Wir haben die Klausur korriegiert:

Wir haben die Klausur korriegiert:

- Sie bekommen die Klausur von Übungsleitern zurück.

Wir haben die Klausur korriegiert:

- Sie bekommen die Klausur von Übungsleitern zurück.
- Die Gesamtpunktzahl wird bald in CAJ eingetragen

Wir haben die Klausur korriegiert:

- Sie bekommen die Klausur von Übungsleitern zurück.
- Die Gesamtpunktzahl wird bald in CAJ eingetragen
- Die Musterlösungen sind werden bald von CAJ abrufbar.

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Aufgabe 4: Homomorphismen

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Aufgabe 4: Homomorphismen „Verständnisaufgabe“

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Aufgabe 4: Homomorphismen „Verständnisaufgabe“
21 % von Punkten

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Aufgabe 4: Homomorphismen „Verständnisaufgabe“
21 % von Punkten

Aufgabe 5: Teilbarkeitsregel für 37

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Aufgabe 4: Homomorphismen „Verständnisaufgabe“
21 % von Punkten

Aufgabe 5: Teilbarkeitsregel für 37 (Vorl. 8)

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Aufgabe 4: Homomorphismen „Verständnisaufgabe“
21 % von Punkten

Aufgabe 5: Teilbarkeitsregel für 37 (Vorl. 8)
30 % von Punkten

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Aufgabe 4: Homomorphismen „Verständnisaufgabe“
21 % von Punkten

Aufgabe 5: Teilbarkeitsregel für 37 (Vorl. 8)
30 % von Punkten

Aufgabe 6:

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Aufgabe 4: Homomorphismen „Verständnisaufgabe“
21 % von Punkten

Aufgabe 5: Teilbarkeitsregel für 37 (Vorl. 8)
30 % von Punkten

Aufgabe 6: Definition von linksinverse Abbildung/ Rechtsinverse Abbildung /Lemma 2/Lemma 3

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Aufgabe 4: Homomorphismen „Verständnisaufgabe“
21 % von Punkten

Aufgabe 5: Teilbarkeitsregel für 37 (Vorl. 8)
30 % von Punkten

Aufgabe 6: Definition von linksinverse Abbildung/ Rechtsinverse Abbildung /Lemma 2/Lemma 3 Definition von Untegruppen/ Definition von zyklischen Gruppen
21 % von Punkten

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Aufgabe 4: Homomorphismen „Verständnisaufgabe“
21 % von Punkten

Aufgabe 5: Teilbarkeitsregel für 37 (Vorl. 8)
30 % von Punkten

Aufgabe 6: Definition von linksinverse Abbildung/ Rechtsinverse Abbildung /Lemma 2/Lemma 3 Definition von Untegruppen/ Definition von zyklischen Gruppen
21 % von Punkten

Aufgabe 7:

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Aufgabe 4: Homomorphismen „Verständnisaufgabe“
21 % von Punkten

Aufgabe 5: Teilbarkeitsregel für 37 (Vorl. 8)
30 % von Punkten

Aufgabe 6: Definition von linksinverse Abbildung/ Rechtsinverse Abbildung /Lemma 2/Lemma 3 Definition von Untegruppen/ Definition von zyklischen Gruppen
21 % von Punkten

Aufgabe 7: Satz 7 aus der Vorlesung 5
43 % von Punkten

Statistik:

Aufgabe 1: Gleichungssystem – Gauss-Algorithmus
66 % von Punkten

Aufgabe 2: Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_2$:
82 % von Punkten

Aufgabe 3: $(\mathbb{R}_{>1}, \circ)$ ist eine Gruppe:
36 % von Punkten

Aufgabe 4: Homomorphismen „Verständnisaufgabe“
21 % von Punkten

Aufgabe 5: Teilbarkeitsregel für 37 (Vorl. 8)
30 % von Punkten

Aufgabe 6: Definition von linksinverse Abbildung/ Rechtsinverse Abbildung /Lemma 2/Lemma 3 Definition von Untegruppen/ Definition von zyklischen Gruppen
21 % von Punkten

Aufgabe 7: Satz 7 aus der Vorlesung 5
43 % von Punkten

Ingesamt:

Ingesamt: **43 % von Punkten**

Ingesamt: **43 % von Punkten**

44 (von 132) Studierende mit ≥ 20 Punkten.

Ingesamt: **43 % von Punkten**

44 (von 132) Studierende mit $\geq$ 20 Punkten.

12 Studierende mit $\geq$ 30 Punkten.

Ingesamt: **43 % von Punkten**

44 (von 132) Studierende mit $\geq$ 20 Punkten.

12 Studierende mit $\geq$ 30 Punkten.

32 Studierende mit $\leq$ 10 Punkten.

Ingesamt: **43 % von Punkten**

44 (von 132) Studierende mit $\geq$ 20 Punkten.

12 Studierende mit $\geq$ 30 Punkten.

32 Studierende mit $\leq$ 10 Punkten.

Aufgabe 7:

Ingesamt: **43 % von Punkten**

44 (von 132) Studierende mit $\geq$ 20 Punkten.

12 Studierende mit $\geq$ 30 Punkten.

32 Studierende mit $\leq$ 10 Punkten.

Aufgabe 7: Satz 7 aus der Vorlesung 5

Ingesamt: **43 % von Punkten**

44 (von 132) Studierende mit ≥ 20 Punkten.

12 Studierende mit ≥ 30 Punkten.

32 Studierende mit ≤ 10 Punkten.

Aufgabe 7: Satz 7 aus der Vorlesung 5

Die beste 12 Studierende haben für diese Aufgabe **92 % von Punkten** bekommen

Ingesamt: **43 % von Punkten**

44 (von 132) Studierende mit ≥ 20 Punkten.

12 Studierende mit ≥ 30 Punkten.

32 Studierende mit ≤ 10 Punkten.

Aufgabe 7: Satz 7 aus der Vorlesung 5

Die beste 12 Studierende haben für diese Aufgabe **92 % von Punkten** bekommen

Die beste 44 Studierende haben für diese Aufgabe **75 % von Punkten** bekommen

Ingesamt: **43 % von Punkten**

44 (von 132) Studierende mit $\geq$ 20 Punkten.

12 Studierende mit $\geq$ 30 Punkten.

32 Studierende mit $\leq$ 10 Punkten.

Aufgabe 7: Satz 7 aus der Vorlesung 5

Die beste 12 Studierende haben für diese Aufgabe **92 % von Punkten** bekommen

Die beste 44 Studierende haben für diese Aufgabe **75 % von Punkten** bekommen

Die schlechteste 32 Studierende haben für diese Aufgabe **5 % von Punkten** bekommen

Ingesamt: **43 % von Punkten**

44 (von 132) Studierende mit $\geq$ 20 Punkten.

12 Studierende mit $\geq$ 30 Punkten.

32 Studierende mit $\leq$ 10 Punkten.

Aufgabe 7: Satz 7 aus der Vorlesung 5

Die beste 12 Studierende haben für diese Aufgabe **92 % von Punkten** bekommen

Die beste 44 Studierende haben für diese Aufgabe **75 % von Punkten** bekommen

Die schlechteste 32 Studierende haben für diese Aufgabe **5 % von Punkten** bekommen

Hauptklausur wird ähnlich,

Hauptklausur wird ähnlich, aber komplizierter:

- 2 Stunden statt 3

Hauptklausur wird ähnlich, aber komplizierter:

- 2 Stunden statt 3
- Mehr Stoff.

Hauptklausur wird ähnlich, aber komplizierter:

- 2 Stunden statt 3
- Mehr Stoff.

Hauptklausur wird ähnlich, aber komplizierter:

- 2 Stunden statt 3
- Mehr Stoff.

Fazit:

Hauptklausur wird ähnlich, aber komplizierter:

- 2 Stunden statt 3
- Mehr Stoff.

Fazit: es reicht nicht, nur teilnehmen.

Hauptklausur wird ähnlich, aber komplizierter:

- 2 Stunden statt 3
- Mehr Stoff.

Fazit: es reicht nicht, nur teilnehmen. Man muß auch studieren.

Hauptklausur wird ähnlich, aber komplizierter:

- 2 Stunden statt 3
- Mehr Stoff.

Fazit: es reicht nicht, nur teilnehmen. Man muß auch studieren. Es ist nicht für alle einfach.

Wiederholung: Linear unabhängige Vektoren und Basen

Wiederholung: Linear unabhängige Vektoren und Basen

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Wiederholung: Linear unabhängige Vektoren und Basen

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 $A \subseteq V$ ist linear unabhängig

Wiederholung: Linear unabhängige Vektoren und Basen

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 $A \subseteq V$ ist linear unabhängig ist, falls

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0,$$

wobei $k \in \mathbb{N}$, $v_i \in A$ und $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.

Wiederholung: Linear unabhängige Vektoren und Basen

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 $A \subseteq V$ ist linear unabhängig ist, falls

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0,$$

wobei $k \in \mathbb{N}$, $v_i \in A$ und $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.

Def. 23 Eine $k-$Tupel $(v_1, ..., v_k)$ von verschiedenen Vektoren $v_i \in V$ heißt eine Basis, falls die Menge $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Wiederholung: Linear unabhängige Vektoren und Basen

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 $A \subseteq V$ ist linear unabhängig ist, falls

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0,$$

wobei $k \in \mathbb{N}$, $v_i \in A$ und $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.

Def. 23 Eine $k-$Tupel $(v_1, ..., v_k)$ von verschiedenen Vektoren $v_i \in V$ heißt eine Basis, falls die Menge $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Nach Definition setzen wir die Basis vom trivialen Vektorraum

Wiederholung: Linear unabhängige Vektoren und Basen

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 $A \subseteq V$ ist linear unabhängig ist, falls

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0,$$

wobei $k \in \mathbb{N}$, $v_i \in A$ und $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.

Def. 23 Eine $k-$Tupel $(v_1, ..., v_k)$ von verschiedenen Vektoren $v_i \in V$ heißt eine Basis, falls die Menge $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) linear unabhängig ist und

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Nach Definition setzen wir die Basis vom trivialen Vektorraum gleich $\varnothing$.

Satz 25 $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$.

Satz 25 *$(v_1, ..., v_k)$ sei ein $k-$Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $A := \{v_1, ..., v_k\}$.*

Satz 25 $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

Satz 25 $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

Satz 25 $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, ..., v_k)$ *ist eine Basis.*

Satz 25 *$(v_1, ..., v_k)$ sei ein $k-$Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $A := \{v_1, ..., v_k\}$. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) *$(v_1, ..., v_k)$ ist eine Basis.*

Satz 25 $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, ..., v_k)$ *ist eine Basis.*

(b) *Jedes* $v \in V$ *läßt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus* A *darstellen.*

Satz 25 $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$*. Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$*. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, ..., v_k)$ *ist eine Basis.*

(b) *Jedes* $v \in V$ *läßt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus* A *darstellen.*

(c) A *ist linear unabhängig*

Satz 25 $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, ..., v_k)$ *ist eine Basis.*

(b) *Jedes* $v \in V$ *läßt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus* A *darstellen.*

(c) A *ist linear unabhängig und für jedes* $v \in V$, $v \notin A$ *die Vereinigungsmenge* $A \cup \{v\}$ *ist linear abhängig.*

Satz 25 *$(v_1, ..., v_k)$ sei ein $k-$Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $A := \{v_1, ..., v_k\}$. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) *$(v_1, ..., v_k)$ ist eine Basis.*

(b) *Jedes $v \in V$ läßt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen.*

(c) *A ist linear unabhängig und für jedes $v \in V$, $v \notin A$ die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ ist linear abhängig.*

Schema des Beweises: $\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)} \Rightarrow \text{(c)}_{\text{bereits bewiesen}}$

Satz 25 *$(v_1, ..., v_k)$ sei ein $k-$Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $A := \{v_1, ..., v_k\}$. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) *$(v_1, ..., v_k)$ ist eine Basis.*

(b) *Jedes $v \in V$ läßt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen.*

(c) *A ist linear unabhängig und für jedes $v \in V$, $v \notin A$ die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ ist linear abhängig.*

Schema des Beweises: $\underbrace{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)} \Rightarrow \text{(c)}}_{\text{bereits bewiesen}}$

Z.z.: $(c) \Longrightarrow (a)$

(c) $\Rightarrow$ (a)

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \left\{ \right.$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \left\{ \begin{array}{l} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \\ \end{array} \right.$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(c) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(a) = \Bigg\{$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(c) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(a) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \end{cases}$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \left\{ \begin{array}{c} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{a}) = \left\{ \begin{array}{c} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{array} \right.$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\text{c}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(\text{a}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{cases}$$

Angenommen (c),

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \left\{ \begin{array}{c} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{a}) = \left\{ \begin{array}{c} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{array} \right.$$

Angenommen (c), müssen wir zeigen, dass $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A.

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \left\{ \begin{array}{c} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{a}) = \left\{ \begin{array}{c} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{array} \right.$$

Angenommen (c), müssen wir zeigen, dass $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A.
Fall 1.

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(\mathrm{a}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{cases}$$

Angenommen (c), müssen wir zeigen, dass $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A.
Fall 1. $v \in A$. Dann ist v schon eine Linearkombination von Elemente aus A,

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(c) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(a) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{cases}$$

Angenommen (c), müssen wir zeigen, dass $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A.
Fall 1. $v \in A$. Dann ist v schon eine Linearkombination von Elemente aus A, weil $v = 1 \bullet v$.

Fall 2. $v \notin A$.

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$,

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} =$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor.

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichttriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.)

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$.

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j} = -\lambda_j^{-1}$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j} = -\lambda_j^{-1}$

$$\vec{0} =$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j} = -\lambda_j^{-1}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j} = -\lambda_j^{-1}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - ...$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig, d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j} = -\lambda_j^{-1}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - \ldots - 1 v_j - \ldots$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j} = -\lambda_j^{-1}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - ... - 1 v_j - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j} = -\lambda_j^{-1}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - ... - 1 v_j - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

und addieren $v = v_j$ zu beiden Seiten. Wir bekommen

$$v =$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j} = -\lambda_j^{-1}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - ... - 1 v_j - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

und addieren $v = v_j$ zu beiden Seiten. Wir bekommen

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ .$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j} = -\lambda_j^{-1}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - \ldots - 1 v_j - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

und addieren $v = v_j$ zu beiden Seiten. Wir bekommen

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ .$$

Also ist v eine Linearkombination der Elemente aus A.

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ mit $-\frac{1}{\lambda_j} = -\lambda_j^{-1}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - ... - 1 v_j - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

und addieren $v = v_j$ zu beiden Seiten. Wir bekommen

$$v = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ .$$

Also ist v eine Linearkombination der Elemente aus A.

Def. 24

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$

Def. 24 *Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$ heißt* *endlich erzeugt,*

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$ *heißt* *endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt*

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$ *heißt* *endlich erzeugt*, *falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\mathrm{span}(A) = V$.

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$ *heißt* *endlich erzeugt*, *falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\operatorname{span}(A) = V$.

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$ *heißt* *endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\operatorname{span}(A) = V$*.*

Bsp.

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$ *heißt* *endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\mathrm{span}(A) = V$*.*

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt:

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$ *heißt* *endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\mathrm{span}(A) = V$*.*

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: wie wir bereits gezeigt haben, ist jeder Vektor

Def. 24 *Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$ heißt* *endlich erzeugt*, *falls es eine endliche Teilmenge $A \subseteq V$ gibt so dass $\operatorname{span}(A) = V$.*

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: wie wir bereits gezeigt haben, ist jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$ *heißt* *endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\mathrm{span}(A) = V$*.*

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: wie wir bereits gezeigt haben, ist jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Def. 24 *Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$ heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge $A \subseteq V$ gibt so dass $\mathrm{span}(A) = V$.*

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: wie wir bereits gezeigt haben, ist jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bsp. Der Vektorraum $\mathbb{K}[x]$ der Polynomen (Vorlesung Fricke/Hausaufgabe 1b Blatt 6)

Def. 24 *Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$ heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge $A \subseteq V$ gibt so dass $\mathrm{span}(A) = V$.*

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: wie wir bereits gezeigt haben, ist jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bsp. Der Vektorraum $\mathbb{K}[x]$ der Polynomen (Vorlesung Fricke/Hausaufgabe 1b Blatt 6) ist nicht endlich erzeugt.

Def. 24 *Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$ heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge $A \subseteq V$ gibt so dass $\mathrm{span}(A) = V$.*

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: wie wir bereits gezeigt haben, ist jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bsp. Der Vektorraum $\mathbb{K}[x]$ der Polynomen (Vorlesung Fricke/Hausaufgabe 1b Blatt 6) ist nicht endlich erzeugt.
Hausaufgabe 1 Blatt 7

Satz 26

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum,*

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A.

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\operatorname{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge A. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$, $A' = \{v_1, ..., v_k\}$, *s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\operatorname{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$, $A' = \{v_1, ..., v_k\}$*, s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$*,* $A' = \{v_1, ..., v_k\}$*, s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Beweis:

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$, $A' = \{v_1, ..., v_k\}$*, s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Beweis: Angennomen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist.

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge A. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$, $A' = \{v_1, ..., v_k\}$, *s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Beweis: Angennomen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich.

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$*,* $A' = \{v_1, ..., v_k\}$*, s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Beweis: Angennomen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich. Ferner werden wir annehmen, das unser Vektorraum nichttrivial ist.

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$*,* $A' = \{v_1, ..., v_k\}$*, s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Beweis: Angennomen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich. Ferner werden wir annehmen, das unser Vektorraum nichttrivial ist.

Induktion nach der Anzahl der Elemente in der Menge A.

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge A. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$, $A' = \{v_1, ..., v_k\}$, *s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in V ist.*

Beweis: Angennomen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich. Ferner werden wir annehmen, das unser Vektorraum nichttrivial ist.

Induktion nach der Anzahl der Elemente in der Menge A. Schema:

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$*,* $A' = \{v_1, ..., v_k\}$*, s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Beweis: Angennomen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich. Ferner werden wir annehmen, das unser Vektorraum nichttrivial ist.

Induktion nach der Anzahl der Elemente in der Menge A. Schema:

1. InduktionsAnfang

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$*,* $A' = \{v_1, ..., v_k\}$*, s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Beweis: Angennomen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich. Ferner werden wir annehmen, das unser Vektorraum nichttrivial ist.

Induktion nach der Anzahl der Elemente in der Menge A. Schema:

1. InduktionsAnfang

   Wir zeigen, dass für eine Teilmenge aus $m = 1$ element die Aussage erfüllt ist

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\operatorname{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$*,* $A' = \{v_1, ..., v_k\}$*, s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Beweis: Angenommen $\operatorname{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich. Ferner werden wir annehmen, das unser Vektorraum nichttrivial ist.

Induktion nach der Anzahl der Elemente in der Menge A. Schema:

1. InduktionsAnfang

   Wir zeigen, dass für eine Teilmenge aus $m = 1$ element die Aussage erfüllt ist

2. InduktionsVoraussetzung

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$*,* $A' = \{v_1, ..., v_k\}$*, s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Beweis: Angenommen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich. Ferner werden wir annehmen, das unser Vektorraum nichttrivial ist.

Induktion nach der Anzahl der Elemente in der Menge A. Schema:

1. InduktionsAnfang

   Wir zeigen, dass für eine Teilmenge aus $m = 1$ element die Aussage erfüllt ist

2. InduktionsVoraussetzung

   Wir nehmen an, dass die Aussage für jede Teilmenge aus $m - 1$ Elementen erfüllt ist

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$*,* $A' = \{v_1, ..., v_k\}$*, s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Beweis: Angennomen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich. Ferner werden wir annehmen, das unser Vektorraum nichttrivial ist.

Induktion nach der Anzahl der Elemente in der Menge A. Schema:

1. InduktionsAnfang

   Wir zeigen, dass für eine Teilmenge aus $m = 1$ element die Aussage erfüllt ist

2. InduktionsVoraussetzung

   Wir nehmen an, dass die Aussage für jede Teilmenge aus $m - 1$ Elementen erfüllt ist

3. InduktionsSchritt

Satz 26 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$*Vektorraum, d.h.* $\mathrm{span}(A) = V$ *für eine endliche Menge* A*. Dann gibt es eine endliche Teilmenge* $A' \subseteq A$, $A' = \{v_1, ..., v_k\}$*, s.d. das Tuple* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis in* V *ist.*

Beweis: Angennomen $\mathrm{span}(A) = V$, wobei $A \subseteq V$ endlich ist. Falls V ein trivialer Vektroraum ist, stimmt die Aussage offensichtlich. Ferner werden wir annehmen, das unser Vektorraum nichttrivial ist.

Induktion nach der Anzahl der Elemente in der Menge A. Schema:

1. InduktionsAnfang

   Wir zeigen, dass für eine Teilmenge aus $m = 1$ element die Aussage erfüllt ist

2. InduktionsVoraussetzung

   Wir nehmen an, dass die Aussage für jede Teilmenge aus $m - 1$ Elementen erfüllt ist

3. InduktionsSchritt

   Wir beweisen, dass falls I.V. erfüllt ist, ist die Aussage auch für jede Teilmenge aus m Elementen erfüllt

I.A.

Angenommen $V = span(A)$,

Angenommen $V = span(A)$, wobei $A = \{v\}$.

I.A.

Angenommen $V = span(A)$, wobei $A = \{v\}$. Ist $v = \vec{0}$,

I.A.

Angenommen $V = span(A)$, wobei $A = \{v\}$. Ist $v = \vec{0}$, dann ist V ein trivialer Vektorraum, und die Aussage ist erfüllt, da $\emptyset \subseteq A$.

I.A.

Angenommen $V = span(A)$, wobei $A = \{v\}$. Ist $v = \vec{0}$, dann ist V ein trivialer Vektorraum, und die Aussage ist erfüllt, da $\varnothing \subseteq A$. (in dem Fall $A' = \varnothing$)

Angenommen $V = span(A)$, wobei $A = \{v\}$. Ist $v = \vec{0}$, dann ist V ein trivialer Vektorraum, und die Aussage ist erfüllt, da $\varnothing \subseteq A$. (in dem Fall $A' = \varnothing$)
Ist $v \neq 0$,

I.A.

Angenommen $V = span(A)$, wobei $A = \{v\}$. Ist $v = \vec{0}$, dann ist V ein trivialer Vektorraum, und die Aussage ist erfüllt, da $\varnothing \subseteq A$. (in dem Fall $A' = \varnothing$)
Ist $v \neq 0$, so ist nach Lemma 15

I.A.

Angenommen $V = span(A)$, wobei $A = \{v\}$. Ist $v = \vec{0}$, dann ist V ein trivialer Vektorraum, und die Aussage ist erfüllt, da $\varnothing \subseteq A$. (in dem Fall $A' = \varnothing$)
Ist $v \neq 0$, so ist nach Lemma 15 $\{v\}$ linear unabhängig,

I.A.

Angenommen $V = span(A)$, wobei $A = \{v\}$. Ist $v = \vec{0}$, dann ist V ein trivialer Vektorraum, und die Aussage ist erfüllt, da $\varnothing \subseteq A$. (in dem Fall $A' = \varnothing$)
Ist $v \neq 0$, so ist nach Lemma 15 $\{v\}$ linear unabhängig, und deswegen ist eine Basis.

I.A.

Angenommen $V = span(A)$, wobei $A = \{v\}$. Ist $v = \vec{0}$, dann ist V ein trivialer Vektorraum, und die Aussage ist erfüllt, da $\varnothing \subseteq A$. (in dem Fall $A' = \varnothing$)
Ist $v \neq 0$, so ist nach Lemma 15 $\{v\}$ linear unabhängig, und deswegen ist eine Basis. (In dem Fall $A' = A$).

I.V. und I.S.

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

- die aus $m-1$ Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$.

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$.

I.S.: Wir müssen zeigen,

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$.

I.S.: Wir müssen zeigen, dass falls in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A gibt

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$.

I.S.: Wir müssen zeigen, dass falls in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A gibt

- die aus m Elementen besteht und

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$.

I.S.: Wir müssen zeigen, dass falls in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A gibt

- die aus m Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$.

I.S.: Wir müssen zeigen, dass falls in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A gibt

- die aus m Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$.

I.S.: Wir müssen zeigen, dass falls in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A gibt

- die aus m Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$

Fall 1.

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$.

I.S.: Wir müssen zeigen, dass falls in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A gibt

- die aus m Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$

Fall 1. A ist linear unabhängig.

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$.

I.S.: Wir müssen zeigen, dass falls in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A gibt

- die aus m Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$

Fall 1.A ist linear unabhängig. Dann ist A eine Basis.

I.V. und I.S.

I.V.: Gibt es in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A

- die aus $m - 1$ Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$.

I.S.: Wir müssen zeigen, dass falls in $(V, +, \bullet)$ eine Teilmenge A gibt

- die aus m Elementen besteht und
- so dass $\mathrm{span}(A) = V$,

so gibt es auch eine Basis $A' \subseteq A$

Fall 1.A ist linear unabhängig. Dann ist A eine Basis.

I.S., Fall 2

I.S., Fall 2

Fall 2.

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig.

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$.

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann wie im Beweis des Satzes 25

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann wie im Beweis des Satzes 25 multiplizieren wir beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann wie im Beweis des Satzes 25 multiplizieren wir beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$ und addieren v_j: Nach Umbenennung $v_j \mapsto v$

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann wie im Beweis des Satzes 25 multiplizieren wir beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$ und addieren v_j: Nach Umbenennung $v_j \mapsto v$

$$v = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \; . \qquad (*)$$

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann wie im Beweis des Satzes 25 multiplizieren wir beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$ und addieren v_j: Nach Umbenennung $v_j \mapsto v$

$$v = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \; . \qquad (*)$$

Betrachte $A' \subseteq A$,

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann wie im Beweis des Satzes 25 multiplizieren wir beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$ und addieren v_j: Nach Umbenennung $v_j \mapsto v$

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ . \qquad (*)$$

Betrachte $A' \subseteq A$, die aus aller Elementen von A besteht mit Ausnahme v.

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann wie im Beweis des Satzes 25 multiplizieren wir beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$ und addieren v_j: Nach Umbenennung $v_j \mapsto v$

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ . \qquad (*)$$

Betrachte $A' \subseteq A$, die aus aller Elementen von A besteht mit Ausnahme v. (Also, A' ist A ohne v).

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann wie im Beweis des Satzes 25 multiplizieren wir beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$ und addieren v_j: Nach Umbenennung $v_j \mapsto v$

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \; . \qquad (*)$$

Betrachte $A' \subseteq A$, die aus aller Elementen von A besteht mit Ausnahme v. (Also, A' ist A ohne v).

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann wie im Beweis des Satzes 25 multiplizieren wir beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$ und addieren v_j: Nach Umbenennung $v_j \mapsto v$

$$v = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ . \qquad (*)$$

Betrachte $A' \subseteq A$, die aus aller Elementen von A besteht mit Ausnahme v. (Also, A' ist A ohne v).
Für A' alle Induktionsvoraussetzungen erfüllt sind:

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann wie im Beweis des Satzes 25 multiplizieren wir beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$ und addieren v_j: Nach Umbenennung $v_j \mapsto v$

$$v = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ . \qquad (*)$$

Betrachte $A' \subseteq A$, die aus aller Elementen von A besteht mit Ausnahme v. (Also, A' ist A ohne v).
Für A' alle Induktionsvoraussetzungen erfüllt sind: A' enthält genau $m-1$ Elemente.

I.S., Fall 2

Fall 2. A ist linear abhängig. Dann gibt es eine nichttriviale Linearkombination der Elemente aus A, die gleich $\vec{0}$ ist:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_m v_m = \vec{0},$$

wobei $v_i \in A$ und nicht alle λ_i gleich 0.
Sei $\lambda_j \neq 0$. Dann wie im Beweis des Satzes 25 multiplizieren wir beide Seiten mit $-\frac{1}{\lambda_j}$ und addieren v_j: Nach Umbenennung $v_j \mapsto v$

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ . \qquad (*)$$

Betrachte $A' \subseteq A$, die aus aller Elementen von A besteht mit Ausnahme v. (Also, A' ist A ohne v).
Für A' alle Induktionsvoraussetzungen erfüllt sind: A' enthält genau $m-1$ Elemente.

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$,

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, ..., u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$,

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, ..., u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A'

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, ..., u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elemente aus A'.

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, ..., u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elemente aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$ liegt,

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, ..., u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elemente aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$ liegt, d.h. $v = u_j$ für irgendwelches j.

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, ..., u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elemente aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$ liegt, d.h. $v = u_j$ für irgendwelches j. Wir haben

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, ..., u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elemente aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$ liegt, d.h. $v = u_j$ für irgendwelches j. Wir haben

$$u =$$

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, \ldots, u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, \ldots, u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elemente aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, \ldots, u_k\}$ liegt, d.h. $v = u_j$ für irgendwelches j. Wir haben

$$u = \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big)$$

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, ..., u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elemente aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$ liegt, d.h. $v = u_j$ für irgendwelches j. Wir haben

$$u = \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) + \mu_j u_j$$

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, ..., u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elemente aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$ liegt, d.h. $v = u_j$ für irgendwelches j. Wir haben

$$u = \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) + \mu_j u_j \overset{(*)}{=}$$

Z.z.: $\operatorname{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\operatorname{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, ..., u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elemente aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$ liegt, d.h. $v = u_j$ für irgendwelches j. Wir haben

$$u = \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) + \mu_j u_j \overset{(*)}{=} \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big)$$

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, \ldots, u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, \ldots, u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elemente aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, \ldots, u_k\}$ liegt, d.h. $v = u_j$ für irgendwelches j. Wir haben

$$u = \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) + \mu_j u_j \overset{(*)}{=} \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) - \mu_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i$$

Z.z.: $\mathrm{span}(A') = V$,
d.h. jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A'.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also für jedes $u \in V$ es gibt $u_1, ..., u_k \in A$ so dass

$$u = \sum_{i=1}^{k} \mu_i u_i \ . \qquad (**)$$

Liegt v nicht in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$, so ist jedes u_i ein Element von A' und deswegen ist u eine Linearkombination von Elemente aus A'.
Wir nehmen an, dass v in der Menge $\{u_1, ..., u_k\}$ liegt, d.h. $v = u_j$ für irgendwelches j. Wir haben

$$u = \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) + \mu_j u_j \overset{(*)}{=} \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \mu_i u_i \Big) - \mu_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i$$

ist eine Linearkombination von Elementen aus A'. $\square$

Dimension

Dimension

Definition 25 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente in einer Basis die Dimension des Vektorraums* V.

Dimension

Definition 25 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente in einer Basis* *die Dimension des Vektorraums* V.

Satz 27

Dimension

Definition 25 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente in einer Basis die Dimension des Vektorraums* V.

Satz 27 *Die Dimension eines endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$ *Vektorraums*

Dimension

Definition 25 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente in einer Basis die Dimension des Vektorraums* V.

Satz 27 *Die Dimension eines endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$ *Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

Definition 25 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente in einer Basis* *die Dimension* *des Vektorraums* V.

Satz 27 *Die Dimension eines endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$ *Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

D.h. Besteht eine Basis aus n Vektoren,

Dimension

Definition 25 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente in einer Basis die Dimension des Vektorraums* V*.*

Satz 27 *Die Dimension eines endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$ *Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

D.h. Besteht eine Basis aus n Vektoren, so besteht jede Basis aus n Vektoren.

Dimension

Definition 25 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente in einer Basis die Dimension des Vektorraums* V*.*

Satz 27 *Die Dimension eines endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$ *Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

D.h. Besteht eine Basis aus n Vektoren, so besteht jede Basis aus n Vektoren.

D.h. Besteht eine Basis aus n Vektoren,

Dimension

Definition 25 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente in einer Basis die Dimension des Vektorraums* V.

Satz 27 *Die Dimension eines endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$ *Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

D.h. Besteht eine Basis aus n Vektoren, so besteht jede Basis aus n Vektoren.

D.h. Besteht eine Basis aus n Vektoren,

Dimension

Definition 25 *Sei* $(V, +, \bullet)$ *ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente in einer Basis* *die Dimension* *des Vektorraums* V.

Satz 27 *Die Dimension eines endlich erzeugter* $\mathbb{K}-$ *Vektorraums hängt nicht von der Wahl der Basis ab.*

D.h. Besteht eine Basis aus n Vektoren, so besteht jede Basis aus n Vektoren.

D.h. Besteht eine Basis aus n Vektoren, so besteht jede Basis aus n Vektoren.

Lemma 16

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis in* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$,

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis in* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$,

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis in* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. *Ist* $\lambda_k \neq 0$, *so ist*
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ *auch eine Basis.*

Beweis: OBdA

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$,

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren.

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  (1871–1928))

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.:

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := (w, v_2, ..., v_n)$ ist eine Basis.

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := (w, v_2, ..., v_n)$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w, v_2, ..., v_n\}$.

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := (w, v_2, ..., v_n)$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w, v_2, ..., v_n\}$. Tatsächlich,

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n,$$

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.
Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := (w, v_2, ..., v_n)$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w, v_2, ..., v_n\}$. Tatsächlich,

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n, \qquad (*)$$

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := (w, v_2, ..., v_n)$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w, v_2, ..., v_n\}$. Tatsächlich,

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n, \qquad (*)$$

wobei $\lambda_1 \neq 0$.

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := (w, v_2, ..., v_n)$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w, v_2, ..., v_n\}$. Tatsächlich,

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n, \qquad (*)$$

wobei $\lambda_1 \neq 0$. Nach multiplizieren mit $-\frac{1}{\lambda_1}$

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B=(v_1,...,v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V,+,\bullet)$,
$w=\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1,...,v_{k-1},w,v_{k+1},...,v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k=1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := (w,v_2,...,v_n)$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w,v_2,...,v_n\}$. Tatsächlich,

$$w=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+...+\lambda_n v_n, \qquad (*)$$

wobei $\lambda_1 \neq 0$. Nach multiplizieren mit $-\frac{1}{\lambda_1}$ und addieren von $v_1+\frac{1}{\lambda_1}w$ zu beiden Seiten der Gleichung

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := (w, v_2, ..., v_n)$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w, v_2, ..., v_n\}$. Tatsächlich,

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n, \qquad (*)$$

wobei $\lambda_1 \neq 0$. Nach multiplizieren mit $-\frac{1}{\lambda_1}$ und addieren von $v_1 + \frac{1}{\lambda_1} w$ zu beiden Seiten der Gleichung bekommen wir

$$v_1 =$$

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := (w, v_2, ..., v_n)$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w, v_2, ..., v_n\}$. Tatsächlich,

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n, \qquad (*)$$

wobei $\lambda_1 \neq 0$. Nach multiplizieren mit $-\frac{1}{\lambda_1}$ und addieren von $v_1 + \frac{1}{\lambda_1} w$ zu beiden Seiten der Gleichung bekommen wir

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_2} v_n$$

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := (w, v_2, ..., v_n)$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w, v_2, ..., v_n\}$. Tatsächlich,

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n, \qquad (*)$$

wobei $\lambda_1 \neq 0$. Nach multiplizieren mit $-\frac{1}{\lambda_1}$ und addieren von $v_1 + \frac{1}{\lambda_1} w$ zu beiden Seiten der Gleichung bekommen wir

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_2} v_n = \frac{1}{\lambda_1} w - \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i$$

Lemma 16 (Austauschlemma von Steinitz  **(1871–1928))**

$B = (v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis in $\mathbb{K}-$Vektorraum $(V, +, \bullet)$,
$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist
$B' := (v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis.

Beweis: OBdA ist $k = 1$, sonst umnumerieren. Also, $\lambda_1 \neq 0$.
Z.z.: $B' := (w, v_2, ..., v_n)$ ist eine Basis.
v_1 ist eine Linearkombination von $\{w, v_2, ..., v_n\}$. Tatsächlich,

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n, \qquad (*)$$

wobei $\lambda_1 \neq 0$. Nach multiplizieren mit $-\frac{1}{\lambda_1}$ und addieren von $v_1 + \frac{1}{\lambda_1} w$ zu beiden Seiten der Gleichung bekommen wir

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} v_3 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_2} v_n = \frac{1}{\lambda_1} w - \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i \qquad (**)$$

Wir zeigen: $\operatorname{span}(B') = V$.

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$.

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v =$$

Wir zeigen: $\operatorname{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$$

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i =$$

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i$$

Wir zeigen: $\operatorname{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=}$$

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \stackrel{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e.

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\mathrm{span}(B') = V$.
Wir zeigen:

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\mathrm{span}(B') = V$.

Wir zeigen: B' ist linear unabhängig.

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\mathrm{span}(B') = V$.
Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\mathrm{span}(B') = V$.
Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt dass $\alpha = 0$

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i .$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\mathrm{span}(B') = V$.
Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt dass $\alpha = 0$ und alle $\alpha_i = 0$.

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\mathrm{span}(B') = V$.
Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt dass $\alpha = 0$ und alle $\alpha_i = 0$.
Wir setzen $(*)$ in dieser Gleichung ein:

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\mathrm{span}(B') = V$.
Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt dass $\alpha = 0$ und alle $\alpha_i = 0$.
Wir setzen $(*)$ in dieser Gleichung ein:

$$\vec{0} =$$

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\mathrm{span}(B') = V$.
Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt dass $\alpha = 0$ und alle $\alpha_i = 0$.
Wir setzen $(*)$ in dieser Gleichung ein:

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i \overset{(*)}{=}$$

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \stackrel{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\mathrm{span}(B') = V$.
Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt dass $\alpha = 0$ und alle $\alpha_i = 0$.
Wir setzen $(*)$ in dieser Gleichung ein:

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i \stackrel{(*)}{=} \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\mathrm{span}(B') = V$.
Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt dass $\alpha = 0$ und alle $\alpha_i = 0$.
Wir setzen $(*)$ in dieser Gleichung ein:

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i \overset{(*)}{=} \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i = \alpha \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (\alpha \lambda_i + \alpha_i) v_i$$

Da $\{v_1, ...v_n\}$ linear unabhängig ist und $\lambda_1 \neq 0$,

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\mathrm{span}(B') = V$.
Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt dass $\alpha = 0$ und alle $\alpha_i = 0$.
Wir setzen $(*)$ in dieser Gleichung ein:

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i \overset{(*)}{=} \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i = \alpha \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (\alpha \lambda_i + \alpha_i) v_i$$

Da $\{v_1, ... v_n\}$ linear unabhängig ist und $\lambda_1 \neq 0$, müssen alle Koeffizienten in dieser Linearkombination gleich 0 sein.

Wir zeigen: $\operatorname{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\operatorname{span}(B') = V$.
Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt dass $\alpha = 0$ und alle $\alpha_i = 0$.
Wir setzen $(*)$ in dieser Gleichung ein:

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i \overset{(*)}{=} \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i = \alpha \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (\alpha \lambda_i + \alpha_i) v_i$$

Da $\{v_1, ... v_n\}$ linear unabhängig ist und $\lambda_1 \neq 0$, müssen alle Koeffizienten in dieser Linearkombination gleich 0 sein. Dann ist $\alpha = 0$,

Wir zeigen: $\mathrm{span}(B') = V$. Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{K}$ so dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \mu_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i \overset{(**)}{=} \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i.$$

Also, jedes v ist eine Linearkombination der Elemente aus B', i.e. $\mathrm{span}(B') = V$.
Wir zeigen: B' ist linear unabhängig. Z.z.: aus der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt dass $\alpha = 0$ und alle $\alpha_i = 0$.
Wir setzen $(*)$ in dieser Gleichung ein:

$$\vec{0} = \alpha w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i \overset{(*)}{=} \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i = \alpha \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (\alpha \lambda_i + \alpha_i) v_i$$

Da $\{v_1, ... v_n\}$ linear unabhängig ist und $\lambda_1 \neq 0$, müssen alle Koeffizienten in dieser Linearkombination gleich 0 sein. Dann ist $\alpha = 0$, und deswegen auch alle $\alpha_i = 0$

Lemma 17

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$.

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge.*

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$, *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$, *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$, *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j *wieder eine Basis von* V *liefert*

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$, *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j *wieder eine Basis von* V *liefert*

Induktions nach k**.**

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$, *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j *wieder eine Basis von* V *liefert*

Induktions nach k**.**

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$, *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j *wieder eine Basis von* V *liefert*

Induktions nach k.

I.A. Für $k = 0$

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$, *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j *wieder eine Basis von* V *liefert*

Induktions nach k.

I.A. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$, *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j *wieder eine Basis von* V *liefert*

Induktions nach k.

I.A. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen

I.V.

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$, *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j *wieder eine Basis von* V *liefert*

Induktions nach k.
I.A. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen
I.V. Die Aussage ist für jede Teilmenge $A \subseteq V$ aus $k - 1$ Elementen gültig.

Lemma 17 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei* $B = (v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im* $\mathbb{K}-$*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A = \{w_1, ..., w_k\}$ *eine linear unabhängige Menge. Dann gilt*

(a) $k \leq n$, *und*

(b) *es gibt (paarweise verschiedene)* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *so dass der Austausch von allen* v_{i_j} *gegen* w_j *wieder eine Basis von* V *liefert*

Induktions nach k**.**
I.A. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen
I.V. Die Aussage ist für jede Teilmenge $A \subseteq V$ aus $k - 1$ Elementen gültig.

I.S.

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen: $k \leq n$.

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen: $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$.

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen: $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$. Widerspruchsbeweis.

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen: $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$. Widerspruchsbeweis.
Angenommen, es wäre $k - 1 = n$.

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen: $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$. Widerspruchsbeweis.
Angenommen, es wäre $k - 1 = n$. Da die Teilmenge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ linear unabhänging ist,

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen: $k \leq n$. Nach I.V. ist $k-1 \leq n$. Widerspruchsbeweis.
Angenommen, es wäre $k-1 = n$. Da die Teilmenge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ linear unabhänging ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene)
$i_1, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., k-1\}$

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen: $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$. Widerspruchsbeweis.
Angenommen, es wäre $k - 1 = n$. Da die Teilmenge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ linear unabhänging ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., k-1\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis von V liefert.

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen: $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$. Widerspruchsbeweis.
Angenommen, es wäre $k - 1 = n$. Da die Teilmenge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ linear unabhänging ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., k-1\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis von V liefert. Also ist $(w_1, ..., w_{k-1})$

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen: $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$. Widerspruchsbeweis.
Angenommen, es wäre $k - 1 = n$. Da die Teilmenge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ linear unabhänging ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., k - 1\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis von V liefert. Also ist $(w_1, ..., w_{k-1})$ eine Basis.

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen: $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$. Widerspruchsbeweis.
Angenommen, es wäre $k - 1 = n$. Da die Teilmenge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ linear unabhänging ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., k-1\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis von V liefert. Also ist $(w_1, ..., w_{k-1})$ eine Basis. Dann ist nach Satz 25

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen: $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$. Widerspruchsbeweis.
Angenommen, es wäre $k - 1 = n$. Da die Teilmenge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ linear unabhänging ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., k-1\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis von V liefert. Also ist $(w_1, ..., w_{k-1})$ eine Basis. Dann ist nach Satz 25 $A = \{w_1, ..., w_k\}$ linear abhängig.

I.S. Z.z.: Die Aussage ist auch für jede Teilmenge A aus k Elementen gültig.
Sei $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig.
Wir zeigen: $k \leq n$. Nach I.V. ist $k - 1 \leq n$. Widerspruchsbeweis.
Angenommen, es wäre $k - 1 = n$. Da die Teilmenge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$ linear unabhänging ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., k - 1\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis von V liefert. Also ist $(w_1, ..., w_{k-1})$ eine Basis. Dann ist nach Satz 25 $A = \{w_1, ..., w_k\}$ linear abhängig. Widerspruch zeigt, dass $k \leq n$

Wir zeigen:

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert.

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$.

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V.

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert.

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k - 1$, Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k - 1$, sonst umnumerieren.

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k - 1$, sonst umnumerieren. Also, ist $A_{neu} := (w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n)$ eine Basis.

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k-1$, sonst umnumerieren. Also, ist $A_{neu} := (w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n)$ eine Basis. Deswegen kann man w_k als Linearkombination darstellen:

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k - 1$, sonst umnumerieren. Also, ist $A_{neu} := (w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n)$ eine Basis. Deswegen kann man w_k als Linearkombination darstellen:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i.$$

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k-1$, sonst umnumerieren. Also, ist $A_{neu} := (w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n)$ eine Basis. Deswegen kann man w_k als Linearkombination darstellen:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i.$$

Eine von Koeffizienten λ_j ist nicht 0,

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k-1$, sonst umnumerieren. Also, ist $A_{neu} := (w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n)$ eine Basis. Deswegen kann man w_k als Linearkombination darstellen:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i.$$

Eine von Koeffizienten λ_j ist nicht 0, da sonst ist

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k - 1$, sonst umnumerieren. Also, ist $A_{neu} := (w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n)$ eine Basis. Deswegen kann man w_k als Linearkombination darstellen:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i.$$

Eine von Koeffizienten λ_j ist nicht 0, da sonst ist $\vec{0} = -w_k + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i$,

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k-1$, sonst umnumerieren. Also, ist $A_{neu} := (w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n)$ eine Basis. Deswegen kann man w_k als Linearkombination darstellen:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i.$$

Eine von Koeffizienten λ_j ist nicht 0, da sonst ist $\vec{0} = -w_k + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i$, was widerspricht dass $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig ist .

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k-1$, sonst umnumerieren. Also, ist $A_{neu} := (w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n)$ eine Basis. Deswegen kann man w_k als Linearkombination darstellen:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i.$$

Eine von Koeffizienten λ_j ist nicht 0, da sonst ist $\vec{0} = -w_k + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i$, was widerspricht dass $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig ist .

Also, $\lambda_j \neq 0$.

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k-1$, sonst umnumerieren. Also, ist $A_{neu} := (w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n)$ eine Basis. Deswegen kann man w_k als Linearkombination darstellen:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i.$$

Eine von Koeffizienten λ_j ist nicht 0, da sonst ist $\vec{0} = -w_k + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i$, was widerspricht dass $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig ist .
Also, $\lambda_j \neq 0$. Nach Austauschlemma 16 wenn wir den entsprechenden v_j gegen w_k austauchen,

Wir zeigen: es gibt $i_1, i_2, ..., i_k$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. Betrachten wir die Menge $\{w_1, ..., w_{k-1}\}$. Da sie linear unabhängig ist, gibt es nach I.V. (paarweise verschiedene) $i_1, i_2, ..., i_{k-1} \in \{1, ..., n\}$ so dass der Austausch von allen v_{i_j} gegen w_j eine Basis liefert. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_{k-1} = k-1$, sonst umnumerieren. Also, ist $A_{neu} := (w_1, ..., w_{k-1}, v_k, ..., v_n)$ eine Basis. Deswegen kann man w_k als Linearkombination darstellen:

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \lambda_i v_i.$$

Eine von Koeffizienten λ_j ist nicht 0, da sonst ist $\vec{0} = -w_k + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i w_i$, was widerspricht dass $\{w_1, ..., w_k\}$ linear unabhängig ist .
Also, $\lambda_j \neq 0$. Nach Austauschlemma 16 wenn wir den entsprechenden v_j gegen w_k austauchen, bekommen wir eine Basis. $\square$

Beweis von Satz 27:

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$.

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\Bigg\{$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\begin{cases} (v_1, ..., v_n) \\ \end{cases}$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_1, ..., v_n) \\ \end{array} \right.$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\begin{cases} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \end{cases}$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\begin{cases} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \end{cases}$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\begin{cases} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \end{cases}$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\begin{cases} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \end{cases}$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \end{array} \right.$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\begin{cases} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{cases}$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\begin{cases} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{cases}$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\begin{cases} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{cases}$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array} \right. \overset{\textit{Austauschsatz}}{\Longrightarrow}$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array} \right. \overset{\textit{Austauschsatz}}{\Rightarrow} n \geq k.$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array} \right. \overset{Austauschsatz}{\Rightarrow} n \geq k.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{\begin{array}{l} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array}\right. \quad \overset{\textit{Austauschsatz}}{\Rightarrow} \quad n \geq k.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (w_1, ..., w_k) \text{ ist eine Basis} \\ \end{array}\right.$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left.\begin{cases} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{cases}\right. \overset{\textit{Austauschsatz}}{\Rightarrow} n \geq k.$$

$$\begin{cases} (w_1, ..., w_k) \text{ ist eine Basis} \\ \{v_1, ..., v_n\} \end{cases}$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{\begin{array}{l} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array}\right. \quad \stackrel{\textit{Austauschsatz}}{\Rightarrow} \quad n \geq k.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (w_1, ..., w_k) \text{ ist eine Basis} \\ \{v_1, ..., v_n\} \end{array}\right.$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{\begin{array}{l} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array}\right. \quad \overset{\textit{Austauschsatz}}{\Rightarrow} \quad n \geq k.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (w_1, ..., w_k) \text{ ist eine Basis} \\ \{v_1, ..., v_n\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array}\right.$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{\begin{array}{l} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array}\right. \overset{\textit{Austauschsatz}}{\Rightarrow} n \geq k.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (w_1, ..., w_k) \text{ ist eine Basis} \\ \{v_1, ..., v_n\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array}\right.$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{\begin{array}{l}(v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis}\\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig}\end{array}\right. \overset{Austauschsatz}{\Longrightarrow} n \geq k.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(w_1, ..., w_k) \text{ ist eine Basis}\\ \{v_1, ..., v_n\} \text{ ist linear unabhängig}\end{array}\right.$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{\begin{array}{l} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array}\right. \overset{\textit{Austauschsatz}}{\Rightarrow} n \geq k.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (w_1, ..., w_k) \text{ ist eine Basis} \\ \{v_1, ..., v_n\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array}\right. \overset{\textit{Austauschsatz}}{\Rightarrow}$$

Beweis von Satz 27: Seien $(v_1, ..., v_n)$ und $(w_1, ..., w_k)$ Basen von $(V, +, \bullet)$. Z.z.: $k = n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (v_1, ..., v_n) \text{ ist eine Basis} \\ \{w_1, ..., w_k\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array} \right. \overset{\textit{Austauschsatz}}{\Longrightarrow} n \geq k.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (w_1, ..., w_k) \text{ ist eine Basis} \\ \{v_1, ..., v_n\} \text{ ist linear unabhängig} \end{array} \right. \overset{\textit{Austauschsatz}}{\Longrightarrow} k \geq n.$$

$\square$

Folgerung (a)

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n.

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis.

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$.

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig.

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen)

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n*. Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w +$$

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0},$$

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n*. Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}, \qquad (*)$$

Dann ist $\mu = 0$,

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}, \qquad (*)$$

Dann ist $\mu = 0$, sonst ist $w = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} v_i$.

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}, \qquad (*)$$

Dann ist $\mu = 0$, sonst ist $w = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} v_i$.
Dann ist $(*)$ eine Linearkombination der Elemente aus $\{v_1, ..., v_n\}$

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}, \qquad (*)$$

Dann ist $\mu = 0$, sonst ist $w = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} v_i$.
Dann ist $(*)$ eine Linearkombination der Elemente aus $\{v_1, ..., v_n\}$ und ist deswegen trivial.

Folgerung (a) *Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$ der Dimension n. Dann ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}, \qquad (*)$$

Dann ist $\mu = 0$, sonst ist $w = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} v_i$.
Dann ist $(*)$ eine Linearkombination der Elemente aus $\{v_1, ..., v_n\}$ und ist deswegen trivial. Also, $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ ist linear unabhängig.
Aber nach Austauschsatz

Folgerung (a) *Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$ der Dimension n. Dann ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}, \qquad (*)$$

Dann ist $\mu = 0$, sonst ist $w = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} v_i$.
Dann ist $(*)$ eine Linearkombination der Elemente aus $\{v_1, ..., v_n\}$ und ist deswegen trivial. Also, $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ ist linear unabhängig.
Aber nach Austauschsatz muss Anzahl der Elemente in $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}, \qquad (*)$$

Dann ist $\mu = 0$, sonst ist $w = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} v_i$.
Dann ist $(*)$ eine Linearkombination der Elemente aus $\{v_1, ..., v_n\}$ und ist deswegen trivial. Also, $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ ist linear unabhängig.
Aber nach Austauschsatz muss Anzahl der Elemente in $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\} \leq n$ sein.

Folgerung (a) *Sei* $\{v_1, ..., v_n\}$ *eine linear unabhängige Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$ *der Dimension* n. *Dann ist* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis.*

Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt $w \in V$, $w \notin \mathrm{span}(\{v_1, ..., v_n\})$. Dann ist $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ linear unabhängig. Tatsächlich, sei eine Linearkombination von (paarweise verschiedenen) Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$

$$\mu w + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}, \qquad (*)$$

Dann ist $\mu = 0$, sonst ist $w = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} v_i$.
Dann ist $(*)$ eine Linearkombination der Elemente aus $\{v_1, ..., v_n\}$ und ist deswegen trivial. Also, $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\}$ ist linear unabhängig.
Aber nach Austauschsatz muss Anzahl der Elemente in $\{v_1, ..., v_n\} \cup \{w\} \leq n$ sein. Widerspruch! $\square$

Anwendung

Anwendung

Frage

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Nein!

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Nein! Tatsächlich, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Nein! Tatsächlich, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis in $\mathbb{R}^2$

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Nein! Tatsächlich, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis in $\mathbb{R}^2$ (heißt Standard-Basis), also $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional,

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Nein! Tatsächlich, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis in $\mathbb{R}^2$ (heißt Standard-Basis), also $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional, also (Satz 27) besteht jede Basis aus 2 Vektoren,

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Nein! Tatsächlich, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis in $\mathbb{R}^2$ (heißt Standard-Basis), also $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional, also (Satz 27) besteht jede Basis aus 2 Vektoren, was hier nicht der Fall ist.

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja!

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional.

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist,

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist.

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist,

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\left\{ \right.$$

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\left\{ \right.$$

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \end{cases}$$

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \qquad +$$

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \qquad +$$

Nach Addition von Gleichungen bekommen wir

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \qquad\qquad +$$

Nach Addition von Gleichungen bekommen wir $2\lambda = 0$,

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \qquad +$$

Nach Addition von Gleichungen bekommen wir $2\lambda = 0$, also $\lambda = 0$.

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \qquad +$$

Nach Addition von Gleichungen bekommen wir $2\lambda = 0$, also $\lambda = 0$. Nach einsetzen $\lambda = 0$ in die erste Gleichung

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \qquad +$$

Nach Addition von Gleichungen bekommen wir $2\lambda = 0$, also $\lambda = 0$. Nach einsetzen $\lambda = 0$ in die erste Gleichung bekommen wir $\mu = 0$.

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \qquad +$$

Nach Addition von Gleichungen bekommen wir $2\lambda = 0$, also $\lambda = 0$. Nach einsetzen $\lambda = 0$ in die erste Gleichung bekommen wir $\mu = 0$. Also, die Linearkombinaiton ist die triviale Linearkombination, i.e. A ist linear unabhängig.

Anwendung

Frage *Ist das Tupel* $A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ *eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional. Wegen Folgerung (a) müssen wir nur zeigen, dass A linear unabhängig ist, i.e. nur die triviale Linearkombination gleich $\vec{0}$ ist. Die Linearkombination mit Koeffizienten λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Falls diese Linearkombination gleich $\vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, muss

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \qquad +$$

Nach Addition von Gleichungen bekommen wir $2\lambda = 0$, also $\lambda = 0$. Nach einsetzen $\lambda = 0$ in die erste Gleichung bekommen wir $\mu = 0$. Also, die Linearkombinaiton ist die triviale Linearkombination, i.e. A ist linear unabhängig.

Nach Folgerung (a) ist dann A eine Basis.

Folgerung (b)

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$.

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine*

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$. *Dann ist* $(w_1, ..., w_n)$ *eine Basis.*

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$. *Dann ist* $(w_1, ..., w_n)$ *eine Basis.*

Beweis.

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$. *Dann ist* $(w_1, ..., w_n)$ *eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$,

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$*. Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$*. Dann ist* $(w_1, ..., w_n)$ *eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}\left(\{w_1, ..., w_n\}\right) = V$, d.h., jedes $v \in V$

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$*. Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$*. Dann ist* $(w_1, ..., w_n)$ *eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}\left(\{w_1, ..., w_n\}\right) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$*. Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$*. Dann ist* $(w_1, ..., w_n)$ *eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist,

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$*. Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$*. Dann ist* $(w_1, ..., w_n)$ *eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$.

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n. \qquad (*)$$

Nach Voraussetzungen ist

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$*. Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$*. Dann ist* $(w_1, ..., w_n)$ *eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$ $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$. *Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$. *Dann ist* $(w_1, ..., w_n)$ *eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$. $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} w_j$).

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$*. Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$*. Dann ist* $(w_1, ..., w_n)$ *eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}\left(\{w_1, ..., w_n\}\right) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n. \qquad (*)$$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$ $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v =$$

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}\,(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$ $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \mu_{nj} w_j$$

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\operatorname{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$. $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^{n} \lambda_i \mu_{ij} w_j$$

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$ $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^n \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^n \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^n \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^n \lambda_i \mu_{ij} w_j$$

Also v ist eine Linearkombintaion der Elemente $w_1, ..., w_n$.

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$*. Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$*. Dann ist* $(w_1, ..., w_n)$ *eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$. $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^{n} \lambda_i \mu_{ij} w_j$$

Also v ist eine Linearkombintaion der Elemente $w_1, ..., w_n$.
Z.z.: $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig.

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$. $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^{n} \lambda_i \mu_{ij} w_j$$

Also v ist eine Linearkombintaion der Elemente $w_1, ..., w_n$.
Z.z.: $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen, sie ist nicht linear unabhängig.

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$ $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^n \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^n \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^n \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^n \lambda_i \mu_{ij} w_j$$

Also v ist eine Linearkombintaion der Elemente $w_1, ..., w_n$.
Z.z.: $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen, sie ist nicht linear unabhängig. Wie wir eben bewiesen haben, ist $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$.

Folgerung (b) *Sei* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis im Vektorraum* $(V, +, \bullet)$*. Für* $\{w_1, ..., w_n\}$ *gelte: jedes* v_i *ist eine Linearkombination von Elementen aus* $\{w_1, ..., w_n\}$*. Dann ist* $(w_1, ..., w_n)$ *eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$ $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^n \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^n \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^n \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^n \lambda_i \mu_{ij} w_j$$

Also v ist eine Linearkombintaion der Elemente $w_1, ..., w_n$.
Z.z.: $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen, sie ist nicht linear unabhängig. Wie wir eben bewiesen haben, ist $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$. Dann gibt es nach Satz 26 aus $\{w_1, ..., w_n\}$,

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$. $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^{n} \lambda_i \mu_{ij} w_j$$

Also v ist eine Linearkombintaion der Elemente $w_1, ..., w_n$.
Z.z.: $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen, sie ist nicht linear unabhängig. Wie wir eben bewiesen haben, ist $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$. Dann gibt es nach Satz 26 aus $\{w_1, ..., w_n\}$, eine Basis A' auswählen.

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}\,(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$ $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^n \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^n \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^n \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^n \lambda_i \mu_{ij} w_j$$

Also v ist eine Linearkombintaion der Elemente $w_1, ..., w_n$.
Z.z.: $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen, sie ist nicht linear unabhängig. Wie wir eben bewiesen haben, ist $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$. Dann gibt es nach Satz 26 aus $\{w_1, ..., w_n\}$, eine Basis A' auswählen. Nach Satz 27 muss diese Teilmenge aus n Elementen bestehen,

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$. $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^{n} \lambda_i \mu_{ij} w_j$$

Also v ist eine Linearkombintaion der Elemente $w_1, ..., w_n$.
Z.z.: $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen, sie ist nicht linear unabhängig. Wie wir eben bewiesen haben, ist $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$. Dann gibt es nach Satz 26 aus $\{w_1, ..., w_n\}$, eine Basis A' auswählen. Nach Satz 27 muss diese Teilmenge aus n Elementen bestehen, weil alle Basen der gleichen Anzahl von Elementen haben.

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$ $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^n \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^n \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^n \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^n \lambda_i \mu_{ij} w_j$$

Also v ist eine Linearkombintaion der Elemente $w_1, ..., w_n$.
Z.z.: $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen, sie ist nicht linear unabhängig. Wie wir eben bewiesen haben, ist $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$. Dann gibt es nach Satz 26 aus $\{w_1, ..., w_n\}$, eine Basis A' auswählen. Nach Satz 27 muss diese Teilmenge aus n Elementen bestehen, weil alle Basen der gleichen Anzahl von Elementen haben. Also, ist
$A' = \{w_1, ..., w_n\}$,

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\operatorname{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$. $(*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^n \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^n \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^n \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^n \lambda_i \mu_{ij} w_j$$

Also v ist eine Linearkombintaion der Elemente $w_1, ..., w_n$.
Z.z.: $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen, sie ist nicht linear unabhängig. Wie wir eben bewiesen haben, ist $\operatorname{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$.
Dann gibt es nach Satz 26 aus $\{w_1, ..., w_n\}$, eine Basis A' auswählen.
Nach Satz 27 muss diese Teilmenge aus n Elementen bestehen, weil alle Basen der gleichen Anzahl von Elementen haben. Also, ist $A' = \{w_1, ..., w_n\}$, und deswegen ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.

Folgerung (b) *Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis im Vektorraum $(V, +, \bullet)$. Für $\{w_1, ..., w_n\}$ gelte: jedes v_i ist eine Linearkombination von Elementen aus $\{w_1, ..., w_n\}$. Dann ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis.*

Beweis. Wir zeigen: $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$, d.h., jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination von Elementen w_i.
Da $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis ist, ist jedes v eine Linearkombination, d.h.
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$. $\qquad (*)$

Nach Voraussetzungen ist jedes v_i eine Linearkombination der Elemente $w_1, ..., w_n$ ist (i.e. $v_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} w_j$). Nach einsetzen in $(*)$ bekommen wir

$$v = \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \mu_{1j} w_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} \mu_{2j} w_j + ... + \lambda_n \sum_{j=1}^{n} \mu_{nj} w_j = \sum_{i,\ j=1}^{n} \lambda_i \mu_{ij} w_j$$

Also v ist eine Linearkombintaion der Elemente $w_1, ..., w_n$.
Z.z.: $\{w_1, ..., w_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen, sie ist nicht linear unabhängig. Wie wir eben bewiesen haben, ist $\mathrm{span}(\{w_1, ..., w_n\}) = V$. Dann gibt es nach Satz 26 aus $\{w_1, ..., w_n\}$, eine Basis A' auswählen. Nach Satz 27 muss diese Teilmenge aus n Elementen bestehen, weil alle Basen der gleichen Anzahl von Elementen haben. Also, ist $A' = \{w_1, ..., w_n\}$, und deswegen ist $(w_1, ..., w_n)$ eine Basis. $\square$

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz)

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum,

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$,

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig.

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$,

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$, so dass $B = (w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_r)$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$, so dass $B = (w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_r)$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz)

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$, so dass $B = (w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_r)$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V, +, \bullet)$ läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$, so dass $B = (w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_r)$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V, +, \bullet)$ läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis:

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$, so dass $B = (w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_r)$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V, +, \bullet)$ läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis: Sei $B = (v_1, \cdots, v_r)$ eine Basis von V.

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$, so dass $B = (w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_r)$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V, +, \bullet)$ läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis: Sei $B = (v_1, \cdots, v_r)$ eine Basis von V. Dann gibt es nach dem Austauschsatz

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$, so dass $B = (w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_r)$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V, +, \bullet)$ läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis: Sei $B = (v_1, \cdots, v_r)$ eine Basis von V. Dann gibt es nach dem Austauschsatz Vektoren $v_{i_1}, ..., v_{i_n}$,

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$, so dass $B = (w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_r)$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V, +, \bullet)$ läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis: Sei $B = (v_1, \cdots, v_r)$ eine Basis von V. Dann gibt es nach dem Austauschsatz Vektoren $v_{i_1}, ..., v_{i_n}$, die gegen $w_1, ..., w_n$ ausgetauscht werden können,

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$, so dass $B = (w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_r)$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V, +, \bullet)$ läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis: Sei $B = (v_1, \cdots, v_r)$ eine Basis von V. Dann gibt es nach dem Austauschsatz Vektoren $v_{i_1}, ..., v_{i_n}$, die gegen $w_1, ..., w_n$ ausgetauscht werden können, so dass nach etwaigem Umnummerieren von Vektoren $B = (w_1, ..., w_n, v_{n+1}, ..., v_r)$

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V,+,\bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$, so dass $B = (w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_r)$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V,+,\bullet)$ läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis: Sei $B = (v_1, \cdots, v_r)$ eine Basis von V. Dann gibt es nach dem Austauschsatz Vektoren $v_{i_1}, ..., v_{i_n}$, die gegen $w_1, ..., w_n$ ausgetauscht werden können, so dass nach etwaigem Umnummerieren von Vektoren $B = (w_1, ..., w_n, v_{n+1}, ..., v_r)$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c) (Basisergänzungssatz) Sei $(V, +, \bullet)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $r = dim(V)$, und seien $\{w_1, \cdots, w_n\}$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $w_{n+1}, \cdots w_r$, so dass $B = (w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}, \cdots, w_r)$ eine Basis von V ist.

Folgerung (c') (Basisergänzungssatz) Jede linear unabhängige Teilmenge eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums $(V, +, \bullet)$ läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis: Sei $B = (v_1, \cdots, v_r)$ eine Basis von V. Dann gibt es nach dem Austauschsatz Vektoren $v_{i_1}, ..., v_{i_n}$, die gegen $w_1, ..., w_n$ ausgetauscht werden können, so dass nach etwaigem Umnummerieren von Vektoren $B = (w_1, ..., w_n, v_{n+1}, ..., v_r)$ eine Basis von V ist. $\square$

Anwendung

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in* $\mathbb{R}^2$*?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Ja!

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional.

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional.
Jedes Element der Standard-Basis ist eine Linearkombination der Elemente aus A:

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional.
Jedes Element der Standard-Basis ist eine Linearkombination der Elemente aus A:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional.
Jedes Element der Standard-Basis ist eine Linearkombination der Elemente aus A:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional.
Jedes Element der Standard-Basis ist eine Linearkombination der Elemente aus A:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional.
Jedes Element der Standard-Basis ist eine Linearkombination der Elemente aus A:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Anwendung

Frage *Ist das folgende Tupel A eine Basis in $\mathbb{R}^2$?*

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Ja! Tatsächlich, $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional.
Jedes Element der Standard-Basis ist eine Linearkombination der Elemente aus A:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Nach Folgerung (b) ist dann A eine Basis.

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)

Gegeben ein Tupel $A = (v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren in $\mathbb{K}^n$, wie kan mann verstehen ob es eine Basis ist?

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)

Gegeben ein Tupel $A = (v_1, \dots, v_k)$ von Vektoren in $\mathbb{K}^n$, wie kan mann verstehen ob es eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 27).

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)

Gegeben ein Tupel $A = (v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren in $\mathbb{K}^n$, wie kan mann verstehen ob es eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 27).

Angenommen $k = n$. Dann entweder benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)

Gegeben ein Tupel $A = (v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren in $\mathbb{K}^n$, wie kan mann verstehen ob es eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 27).

Angenommen $k = n$. Dann entweder benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist ein System von n linearen Gleichungen auf n unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$;

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)

Gegeben ein Tupel $A = (v_1, ..., v_k)$ von Vektoren in $\mathbb{K}^n$, wie kan mann verstehen ob es eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 27).

Angenommen $k = n$. Dann entweder benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist ein System von n linearen Gleichungen auf n unbekannten $\lambda_1, ..., \lambda_n$; man löst sie.

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)

Gegeben ein Tupel $A = (v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren in $\mathbb{K}^n$, wie kan mann verstehen ob es eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 27).

Angenommen $k = n$. Dann entweder benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist ein System von n linearen Gleichungen auf n unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; man löst sie. Gibt es eine Lösung $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$,

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)
Gegeben ein Tupel $A = (v_1, ..., v_k)$ von Vektoren in $\mathbb{K}^n$, wie kan mann verstehen ob es eine Basis ist?
Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 27).
Angenommen $k = n$. Dann entweder benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist ein System von n linearen Gleichungen auf n unbekannten $\lambda_1, ..., \lambda_n$; man löst sie. Gibt es eine Lösung $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$, so ist A linear abhängig,

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)

Gegeben ein Tupel $A = (v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren in $\mathbb{K}^n$, wie kan mann verstehen ob es eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 27).

Angenommen $k = n$. Dann entweder benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist ein System von n linearen Gleichungen auf n unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; man löst sie. Gibt es eine Lösung $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, so ist A linear abhängig, also keine Basis.

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)

Gegeben ein Tupel $A = (v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren in $\mathbb{K}^n$, wie kan mann verstehen ob es eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 27).

Angenommen $k = n$. Dann entweder benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist ein System von n linearen Gleichungen auf n unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; man löst sie. Gibt es eine Lösung $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, so ist A linear abhängig, also keine Basis. Gibt es genau eine Lösung

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)

Gegeben ein Tupel $A = (v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren in $\mathbb{K}^n$, wie kan mann verstehen ob es eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 27).

Angenommen $k = n$. Dann entweder benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist ein System von n linearen Gleichungen auf n unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; man löst sie. Gibt es eine Lösung $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, so ist A linear abhängig, also keine Basis. Gibt es genau eine Lösung $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$,

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)

Gegeben ein Tupel $A = (v_1, \dots, v_k)$ von Vektoren in $\mathbb{K}^n$, wie kan mann verstehen ob es eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 27).

Angenommen $k = n$. Dann entweder benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist ein System von n linearen Gleichungen auf n unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; man löst sie. Gibt es eine Lösung $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$, so ist A linear abhängig, also keine Basis. Gibt es genau eine Lösung $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$, so ist A linear unabhängig

Wie Antwortet man auf die Frage: ist ein explizites Tupel in $\mathbb{K}^n$ eine Basis?

$\mathbb{K}^n$ ist n-dimensional, weil $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis ist. (heißt Standard-Basis von $\mathbb{K}^n$)

Gegeben ein Tupel $A = (v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren in $\mathbb{K}^n$, wie kan mann verstehen ob es eine Basis ist?

Falls $k \neq n$ ist, ist A keine Basis (Satz 27).

Angenommen $k = n$. Dann entweder benutzt man Folgerung (a):

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

ist ein System von n linearen Gleichungen auf n unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; man löst sie. Gibt es eine Lösung $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, so ist A linear abhängig, also keine Basis. Gibt es genau eine Lösung $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$, so ist A linear unabhängig und nach Folgerung (a) eine Basis.

Oder benutzt mann Folgerung (b): Man versucht alle Elemente der Standard-Basis als Linearkombinationen darzustellen.

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 $(v_1, \dots, v_n)$ *sei eine Basis im* $\mathbb{K}$*-Vektorraum*

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 $(v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis im* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$,

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$.*

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 $(v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis im* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. *Die* *Koordinaten* *des Vektors* w *in dieser Basis*

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die* *Koordinaten* *des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ *so dass*

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die* *Koordinaten* *des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ *so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$(v_1, \ldots, v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 $(v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis im* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. *Die* *Koordinaten* *des Vektors* w *in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ *so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i,

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 $(v_1, ..., v_n)$ *sei eine Basis im* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. *Die* *Koordinaten* *des Vektors* w *in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ *so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$(v_1, \dots, v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die* *Koordinaten* *des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ *so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dann die Koordinaten eines Vektors

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ *so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dann die Koordinaten eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dann die Koordinaten eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist das Paar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ *so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dann die Koordinaten eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist das Paar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, weil

Koordinaten in einer Basis

Definition 26 *$(v_1, ..., v_n)$ sei eine Basis im $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$, $w \in V$. Die Koordinaten des Vektors w in dieser Basis ist die n-Tupel von Skalaren* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ *so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = w.$$

Bemerkung Nach der Definition von Basis gibt es solche Skalaren λ_i, nach Satz 25 sind sie eindeutig.

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Basis. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dann die Koordinaten eines Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist das Paar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, weil

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$