, ..., v_k)$ bis zum einer Basis in V erganzen: es gibt $v_{k+1}, ..., v_n$ so dass $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis ist.
Wir zeigen: $(f(v_{k+1}), ..., f(v_n))$ ist eine Basis in $Bild_f$.
$f(v_{k+1}), ..., f(v_n)$ ist erzeugend: Aus Beweis von Satz 30 folgt, dass man jedes $u \in \mathrm{Bild}_f$ als eine Linearkombination von Elementen $f(v_1), ..., f(v_n)$ darstellen kann:

$$u = f(\lambda_1 v_1 + ...\lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + ... + \lambda_n f(v_n).$$

Aber $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = 0$, da $v_1, ..., v_k \in \mathrm{Kern}_f$. Dann $u = \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \lambda_{k+2} f(v_{k+2}) + ... + \lambda_n f(v_n)$. Also ist $\mathrm{span}(\{f(v_{k+1}), ...f(v_n)\}) = \mathrm{Bild}_f$.

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.
Angenommen die Linearkombination
$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$.

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.
Angenommen die Linearkombination
$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. Z.z.:
$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.
Angenommen die Linearkombination
$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. Z.z.:
$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Wir haben:

$$\underbrace{1\vec{0} + 1\vec{0} + ... + 1\vec{0}}_{k \text{ mal}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.
Angenommen die Linearkombination
$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. Z.z.:
$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Wir haben:

$$\underbrace{1\vec{0} + 1\vec{0} + ... + 1\vec{0}}_{k \text{ mal}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Da $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = \vec{0}$,

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.
Angenommen die Linearkombination
$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. Z.z.:
$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Wir haben:

$$\underbrace{1\vec{0} + 1\vec{0} + ... + 1\vec{0}}_{k \text{ mal}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Da $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = \vec{0}$,

$$1 f(v_1) + 1 f(v_2) + ... + 1 f(v_k) + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.
Angenommen die Linearkombination
$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. Z.z.:
$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Wir haben:

$$\underbrace{\color{red}{1\vec{0}} + \color{green}{1\vec{0}} + ... + \color{blue}{1\vec{0}}}_{k \text{ mal}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Da $\color{red}{f(v_1)} = \color{green}{f(v_2)} = ... = \color{blue}{f(v_k)} = \vec{0}$,

$$\color{red}{1f(v_1)} + \color{green}{1f(v_2)} + ... + \color{blue}{1f(v_k)} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Weil f linear ist,

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.
Angenommen die Linearkombination
$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. Z.z.:
$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Wir haben:

$$\underbrace{1\vec{0} + 1\vec{0} + ... + 1\vec{0}}_{k \text{ mal}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Da $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = \vec{0}$,

$$1f(v_1) + 1f(v_2) + ... + 1f(v_k) + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Weil f linear ist,

$$f(1v_1 + 1v_2 + ... + 1v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n) = \vec{0}.$$

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.
Angenommen die Linearkombination
$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. Z.z.:
$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Wir haben:

$$\underbrace{1\vec{0} + 1\vec{0} + ... + 1\vec{0}}_{k \text{ mal}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Da $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = \vec{0}$,

$$1f(v_1) + 1f(v_2) + ... + 1f(v_k) + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Weil f linear ist,

$$f(1v_1 + 1v_2 + ... + 1v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n) = \vec{0}.$$

Also,

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.
Angenommen die Linearkombination
$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. Z.z.:
$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Wir haben:

$$\underbrace{1\vec{0} + 1\vec{0} + ... + 1\vec{0}}_{k \text{ mal}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Da $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = \vec{0}$,

$$1f(v_1) + 1f(v_2) + ... + 1f(v_k) + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Weil f linear ist,

$$f(1v_1 + 1v_2 + ... + 1v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n) = \vec{0}.$$

Also, $1v_1 + 1v_2 + ... + 1v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n \in \mathrm{Kern}_f$.

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.
Angenommen die Linearkombination
$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. Z.z.:
$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Wir haben:

$$\underbrace{1\vec{0} + 1\vec{0} + ... + 1\vec{0}}_{k \text{ mal}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Da $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = \vec{0}$,

$$1f(v_1) + 1f(v_2) + ... + 1f(v_k) + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Weil f linear ist,

$$f(1v_1 + 1v_2 + ... + 1v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n) = \vec{0}.$$

Also, $1v_1 + 1v_2 + ... + 1v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n \in \mathrm{Kern}_f$. Dann ist er die Linarkombination von Elementen $v_1, ..., v_n$

Wir zeigen: $\{f(v_{k+1}), ..., f(v_n)\}$ ist linear unabhängig.
Angenommen die Linearkombination
$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}$. Z.z.:
$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$.
Wir haben:

$$\underbrace{1\vec{0} + 1\vec{0} + ... + 1\vec{0}}_{k \text{ mal}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Da $f(v_1) = f(v_2) = ... = f(v_k) = \vec{0}$,

$$1f(v_1) + 1f(v_2) + ... + 1f(v_k) + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = \vec{0}.$$

Weil f linear ist,

$$f(1v_1 + 1v_2 + ... + 1v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n) = \vec{0}.$$

Also, $1v_1 + 1v_2 + ... + 1v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n \in \mathrm{Kern}_f$. Dann ist er die Linarkombination von Elementen $v_1, ..., v_n$ und deswegen (Satz 25: eindeutigkeit) $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = ... = \lambda_n = 0$. $\square$

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung.

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis.

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\dim(V) \quad = \quad \dim(\mathrm{Bild}_f) \quad + \quad \dim(\mathrm{Kern}_f)$$

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & & & \end{array}$$

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \end{array}$$

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive).

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv,

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$.

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Dann ist $dim(Bild_f) = n$

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Dann ist $dim(Bild_f) = n$ folglich $dim(Kern_f) = 0$.

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Dann ist $dim(Bild_f) = n$ folglich $dim(Kern_f) = 0$. Dann ist $Kern_f = \{0\}$.

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Dann ist $dim(Bild_f) = n$ folglich $dim(Kern_f) = 0$. Dann ist $Kern_f = \{0\}$. Nach Lemma 19c ist f injektiv.

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Dann ist $dim(Bild_f) = n$ folglich $dim(Kern_f) = 0$. Dann ist $Kern_f = \{0\}$. Nach Lemma 19c ist f injektiv.

Beweis (surjektive) $\Longleftarrow$ (injektive).

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Dann ist $dim(Bild_f) = n$ folglich $dim(Kern_f) = 0$. Dann ist $Kern_f{=}\{0\}$. Nach Lemma 19c ist f injektiv.

Beweis (surjektive) $\Longleftarrow$ (injektive). Ist f injektiv,

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Dann ist $dim(Bild_f) = n$ folglich $dim(Kern_f) = 0$. Dann ist $Kern_f = \{0\}$. Nach Lemma 19c ist f injektiv.

Beweis (surjektive) $\Longleftarrow$ (injektive). Ist f injektiv, so ist $Kern_f \overset{\text{Lemma 19c}}{=} \{\vec{0}\}$.

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Dann ist $dim(Bild_f) = n$ folglich $dim(Kern_f) = 0$. Dann ist $Kern_f = \{0\}$. Nach Lemma 19c ist f injektiv.

Beweis (surjektive) $\Longleftarrow$ (injektive). Ist f injektiv, so ist $Kern_f \overset{\text{Lemma 19c}}{=} \{\vec{0}\}$. Dann ist $dim(Kern_f) = 0$

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Dann ist $dim(Bild_f) = n$ folglich $dim(Kern_f) = 0$. Dann ist $Kern_f = \{0\}$. Nach Lemma 19c ist f injektiv.

Beweis (surjektive) $\Longleftarrow$ (injektive). Ist f injektiv, so ist $Kern_f \overset{\text{Lemma 19c}}{=} \{\vec{0}\}$. Dann ist $dim(Kern_f) = 0$ folglich $dim(Bild_f) = n$.

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array} .$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Dann ist $dim(Bild_f) = n$ folglich $dim(Kern_f) = 0$. Dann ist $Kern_f = \{0\}$. Nach Lemma 19c ist f injektiv.

Beweis (surjektive) $\Longleftarrow$ (injektive). Ist f injektiv, so ist $Kern_f \overset{\text{Lemma 19c}}{=} \{\vec{0}\}$. Dann ist $dim(Kern_f) = 0$ folglich $dim(Bild_f) = n$. Dann ist $Bild_f \overset{\text{Folg. (c) Basisergänzungssatz}}{=} V$,

Wicht. Anwendung Erste Dimensionsformel für Endomorphismen

Def. 29 — Wied: Endomorphismus $=$ lineare Abbildung $f : V \to V$ von $\mathbb{K}-$Vektorraum V auf sich selbst.

Folgerung. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann gilt:

$$f \text{ ist surjektiv} \iff f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis. Nach 1. Dimensionsformel (Satz 31) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} \dim(V) & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & \dim(\mathrm{Kern}_f) \\ n & = & \dim(\mathrm{Bild}_f) & + & ? \end{array}.$$

Beweis (surjektive) $\Longrightarrow$ (injektive). Ist f surjektiv, so ist $Bild_f = V$. Dann ist $dim(Bild_f) = n$ folglich $dim(Kern_f) = 0$. Dann ist $Kern_f = \{0\}$. Nach Lemma 19c ist f injektiv.

Beweis (surjektive) $\Longleftarrow$ (injektive). Ist f injektiv, so ist $Kern_f \overset{\text{Lemma 19c}}{=} \{\vec{0}\}$. Dann ist $dim(Kern_f) = 0$ folglich $dim(Bild_f) = n$. Dann ist $Bild_f \overset{\text{Folg. (c) Basisergänzungssatz}}{=} V$, also f ist surjektiv.

Wiederholung und Plan:

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben,

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U $\mathbb{K}-$ Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U $\mathbb{K}-$ Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.
- Wir benutzen: Hauptsatz 29 der linearen Algebra:

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U $\mathbb{K}-$ Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.
- Wir benutzen: Hauptsatz 29 der linearen Algebra:
  - $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$.

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U $\mathbb{K}-$ Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.
- Wir benutzen: Hauptsatz 29 der linearen Algebra:
  - $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$.
  - Die Koordinatenabbildung $C_{B_V} : V \to \mathbb{K}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{K}^m$ sind Isomophismen, wobei B_V, B_U Basen in V bzw. U.

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U $\mathbb{K}-$ Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.
- Wir benutzen: Hauptsatz 29 der linearen Algebra:
  - $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$.
  - Die Koordinatenabbildung $C_{B_V} : V \to \mathbb{K}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{K}^m$ sind Isomophismen, wobei B_V, B_U Basen in V bzw. U.
- Strategie:

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U $\mathbb{K}-$ Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.
- Wir benutzen: Hauptsatz 29 der linearen Algebra:
  - $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$.
  - Die Koordinatenabbildung $C_{B_V} : V \to \mathbb{K}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{K}^m$ sind Isomophismen, wobei B_V, B_U Basen in V bzw. U.
- Strategie:
  - Wir beschreiben alle lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U $\mathbb{K}-$ Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.
- Wir benutzen: Hauptsatz 29 der linearen Algebra:
  - $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$.
  - Die Koordinatenabbildung $C_{B_V} : V \to \mathbb{K}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{K}^m$ sind Isomophismen, wobei B_V, B_U Basen in V bzw. U.
- Strategie:
  - Wir beschreiben alle lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$
  - Wir untersuchen, wie ändert sich die Beschreibung, wenn wir andere Basen B'_V, B'_U n V bzw. U wählen.

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U $\mathbb{K}-$ Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.
- Wir benutzen: Hauptsatz 29 der linearen Algebra:
  - $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$.
  - Die Koordinatenabbildung $C_{B_V} : V \to \mathbb{K}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{K}^m$ sind Isomophismen, wobei B_V, B_U Basen in V bzw. U.
- Strategie:
  - Wir beschreiben alle lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ (Heute, Schema:)
  - Wir untersuchen, wie ändert sich die Beschreibung, wenn wir andere Basen B'_V, B'_U n V bzw. U wählen.

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U $\mathbb{K}-$ Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.
- Wir benutzen: Hauptsatz 29 der linearen Algebra:
  - $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$.
  - Die Koordinatenabbildung $C_{B_V} : V \to \mathbb{K}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{K}^m$ sind Isomophismen, wobei B_V, B_U Basen in V bzw. U.
- Strategie:
  - Wir beschreiben alle lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ (Heute, Schema:)
    - Wir konstruieren ein Hauptbeispiel (Matrizen, nächste Folie)
  - Wir untersuchen, wie ändert sich die Beschreibung, wenn wir andere Basen B'_V, B'_U n V bzw. U wählen.

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U $\mathbb{K}-$ Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.
- Wir benutzen: Hauptsatz 29 der linearen Algebra:
  - $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$.
  - Die Koordinatenabbildung $C_{B_V} : V \to \mathbb{K}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{K}^m$ sind Isomophismen, wobei B_V, B_U Basen in V bzw. U.
- Strategie:
  - Wir beschreiben alle lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ (Heute, Schema:)
    - Wir konstruieren ein Hauptbeispiel (Matrizen, nächste Folie)
    - Wir zeigen, dass alle lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ wie in Hauptbeispiel sind.
  - Wir untersuchen, wie ändert sich die Beschreibung, wenn wir andere Basen B'_V, B'_U n V bzw. U wählen.

Wiederholung und Plan:

- Ziel: alle lineare $f : V \to U$ zu beschreiben, wobei V, U $\mathbb{K}-$ Vektorräume sind, s.d. $dim(V) = n < \infty$, $dim(U) = m < \infty$.
- Wir benutzen: Hauptsatz 29 der linearen Algebra:
  - $V \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^n$, $U \overset{\text{isomorph}}{\sim} \mathbb{K}^m$.
  - Die Koordinatenabbildung $C_{B_V} : V \to \mathbb{K}^n$, $C_{B_U} : U \to \mathbb{K}^m$ sind Isomophismen, wobei B_V, B_U Basen in V bzw. U.
- Strategie:
  - Wir beschreiben alle lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ (Heute, Schema:)
    - Wir konstruieren ein Hauptbeispiel (Matrizen, nächste Folie)
    - Wir zeigen, dass alle lineare $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ wie in Hauptbeispiel sind.
  - Wir untersuchen, wie ändert sich die Beschreibung, wenn wir andere Basen B'_V, B'_U n V bzw. U wählen.
    - Am Donnerstag

Hauptbeispiel: Matrizen als lineare Abbildungen

Definition 29 *Seien* $m, n \in \mathbb{N}$. *Eine* $(m \times n)$*- Matrix (über* $\mathbb{K}$*) ist ein rechteckiges Schema*

Hauptbeispiel: Matrizen als lineare Abbildungen

Definition 29 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$- Matrix (über $\mathbb{K}$) ist ein rechteckiges Schema*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Hauptbeispiel: Matrizen als lineare Abbildungen

Definition 29 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$- Matrix (über $\mathbb{K}$) ist ein rechteckiges Schema*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei alle $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Hauptbeispiel: Matrizen als lineare Abbildungen

Definition 29 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$- Matrix (über $\mathbb{K}$) ist ein rechteckiges Schema*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei alle $a_{ij} \in \mathbb{K}$. **Bsp:** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{smallmatrix}\right)$

Hauptbeispiel: Matrizen als lineare Abbildungen

Definition 29 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$- Matrix (über $\mathbb{K}$) ist ein rechteckiges Schema*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei alle $a_{ij} \in \mathbb{K}$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine (2×3)-Matrix,

Hauptbeispiel: Matrizen als lineare Abbildungen

Definition 29 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$- Matrix (über $\mathbb{K}$) ist ein rechteckiges Schema*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei alle $a_{ij} \in \mathbb{K}$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine (2×3)-Matrix, $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$

Hauptbeispiel: Matrizen als lineare Abbildungen

Definition 29 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$- Matrix (über $\mathbb{K}$) ist ein rechteckiges Schema*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei alle $a_{ij} \in \mathbb{K}$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine (2×3)-Matrix, $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$ ist eine (3×2)-Matrix

Hauptbeispiel: Matrizen als lineare Abbildungen

Definition 29 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$- Matrix (über $\mathbb{K}$) ist ein rechteckiges Schema*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei alle $a_{ij} \in \mathbb{K}$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine (2×3)-Matrix, $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$ ist eine (3×2)-Matrix

Bemerkung *Formal exakt ist eine $(m \times n)$-Matrix eine Abbildung $A : \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{K}$.*

Hauptbeispiel: Matrizen als lineare Abbildungen

Definition 29 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$- Matrix (über $\mathbb{K}$) ist ein rechteckiges Schema*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei alle $a_{ij} \in \mathbb{K}$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine (2×3)-Matrix, $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$ ist eine (3×2)-Matrix

Bemerkung *Formal exakt ist eine $(m \times n)$-Matrix eine Abbildung $A : \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{K}$.*

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$;$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$;$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

$$;$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor,

;

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B.

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B.

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \end{pmatrix} =$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ \end{pmatrix} =$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ \end{pmatrix} =$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} =$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}.$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right)\right) := \left(\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{array}\right)$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{array}\right) =$

$\left(\begin{array}{c} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 15 \\ 32 \end{array}\right).$

Mnemonische Regel:

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}.$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}$.

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}.$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}.$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1+4+9 \\ 4+10+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}$.

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1+4+9 \\ 4+10+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}.$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}.$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}.$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}$.

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}.$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 4 + 10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}$.

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \end{pmatrix}$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1+4+9 \\ 4+10+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}.$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \end{pmatrix}$$

Ein $(m \times n)$ $\mathbb{K}$-Matrix A definiert eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Multiplikation der Matrix mit dem Vektor, statt $f_A(v)$ schreibt man gewöhnlich Av ;

Z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1+4+9 \\ 4+10+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 32 \end{pmatrix}.$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

Mnemonische Regel: Auf dem j-tem Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Reihe der Matrix mit dem Vektor

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 4\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ -2\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{matrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \\ \\ \end{matrix} \right.$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix}$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} +$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \ldots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \ldots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ähnlich mit λv. $\square$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \ldots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \ldots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ähnlich mit λv. □

Wichtige Frage

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ähnlich mit λv. $\square$

Wichtige Frage *Wohin bildet diese Abbildung die Vektoren aus der Standard-Basis ab?*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ähnlich mit λv. □

Wichtige Frage *Wohin bildet diese Abbildung die Vektoren aus der Standard-Basis ab?*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ähnlich mit λv. $\square$

Wichtige Frage *Wohin bildet diese Abbildung die Vektoren aus der Standard-Basis ab?*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \ldots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \ldots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ähnlich mit λv. □

Wichtige Frage *Wohin bildet diese Abbildung die Vektoren aus der Standard-Basis ab?*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ähnlich mit λv. $\square$

Wichtige Frage *Wohin bildet diese Abbildung die Vektoren aus der Standard-Basis ab?*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Lemma 23 *Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung*

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{mn}(x_n + y_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \dots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ähnlich mit λv. $\square$

Wichtige Frage *Wo bildet diese Abbildung die Vektoren aus der Standard-Basis ab?*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \color{red}{a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \color{red}{a_{m2}} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\right.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & {\color{red}a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & {\color{red}a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & {\color{red}a_{m2}} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} {\color{red}a_{12}} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \color{red}{a_{12}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \color{red}{a_{m2}} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} \color{red}{a_{12}} \\ \color{red}{a_{22}} \\ \\ \\ \end{matrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$$

Ähnlich, die Matrix multipliziert mit dem i-ten Basisvektor ist gleich die i-te Spalte von der Matrix

Matrix einer linearen Abbildung

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \quad i\text{-ter Platz}$

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung.*

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, \dots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes*

$i \in \{1, \dots, n\}$

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren.*

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren. Dann für jeden Vektor $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ gilt:*

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit $e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren. Dann für jeden Vektor $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ gilt:* $f(v) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m^1 & u_m^2 & \ldots & u_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren. Dann für jeden Vektor $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ gilt:* $f(v) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m^1 & u_m^2 & \ldots & u_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, ..., e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren. Dann für jeden Vektor $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ gilt:* $f(v) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m^1 & u_m^2 & \dots & u_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren. Dann für jeden Vektor $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ gilt:* $f(v) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m^1 & u_m^2 & \ldots & u_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$.

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren. Dann für jeden Vektor $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ gilt:* $f(v) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m^1 & u_m^2 & \ldots & u_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$.

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, \dots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren. Dann für jeden Vektor*

$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *gilt:* $f(v) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m^1 & u_m^2 & \dots & u_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$

In Worten:

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren. Dann für jeden Vektor $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ gilt:* $f(v) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m^1 & u_m^2 & \ldots & u_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$

In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit

$e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren. Dann für jeden Vektor $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ gilt:* $f(v) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m^1 & u_m^2 & \ldots & u_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$.

In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix,

Matrix einer linearen Abbildung

Die Vektoren aus der Standard-Basis in $\mathbb{K}^n$ werden wir mit $e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen: $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ter Platz

Satz 32 *$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sei eine lineare Abbildung. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien $f(e_i) = u_i := \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ \vdots \\ u_i^m \end{pmatrix}$ die Bilder der Standard-Basisvektoren. Dann für jeden Vektor $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ gilt:* $f(v) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_m^1 & u_m^2 & \ldots & u_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$.

In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{\vphantom{\begin{array}{c}.\\.\\.\\.\\.\\.\\.\\.\end{array}}\right.$$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung f mit $f(e_i) = u_i$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.

Beweis:

Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung f mit $f(e_i) = u_i$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \text{Wicht. Frage.:} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung
f mit $f(e_i) = u_i$

Wicht. Frage.: Ae_i ist die $i-$te Spalte von A.

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung
f mit $f(e_i) = u_i$

Wicht. Frage.: Ae_i ist die $i-$te Spalte von A.

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung
f mit $f(e_i) = u_i$

Wicht. Frage.: Ae_i ist die $i-$te Spalte von A.

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung
f mit $f(e_i) = u_i$

Wicht. Frage.: Ae_i ist die $i-$te Spalte von A.

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \text{Wicht. Frage.: } Ae_i \text{ ist die } i-\text{te Spalte von } A. \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \text{Wicht. Frage.: } Ae_i \text{ ist die } i-\text{te Spalte von } A. \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \text{Wicht. Frage.: } Ae_i \text{ ist die } i\text{−te Spalte von } A. \\ \\ \text{Lemma 23: Multiplikation von Matrizen} \\ \text{und Vektoren ist eine lineare Abbildung} \end{array}\right.$$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung f mit $f(e_i) = u_i$

Wicht. Frage.: Ae_i ist die $i-$te Spalte von A.

Lemma 23: Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \text{Wicht. Frage.: } Ae_i \text{ ist die } i-\text{te Spalte von } A. \\ \\ \text{Lemma 23: Multiplikation von Matrizen} \\ \text{und Vektoren ist eine lineare Abbildung} \end{array} \right.$$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung f mit $f(e_i) = u_i$

Wicht. Frage.: Ae_i ist die $i-$te Spalte von A.

Lemma 23: Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung f mit $f(e_i) = u_i$

Wicht. Frage.: Ae_i ist die $i-$te Spalte von A.

Lemma 23: Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \text{Wicht. Frage.: } Ae_i \text{ ist die } i-\text{te Spalte von } A. \\ \\ \text{Lemma 23: Multiplikation von Matrizen} \\ \text{und Vektoren ist eine lineare Abbildung} \end{array}\right.$$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \text{Wicht. Frage.: } Ae_i \text{ ist die } i-\text{te Spalte von } A. \\ \\ \text{Lemma 23: Multiplikation von Matrizen} \\ \text{und Vektoren ist eine lineare Abbildung} \end{array}\right.$$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung f mit $f(e_i) = u_i$

Wicht. Frage.: Ae_i ist die $i-$te Spalte von A. $\Longrightarrow$ Satz 32

Lemma 23: Multiplikation von Matrizen und Vektoren ist eine lineare Abbildung

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \text{Wicht. Frage.: } Ae_i \text{ ist die } i-\text{te Spalte von } A. \quad \Longrightarrow \text{Satz 32} \\ \\ \text{Lemma 23: Multiplikation von Matrizen} \\ \text{und Vektoren ist eine lineare Abbildung} \end{array}\right.$$

Aufgabe: Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$),

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \text{Wicht. Frage.: } Ae_i \text{ ist die } i-\text{te Spalte von } A. \quad \Longrightarrow \text{Satz 32} \\ \\ \text{Lemma 23: Multiplikation von Matrizen} \\ \text{und Vektoren ist eine lineare Abbildung} \end{array}\right.$$

Aufgabe: Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die

die Vektoren e_1, e_2 jeweils in Vektoren

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \text{Wicht. Frage.: } Ae_i \text{ ist die } i\text{−te Spalte von } A. \\ \\ \text{Lemma 23: Multiplikation von Matrizen} \\ \text{und Vektoren ist eine lineare Abbildung} \end{array}\right. \Longrightarrow \text{Satz 32}$$

Aufgabe: Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \text{Wicht. Frage.: } Ae_i \text{ ist die } i-\text{te Spalte von } A. \quad \Longrightarrow \text{Satz 32} \\ \\ \text{Lemma 23: Multiplikation von Matrizen} \\ \text{und Vektoren ist eine lineare Abbildung} \end{array}\right.$$

Aufgabe: Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort:

Satz 32 In Worten: jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit der Matrix, deren i-te Spalte das Bild von e_i ist.
Beweis:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Satz 30: Es gibt genau eine lin. Abbildung} \\ f \text{ mit } f(e_i) = u_i \\ \\ \text{Wicht. Frage.: } Ae_i \text{ ist die } i-\text{te Spalte von } A. \\ \\ \text{Lemma 23: Multiplikation von Matrizen} \\ \text{und Vektoren ist eine lineare Abbildung} \end{array}\right. \implies \text{Satz 32}$$

Aufgabe: Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort:

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$),

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=}$$

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ähnlich,

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ähnlich, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\stackrel{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2}f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ähnlich, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ähnlich, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ähnlich, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Antwort:

Finde die Matrix der linearen Abbildung (von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$), die die Vektoren e_1, e_2, e_3 jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ überführt.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der linearen Abbildung f (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$), die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ jeweils in Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ überführt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2}f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ähnlich, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Antwort: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Finde die Matrix der Abbildung $Id : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $Id(v) = v$

Finde die Matrix der Abbildung $Id : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $Id(v) = v$ (in Standard-Basis).

Finde die Matrix der Abbildung $Id : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $Id(v) = v$ (in Standard-Basis).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Finde die Matrix der Abbildung $Id : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $Id(v) = v$ (in Standard-Basis).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Finde die Matrix der Streckung : $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $v \mapsto \alpha v$ (in Standard-Basis).

Finde die Matrix der Abbildung $Id : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $Id(v) = v$ (in Standard-Basis).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Finde die Matrix der Streckung : $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $v \mapsto \alpha v$ (in Standard-Basis).

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

Finde die Matrix der Abbildung $Id : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $Id(v) = v$ (in Standard-Basis).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Finde die Matrix der Streckung : $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $v \mapsto \alpha v$ (in Standard-Basis).

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\rightarrow U$, $g : U \rightarrow W$ lineare Abbildungen.

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

$$\left\{ \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right.$$

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

Lemma 21: Verkettung von lineären Abbildungen ist linear

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

Lemma 21: Verkettung von
linearen Abbildungen ist linear

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

Lemma 21: Verkettung von
linearen Abbildungen ist linear

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

Lemma 21: Verkettung von
linearen Abbildungen ist linear

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lemma 21: Verkettung von} \\ \text{linearen Abbildungen ist linear} \\ \\ \\ \text{Satz 32: Jede lineare Abbildung:} \\ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (m \times n) \text{ Matrix.} \end{array} \right.$$

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

Lemma 21: Verkettung von
linearen Abbildungen ist linear

Satz 32: Jede lineare Abbildung:
$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$
ist die Multiplikation
mit einer $(m \times n)$ Matrix.

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\rightarrow U$, $g : U \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \rightarrow W$ auch eine lineare Abbildung.

Lemma 21: Verkettung von
linearen Abbildungen ist linear

Satz 32: Jede lineare Abbildung:
$f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$
ist die Multiplikation
mit einer $(m \times n)$ Matrix.

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Lemma 21: Verkettung von} \\ \text{linearen Abbildungen ist linear} \\ \\ \text{Satz 32: Jede lineare Abbildung:} \\ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (m \times n) \text{ Matrix.} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\longrightarrow U$, $g : U \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \longrightarrow W$ auch eine lineare Abbildung.

Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear

Satz 32: Jede lineare Abbildung:
$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$
ist die Multiplikation
mit einer $(m \times n)$ Matrix.

$\Longrightarrow$

Die Verkettung $f_B \circ f_A$
von lin. Abbildungen
$f_B : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^k$ und $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$
ist auch die Multiplikation
mit einer $(k \times n)$-Matrix

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f : \to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lemma 21: Verkettung von} \\ \text{linearen Abbildungen ist linear} \\ \\ \text{Satz 32: Jede lineare Abbildung:} \\ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (m \times n) \text{ Matrix.} \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{r} \text{Die Verkettung } f_B \circ f_A \\ \text{von lin. Abbildungen} \\ f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k \text{ und } f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist auch die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (k \times n)\text{-Matrix} \end{array}$$

Def. 30

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\rightarrow U$, $g : U \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \rightarrow W$ auch eine lineare Abbildung.

Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear

Satz 32: Jede lineare Abbildung: $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit einer $(m \times n)$ Matrix.

$\Longrightarrow$

Die Verkettung $f_B \circ f_A$ von lin. Abbildungen $f_B : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^k$ und $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ist auch die Multiplikation mit einer $(k \times n)$-Matrix

Def. 30 *Seien* $f_B : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^k$ *und* $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Lemma 21: Verkettung von} \\ \text{linearen Abbildungen ist linear} \\ \\ \\ \text{Satz 32: Jede lineare Abbildung:} \\ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (m \times n) \text{ Matrix.} \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{r} \text{Die Verkettung } f_B \circ f_A \\ \text{von lin. Abbildungen} \\ f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k \text{ und } f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist auch die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (k \times n)\text{-Matrix} \end{array}$$

Def. 30 *Seien $f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$ und $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Multiplikationen mit*

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lemma 21: Verkettung von} \\ \text{linearen Abbildungen ist linear} \\ \\ \text{Satz 32: Jede lineare Abbildung:} \\ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (m \times n) \text{ Matrix.} \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{r} \text{Die Verkettung } f_B \circ f_A \\ \text{von lin. Abbildungen} \\ f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k \text{ und } f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist auch die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (k \times n)\text{-Matrix} \end{array}$$

Def. 30 *Seien $f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$ und $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Multiplikationen mit der $(m \times n)$-Matrix A bzw.*

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

Lemma 21: Verkettung von linearen Abbildungen ist linear

Satz 32: Jede lineare Abbildung: $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist die Multiplikation mit einer $(m \times n)$ Matrix.

$\Longrightarrow$

Die Verkettung $f_B \circ f_A$ von lin. Abbildungen $f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$ und $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist auch die Multiplikation mit einer $(k \times n)$-Matrix

Def. 30 *Seien $f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$ und $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Multiplikationen mit der $(m \times n)$-Matrix A bzw. $(k \times m)$-Matrix B:*

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Lemma 21: Verkettung von} \\ \text{linearen Abbildungen ist linear} \\ \\ \\ \text{Satz 32: Jede lineare Abbildung:} \\ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (m \times n) \text{ Matrix.} \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{r} \text{Die Verkettung } f_B \circ f_A \\ \text{von lin. Abbildungen} \\ f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k \text{ und } f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist auch die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (k \times n)\text{-Matrix} \end{array}$$

Def. 30 *Seien $f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$ und $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Multiplikationen mit der $(m \times n)$-Matrix A bzw. $(k \times m)$-Matrix B:*
$f_B(v) = Bv$, $f_A(u) = Au$.

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Lemma 21: Verkettung von}\\ \text{linearen Abbildungen ist linear}\\ \\ \text{Satz 32: Jede lineare Abbildung:}\\ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m\\ \text{ist die Multiplikation}\\ \text{mit einer } (m \times n) \text{ Matrix.}\end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{r}\text{Die Verkettung } f_B \circ f_A\\ \text{von lin. Abbildungen}\\ f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k \text{ und } f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m\\ \text{ist auch die Multiplikation}\\ \text{mit einer } (k \times n)\text{-Matrix}\end{array}$$

Def. 30 *Seien $f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$ und $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Multiplikationen mit der $(m \times n)$-Matrix A bzw. $(k \times m)$-Matrix B:*
$f_B(v) = Bv$, $f_A(u) = Au$.
Dann heißt die Matrix von $f_B \circ f_A$ das Produkt von Matrizen

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Lemma 21: Verkettung von} \\ \text{linearen Abbildungen ist linear} \\ \\ \text{Satz 32: Jede lineare Abbildung:} \\ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (m \times n) \text{ Matrix.} \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{r} \text{Die Verkettung } f_B \circ f_A \\ \text{von lin. Abbildungen} \\ f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k \text{ und } f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist auch die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (k \times n)\text{-Matrix} \end{array}$$

Def. 30 *Seien $f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$ und $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Multiplikationen mit der $(m \times n)$-Matrix A bzw. $(k \times m)$-Matrix B:*
$f_B(v) = Bv$, $f_A(u) = Au$.
Dann heißt die Matrix von $f_B \circ f_A$ das Produkt von Matrizen und wird BA bezeichnet.

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Lemma 21: Verkettung von} \\ \text{linearen Abbildungen ist linear} \\ \\ \\ \text{Satz 32: Jede lineare Abbildung:} \\ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (m \times n) \text{ Matrix.}\end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{r}\text{Die Verkettung } f_B \circ f_A \\ \text{von lin. Abbildungen} \\ f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k \text{ und } f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ \text{ist auch die Multiplikation} \\ \text{mit einer } (k \times n)\text{-Matrix}\end{array}$$

Def. 30 *Seien $f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$ und $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Multiplikationen mit der $(m \times n)$-Matrix A bzw. $(k \times m)$-Matrix B:*
$f_B(v) = Bv$, $f_A(u) = Au$.
Dann heißt die Matrix von $f_B \circ f_A$ das Produkt von Matrizen und wird BA bezeichnet. Das ist eine $(k \times n)$ Matrix.

Wiederholung: Lemma 21 Seien $f :\to U$, $g : U \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : V \to W$ auch eine lineare Abbildung.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Lemma 21: Verkettung von}\\ \text{linearen Abbildungen ist linear}\\ \\ \\ \text{Satz 32: Jede lineare Abbildung:}\\ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m\\ \text{ist die Multiplikation}\\ \text{mit einer } (m \times n) \text{ Matrix.}\end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{r}\text{Die Verkettung } f_B \circ f_A\\ \text{von lin. Abbildungen}\\ f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k \text{ und } f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m\\ \text{ist auch die Multiplikation}\\ \text{mit einer } (k \times n)\text{-Matrix}\end{array}$$

Def. 30 *Seien $f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^k$ und $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Multiplikationen mit der $(m \times n)$-Matrix A bzw. $(k \times m)$-Matrix B:*
$f_B(v) = Bv$, $f_A(u) = Au$.
Dann heißt die Matrix von $f_B \circ f_A$ das Produkt von Matrizen und wird BA bezeichnet. Das ist eine $(k \times n)$ Matrix.

Frage: *Wie kann man sie ausrechnen?*

Satz 33 (Rechenregel für das Produkt von Matrizen *Seien $f_A : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^m$, $f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ Multiplikationen mit Matrizen*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Matrix der $f_A \circ f_B$ gleich

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{in} \\ \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{in} \end{pmatrix}$$

Satz 33 (Rechenregel für das Produkt von Matrizen *Seien* $f_A : \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^m$, $f_B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ *Multiplikationen mit Matrizen*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Matrix der $f_A \circ f_B$ *gleich*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{1i} b_{in} \\ \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{2i} b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^m a_{ki} b_{in} \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B:

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \color{red}{5} & 7 \\ \color{red}{6} & 6 \\ \color{red}{7} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7} & \\ & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & \\ & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & \\ & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & \\ & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{3} & \color{red}{2} & \color{red}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{3} & \color{red}{2} & \color{red}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{3} & \color{red}{2} & \color{red}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & \color{red}{7} \\ 6 & \color{red}{6} \\ 7 & \color{red}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 7+2\cdot 6+3\cdot 5 \\ 3\cdot 5+2\cdot 6+1\cdot 7 & 3\cdot 7+2\cdot 6+1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32:

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32:

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32:

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \text{ ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \text{ ist das Bild } f_B(e_r) \end{array} \right.$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren: auf der j-Zeile des Bildes $f_A(f_B(e_r)))$

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B
ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:
auf der j-Zeile des Bildes $f_A(f_B(e_r)))$

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B
ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:
auf der j-Zeile des Bildes $f_A(f_B(e_r)))$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 7+2\cdot 6+3\cdot 5 \\ 3\cdot 5+2\cdot 6+1\cdot 7 & 3\cdot 7+2\cdot 6+1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren: auf der j-Zeile des Bildes $f_A(f_B(e_r)))$ Steht das Skalarprodukt

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B
ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:
auf der j-Zeile des Bildes $f_A(f_B(e_r)))$
Steht das Skalarprodukt

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 7+2\cdot 6+3\cdot 5 \\ 3\cdot 5+2\cdot 6+1\cdot 7 & 3\cdot 7+2\cdot 6+1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{\begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \end{array}\right.$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 7+2\cdot 6+3\cdot 5 \\ 3\cdot 5+2\cdot 6+1\cdot 7 & 3\cdot 7+2\cdot 6+1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B
ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:
auf der j-Zeile des Bildes $f_A(f_B(e_r)))$
Steht das Skalarprodukt
der j-ten Zeile der Matrix A

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 7+2\cdot 6+3\cdot 5 \\ 3\cdot 5+2\cdot 6+1\cdot 7 & 3\cdot 7+2\cdot 6+1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren: auf der j-Zeile des Bildes $f_A(f_B(e_r)))$ Steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B
ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:
auf der j-Zeile des Bildes $f_A(f_B(e_r)))$
Steht das Skalarprodukt
der j-ten Zeile der Matrix A

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren: auf der j-Zeile des Bildes $f_A(f_B(e_r)))$ Steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit dem Vektor $f_B(e_r)$

$\Longrightarrow$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{\begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{\begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{\begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array}\right. \Longrightarrow \quad \text{Auf dem } (j,r)\text{-ten Platz}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B
ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:
auf der j-Zeile des Bildes $f_A(f_B(e_r)))$
Steht das Skalarprodukt
der j-ten Zeile der Matrix A
mit dem Vektor $f_B(e_r)$

$\Longrightarrow$

Auf dem (j, r)-ten Platz

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 7+2\cdot 6+3\cdot 5 \\ 3\cdot 5+2\cdot 6+1\cdot 7 & 3\cdot 7+2\cdot 6+1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{\begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array}\right. \Longrightarrow \quad \text{Auf dem } (j, r)\text{-ten Platz}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 7+2\cdot 6+3\cdot 5 \\ 3\cdot 5+2\cdot 6+1\cdot 7 & 3\cdot 7+2\cdot 6+1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Auf dem (j,r)-ten Platz

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\[1em] \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\[1em] \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{r} \text{Auf dem } (j, r)\text{-ten Platz} \\ \text{des Produkts } AB \end{array}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array} \right. \Longrightarrow \quad \begin{array}{r} \text{Auf dem } (j, r)\text{-ten Platz} \\ \text{des Produkts } AB \end{array}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B
ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:
auf der j-Zeile des Bildes $f_A(f_B(e_r)))$
Steht das Skalarprodukt
der j-ten Zeile der Matrix A
mit dem Vektor $f_B(e_r)$

$\Longrightarrow$

Auf dem (j, r)-ten Platz
des Produkts AB

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{\begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{Auf dem } (j, r)\text{-ten Platz} \\ \text{des Produkts } AB \end{array}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

Satz 32: r-te Spalte der Matrix AB
ist das Bild $f_A \circ f_B(e_r)$

Satz 32: r-te Spalte der Matrix B
ist das Bild $f_B(e_r)$

Rechenregel für Matr. mal Vektoren:
auf der j-Zeile des Bildes $f_A(f_B(e_r)))$
Steht das Skalarprodukt
der j-ten Zeile der Matrix A
mit dem Vektor $f_B(e_r)$

$\Longrightarrow$

Auf dem (j,r)-ten Platz
des Produkts AB

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{Auf dem } (j, r)\text{-ten Platz} \\ \text{des Produkts } AB \\ \text{steht das Skalarprodukt} \end{array}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{\begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{r} \text{Auf dem } (j, r)\text{-ten Platz} \\ \text{des Produkts } AB \\ \text{steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit der } r\text{-ten Spalte der Matrix } B \end{array}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{\begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren:} \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{r} \text{Auf dem } (j,r)\text{-ten Platz} \\ \text{des Produkts } AB \\ \text{steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit der } r\text{-ten Spalte der Matrix } B \end{array}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{\begin{array}{l}
\textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\
\text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\[1em]
\textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\
\text{ist das Bild } f_B(e_r) \\[1em]
\textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\
\text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\
\text{Steht das Skalarprodukt} \\
\text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\
\text{mit dem Vektor } f_B(e_r)
\end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{r}
\text{Auf dem } (j, r)\text{-ten Platz} \\
\text{des Produkts } AB \\
\text{steht das Skalarprodukt} \\
\text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\
\text{mit der } r\text{-ten Spalte der Matrix } B
\end{array}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{r} \text{Auf dem } (j, r)\text{-ten Platz} \\ \text{des Produkts } AB \\ \text{steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit der } r\text{-ten Spalte der Matrix } B \end{array}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j,r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 7 & 1\cdot 7+2\cdot 6+3\cdot 5 \\ 3\cdot 5+2\cdot 6+1\cdot 7 & 3\cdot 7+2\cdot 6+1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{r} \text{Auf dem } (j,r)\text{-ten Platz} \\ \text{des Produkts } AB \\ \text{steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit der } r\text{-ten Spalte der Matrix } B \end{array}$$

Mnemonische Regel: Auf dem (j, r)-ten Platz des Produkts AB steht das Skalarprodukt der j-ten Zeile der Matrix A mit der r-ten Spalte der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 7 + 2\cdot 6 + 1\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 34 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}.$$

Beweis des Satzes 33:

$$\left.\begin{cases} \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } AB \\ \text{ist das Bild } f_A \circ f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Satz 32: } r\text{-te Spalte der Matrix } B \\ \text{ist das Bild } f_B(e_r) \\ \\ \textbf{Rechenregel für Matr. mal Vektoren}: \\ \text{auf der } j\text{-Zeile des Bildes } f_A(f_B(e_r))) \\ \text{Steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit dem Vektor } f_B(e_r) \end{cases}\right. \Longrightarrow \begin{array}{r} \text{Auf dem } (j,r)\text{-ten Platz} \\ \text{des Produkts } AB \\ \text{steht das Skalarprodukt} \\ \text{der } j\text{-ten Zeile der Matrix } A \\ \text{mit der } r\text{-ten Spalte der Matrix } B \end{array} \qquad \square$$

Folgerung *Multiplikation von Matrizen ist assoziativ:*
$(AB)C = A(BC)$

Folgerung *Multiplikation von Matrizen ist assoziativ:* $(AB)C = A(BC)$ *(falls definiert).*

Folgerung *Multiplikation von Matrizen ist assoziativ:*
$(AB)C = A(BC)$ *(falls definiert).*
Beweis: Nach Lemma 1 ist Verkettung von Abbildungen assoziativ.

Summe von Matrizen

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$.

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$,

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$.

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.
Definition 31

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen*

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird $A + B$ bezeichnen.*

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird $A + B$ bezeichnen.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} +$$

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird $A + B$ bezeichnen.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird $A + B$ bezeichnen.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird $A + B$ bezeichnen.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich,

i-te Spalte von $A + B$

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird $A + B$ bezeichnen.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich,

i-te Spalte von $A + B \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} (A + B)(e_i)$

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird $A + B$ bezeichnen.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich,

i-te Spalte von $A + B \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} (A + B)(e_i)$

$\overset{\text{Def. 31}}{=}$

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.
Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird $A + B$ bezeichnen.*
Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich,

$$i\text{-te Spalte von } A + B \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} (A + B)(e_i)$$

$$\overset{\text{Def. 31}}{=} Ae_i + Be_i$$

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird $A + B$ bezeichnen.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich,

$$i\text{-te Spalte von } A + B \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} (A + B)(e_i)$$

$$\overset{\text{Def. 31}}{=} Ae_i + Be_i \overset{\text{Wicht. Frage}}{=}$$

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird $A + B$ bezeichnen.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich,

$$i\text{-te Spalte von } A + B \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} (A + B)(e_i)$$
$$\overset{\text{Def. 31}}{=} Ae_i + Be_i \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} i\text{-te Spalte von } A +$$

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird $A + B$ bezeichnen.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich,

$$i\text{-te Spalte von } A + B \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} (A + B)(e_i) \overset{\text{Def. 31}}{=} Ae_i + Be_i \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} i\text{-te Spalte von } A + i\text{-te Spalte von } B$$

Summe von Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ Matrizen über $\mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := Av + Bv$. Die Abbildung ist linear.

Definition 31 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt die Summe von Matrizen und wird $A + B$ bezeichnen.*

Rechenregel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Tatsächlich,

$$i\text{-te Spalte von } A + B \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} (A + B)(e_i)$$
$$\overset{\text{Def. 31}}{=} Ae_i + Be_i \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} i\text{-te Spalte von } A + i\text{-te Spalte von } B \qquad \square$$

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$,

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$,

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := \lambda(Av)$. Die Abbildung ist linear.

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := \lambda(Av)$. Die Abbildung ist linear.

Definition 32

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := \lambda(Av)$. Die Abbildung ist linear.

Definition 32 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt das λ-facher von A und wird mit λA bezeichnen.*

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := \lambda(Av)$. Die Abbildung ist linear.

Definition 32 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt das λ-facher von A und wird mit λA bezeichnen.*

Rechenregel: $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := \lambda(Av)$. Die Abbildung ist linear.

Definition 32 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt das λ-facher von A und wird mit λA bezeichnen.*

Rechenregel: $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Tatsächlich,

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := \lambda(Av)$. Die Abbildung ist linear.

Definition 32 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt das λ-facher von A und wird mit λA bezeichnen.*

Rechenregel: $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Tatsächlich,

$i\text{-te Spalte von } \lambda A \overset{\text{Wicht. Frage}}{=}$

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := \lambda(Av)$. Die Abbildung ist linear.

Definition 32 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt das λ-facher von A und wird mit λA bezeichnen.*

Rechenregel: $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Tatsächlich,

$i\text{-te Spalte von } \lambda A \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} \lambda(A(e_i))$

$\overset{\text{Def. 32}}{=}$

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := \lambda(Av)$. Die Abbildung ist linear.

Definition 32 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt das λ-facher von A und wird mit λA bezeichnen.*

Rechenregel: $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Tatsächlich,

i-te Spalte von $\lambda A \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} \lambda(A(e_i))$
$\overset{\text{Def. 32}}{=} \lambda A e_i \overset{\text{Wicht. Frage}}{=}$

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := \lambda(Av)$. Die Abbildung ist linear.

Definition 32 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt das λ-facher von A und wird mit λA bezeichnen.*

Rechenregel: $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Tatsächlich,

i-te Spalte von $\lambda A \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} \lambda(A(e_i))$
$\overset{\text{Def. 32}}{=} \lambda A e_i \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} \lambda$-Vielfacher der i-ten Spalte von A.

Multiplikation von Matrizen mit der Zahlen

Sei A eine $(m \times n)$ Matrix über $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f(v) := \lambda(Av)$. Die Abbildung ist linear.

Definition 32 *Die Matrix dieser Abbildung f heißt das λ-facher von A und wird mit λA bezeichnen.*

Rechenregel: $\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Tatsächlich,

i-te Spalte von $\lambda A \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} \lambda(A(e_i))$
$\overset{\text{Def. 32}}{=} \lambda A e_i \overset{\text{Wicht. Frage}}{=} \lambda$-Vielfacher der i-ten Spalte von A.

Bemerkung *Die Multiplikation mit λ liefert dasselbe Ergebnis wie die Multiplikation von links mit der $(m \times m)$ Matrix*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Vektorraum von Matrizen

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*
Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*

Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren*

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*
Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*

Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*

Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*

Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der $(m \times n)$ Matrizen (über $\mathbb{K}$) werden wir mit $Mat(m, n, \mathbb{K})$ bezeichnen.*

Aussage *$Mat(m, n, \mathbb{K})$mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $m \times n$.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*

Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*

Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$ dieselben wie in $\mathbb{K}^{nm}$

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*
Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$ dieselben wie in $\mathbb{K}^{nm}$

Standard-Basis

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*

Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$ dieselben wie in $\mathbb{K}^{nm}$

Standard-Basis in $Mat(m, n)$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist,

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der $(m \times n)$ Matrizen (über $\mathbb{K}$) werden wir mit $Mat(m, n, \mathbb{K})$ bezeichnen.*
Aussage *$Mat(m, n, \mathbb{K})$mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $m \times n$.*
Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$ dieselben wie in $\mathbb{K}^{nm}$

Standard-Basis in $Mat(m, n)$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der $(m \times n)$ Matrizen (über $\mathbb{K}$) werden wir mit $Mat(m, n, \mathbb{K})$ bezeichnen.*

Aussage *$Mat(m, n, \mathbb{K})$mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $m \times n$.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$ dieselben wie in $\mathbb{K}^{nm}$

Standard-Basis in $Mat(m, n)$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.

Bsp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*

Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$ dieselben wie in $\mathbb{K}^{nm}$

Standard-Basis in $Mat(m, n)$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.

Bsp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{12}$

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*

Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$ dieselben wie in $\mathbb{K}^{nm}$

Standard-Basis in $Mat(m, n)$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.

Bsp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{12} \in Mat(2, 3)$,

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*

Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$ dieselben wie in $\mathbb{K}^{nm}$

Standard-Basis in $Mat(m, n)$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.

Bsp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{12} \in Mat(2, 3)$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*
Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$ dieselben wie in $\mathbb{K}^{nm}$

Standard-Basis in $Mat(m, n)$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.
Bsp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{12} \in Mat(2, 3)$,
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B_{31}$

Vektorraum von Matrizen

Bezeichnung *Die Menge der* $(m \times n)$ *Matrizen (über* $\mathbb{K}$*) werden wir mit* $Mat(m, n, \mathbb{K})$ *bezeichnen.*

Aussage $Mat(m, n, \mathbb{K})$*mit eben definierter Addition und Multiplikation mit Skalaren ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum der Dimension* $m \times n$*.*

Tatsächlich, wir können eine Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit dem folgenden Element aus $\mathbb{K}^{nm}$ identifizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

und dann sind die Operationen in $Mat(m, n)$ dieselben wie in $\mathbb{K}^{nm}$

Standard-Basis in $Mat(m, n)$: Die Matrizen B_{ij}, deren (i, j)-Element gleich 1 ist, und die anderen sind gleich 0.

Bsp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{12} \in Mat(2, 3)$,

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B_{31} \in Mat(3, 2)$.

Quadratische Matrizen

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische.

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* B *heißt*

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine* $(n \times n)$ *Matrix* B *heißt die inverse Matrix zur*

$(n \times n)$*-Matrix* A*,*

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur*

$(n \times n)$-Matrix A, falls $BA = Id :=$

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.

Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.

Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Nein!

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.

Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.

Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Nein! Die 0-Matrix

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Nein! Die 0-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Nein! Die 0-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ hat keine inverse Matrix.

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.

Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.

Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Nein! Die 0-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ hat keine inverse Matrix.

Satz 34

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Nein! Die 0-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ hat keine inverse Matrix.

Satz 34 *Sei A eine $(n \times n)$ - Matrix.*

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Nein! Die 0-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ hat keine inverse Matrix.

Satz 34 *Sei A eine $(n \times n)$ - Matrix. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Nein! Die 0-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ hat keine inverse Matrix.

Satz 34 *Sei A eine $(n \times n)$ - Matrix. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A hat eine inverse Matrix.*

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Nein! Die 0-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ hat keine inverse Matrix.

Satz 34 *Sei A eine $(n \times n)$ - Matrix. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A hat eine inverse Matrix.*

(b) *Die Multiplikation mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.*

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Nein! Die 0-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ hat keine inverse Matrix.

Satz 34 *Sei A eine $(n \times n)$ - Matrix. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A hat eine inverse Matrix.*

(b) *Die Multiplikation mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.*

(c) *Die Spalten von A sind linear unabhängig.*

Quadratische Matrizen

$(n \times n)$-Matrizen heißen quadratische. Die entsprechende lineare Abbildungen sind laut Definition 29 Endomorphismen der $\mathbb{K}^n$.
Das Produkt von $(n \times n)$- Matrizen ist auch eine $(n \times n)$- Matrix.
Definition 33 *Eine $(n \times n)$ Matrix B heißt die inverse Matrix zur $(n \times n)$-Matrix A, falls* $BA = Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Frage *Hat jede $(n \times n)$ Matrix eine inverse?*

Nein! Die 0-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ hat keine inverse Matrix.

Satz 34 *Sei A eine $(n \times n)$ - Matrix. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A hat eine inverse Matrix.*

(b) *Die Multiplikation mit der Matrix A ist ein Isomorphismus.*

(c) *Die Spalten von A sind linear unabhängig.*

Wied. — Folgerung aus 1. Dimensionsformel Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Wied. — Folgerung aus 1. Dimensionsformel Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis

Wied. — Folgerung aus 1. Dimensionsformel Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b).

Wied. — Folgerung aus 1. Dimensionsformel Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b).
Angennomen es gibt B mit $BA = Id$.

Wied. — Folgerung aus 1. Dimensionsformel Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b).
Angennomen es gibt B mit $BA = Id$. Z.z.: f_A injektiv

Wied. — Folgerung aus 1. Dimensionsformel Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis (a) $\implies$ (b).
Angennomen es gibt B mit $BA = Id$. Z.z.: f_A injektiv (nach Folgerung oben auch surjektiv, also bijektiv)

Wied. — Folgerung aus 1. Dimensionsformel Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv } \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b).
Angennomen es gibt B mit $BA = Id$. Z.z.: f_A injektiv (nach Folgerung oben auch surjektiv, also bijektiv)
Sei $Av_1 = Av_2$. Z.z.: $v_1 = v_2$.

Wied. — Folgerung aus 1. Dimensionsformel Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b).
Angennomen es gibt B mit $BA = Id$. Z.z.: f_A injektiv (nach Folgerung oben auch surjektiv, also bijektiv)
Sei $Av_1 = Av_2$. Z.z.: $v_1 = v_2$. Muptiplizeiren mit B:

Wied. — Folgerung aus 1. Dimensionsformel Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b).
Angennomen es gibt B mit $BA = Id$. Z.z.: f_A injektiv (nach Folgerung oben auch surjektiv, also bijektiv)
Sei $Av_1 = Av_2$. Z.z.: $v_1 = v_2$. Muptiplizeiren mit B:
$BAv_1 = BAv_2$.

Wied. — Folgerung aus 1. Dimensionsformel Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b).
Angennomen es gibt B mit $BA = Id$. Z.z.: f_A injektiv (nach Folgerung oben auch surjektiv, also bijektiv)
Sei $Av_1 = Av_2$. Z.z.: $v_1 = v_2$. Muptiplizeiren mit B:
$BAv_1 = BAv_2$. Da $BA = Id$ und

Wied. — Folgerung aus 1. Dimensionsformel Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis (a) $\implies$ (b).
Angennomen es gibt B mit $BA = Id$. Z.z.: f_A injektiv (nach Folgerung oben auch surjektiv, also bijektiv)
Sei $Av_1 = Av_2$. Z.z.: $v_1 = v_2$. Muptiplizeiren mit B:
$BAv_1 = BAv_2$. Da $BA = Id$ und $Id\, v = v$, gilt $v_1 = v_2$.

Wied. — Folgerung aus 1. Dimensionsformel Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$. Dann gilt:

$$f \text{ ist injektiv} \iff f \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis (a) $\Longrightarrow$ (b).
Angennomen es gibt B mit $BA = Id$. Z.z.: f_A injektiv (nach Folgerung oben auch surjektiv, also bijektiv)
Sei $Av_1 = Av_2$. Z.z.: $v_1 = v_2$. Muptiplizeiren mit B: $BAv_1 = BAv_2$. Da $BA = Id$ und $Id\, v = v$, gilt $v_1 = v_2$. Also, f_A ist injektiv.

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c).

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus.

Beweis (b) $\implies$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A,

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also

$$\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$$

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also
$\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n$$

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also $\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also
$\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist,

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also $\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also
$\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt
$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\square$

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also
$\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt
$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ □

(c) $\Longrightarrow$ (a).

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also
$\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt
$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\square$

(c) $\Longrightarrow$ (a). Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Betrachte die lineare Abbildung f, die

$u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,..., $u_n \mapsto e_n$

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.

Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also $\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\square$

(c) $\Longrightarrow$ (a). Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Betrachte die lineare Abbildung f, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,..., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Satz 30).

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also $\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\square$

(c) $\Longrightarrow$ (a). Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Betrachte die lineare Abbildung f, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,..., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Satz 30). Wir zeigen:
$f \circ f_A = Id$.

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also $\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ □

(c) $\Longrightarrow$ (a). Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Betrachte die lineare Abbildung f, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,..., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Satz 30). Wir zeigen: $f \circ f_A = Id$. Tatsächlich,

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, \ldots, u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also $\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \ldots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \ldots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\square$

(c) $\Longrightarrow$ (a). Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, \ldots, u_n$. Sei $\{u_1, \ldots, u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Betrachte die lineare Abbildung f, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,..., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Satz 30). Wir zeigen: $f \circ f_A = Id$. Tatsächlich, $e_i \overset{f_A}{\mapsto} u_i \overset{f}{\mapsto} e_i$.

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also
$\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt
$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\square$

(c) $\Longrightarrow$ (a). Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Betrachte die lineare Abbildung f, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,..., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Satz 30). Wir zeigen: $f \circ f_A = Id$. Tatsächlich, $e_i \overset{f_A}{\mapsto} u_i \overset{f}{\mapsto} e_i$. Also, $f \circ f_A(e_i) = e_i$

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also $\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\square$

(c) $\Longrightarrow$ (a). Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Betrachte die lineare Abbildung f, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,..., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Satz 30). Wir zeigen: $f \circ f_A = Id$. Tatsächlich, $e_i \overset{f_A}{\mapsto} u_i \overset{f}{\mapsto} e_i$. Also, $f \circ f_A(e_i) = e_i = Id(e_i)$.

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also $\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\square$

(c) $\Longrightarrow$ (a). Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Betrachte die lineare Abbildung f, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,...., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Satz 30). Wir zeigen: $f \circ f_A = Id$. Tatsächlich, $e_i \overset{f_A}{\mapsto} u_i \overset{f}{\mapsto} e_i$. Also, $f \circ f_A(e_i) = e_i = Id(e_i)$. Aber es gibt genau eine Abbildung (Satz 30),

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also $\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ □

(c) $\Longrightarrow$ (a). Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Betrachte die lineare Abbildung f, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,..., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Satz 30). Wir zeigen: $f \circ f_A = Id$. Tatsächlich, $e_i \overset{f_A}{\mapsto} u_i \overset{f}{\mapsto} e_i$. Also, $f \circ f_A(e_i) = e_i = Id(e_i)$. Aber es gibt genau eine Abbildung (Satz 30), die jedes e_i auf e_i abbildet.

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also $\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\square$

(c) $\Longrightarrow$ (a). Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Betrachte die lineare Abbildung f, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,..., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Satz 30). Wir zeigen: $f \circ f_A = Id$. Tatsächlich, $e_i \overset{f_A}{\mapsto} u_i \overset{f}{\mapsto} e_i$. Also, $f \circ f_A(e_i) = e_i = Id(e_i)$. Aber es gibt genau eine Abbildung (Satz 30), die jedes e_i auf e_i abbildet. Also, $f \circ f_A = Id$.

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.
Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also $\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ □

(c) $\Longrightarrow$ (a). Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Betrachte die lineare Abbildung f, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,..., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Satz 30). Wir zeigen: $f \circ f_A = Id$. Tatsächlich, $e_i \overset{f_A}{\mapsto} u_i \overset{f}{\mapsto} e_i$. Also, $f \circ f_A(e_i) = e_i = Id(e_i)$. Aber es gibt genau eine Abbildung (Satz 30), die jedes e_i auf e_i abbildet. Also, $f \circ f_A = Id$. Sei B die Matrix von f.

Beweis (b) $\Longrightarrow$ (c). Angenommen, f_A ist ein Isomorphismus. Z.z.: Die Spalten von A sind linear unabhängig.

Die Vektoren $u_1, ..., u_n$ seien die Spalten von A, die Matrix sei also $\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix}$ Dann ist die Linearkombination

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Da f_A ein Isomorphismus ist, ist $Kern_{f_A} = \{\vec{0}\}$. Dann aus $(*)$ folgt $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ □

(c) $\Longrightarrow$ (a). Die Spalten von A bezeichnen wir mit $u_1, ..., u_n$. Sei $\{u_1, ..., u_n\}$ linear unabhängig. Dann ist $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis (Folgerung (a) aus dem Austauschsatz). Betrachte die lineare Abbildung f, die $u_1 \mapsto e_1$, $u_2 \mapsto e_2$,..., $u_n \mapsto e_n$ (Existenz: Satz 30). Wir zeigen: $f \circ f_A = Id$. Tatsächlich, $e_i \overset{f_A}{\mapsto} u_i \overset{f}{\mapsto} e_i$. Also, $f \circ f_A(e_i) = e_i = Id(e_i)$. Aber es gibt genau eine Abbildung (Satz 30), die jedes e_i auf e_i abbildet. Also, $f \circ f_A = Id$. Sei B die Matrix von f. Dann ist $BA = Id$. □