Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper ,

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement $(1 \cdot a = a)$,

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement ($1 \cdot a = a$), 0 Nullelement

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement $(1 \cdot a = a)$, 0 Nullelement $(0 + a = a)$.

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement $(1 \cdot a = a)$, 0 Nullelement $(0 + a = a)$.

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement $(1 \cdot a = a)$, 0 Nullelement $(0 + a = a)$.

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement $(1 \cdot a = a)$, 0 Nullelement $(0 + a = a)$.

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$ wobei

- $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit Neutralelement $\vec{0}$ ist.

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement $(1 \cdot a = a)$, 0 Nullelement $(0 + a = a)$.

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$ wobei

- $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit Neutralelement $\vec{0}$ ist.
- „$\bullet$“ ist eine Multiplikation von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement ($1 \cdot a = a$), 0 Nullelement ($0 + a = a$).

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$ wobei

- $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit Neutralelement $\vec{0}$ ist.
- „$\bullet$“ ist eine Multiplikation von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ mit Eigenschaften V1–V4.

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement ($1 \cdot a = a$), 0 Nullelement ($0 + a = a$).

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$ wobei

- $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit Neutralelement $\vec{0}$ ist.
- „$\bullet$" ist eine Multiplikation von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ mit Eigenschaften V1–V4.

Rechenregeln:

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement ($1 \cdot a = a$), 0 Nullelement ($0 + a = a$).

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$ wobei

- $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit Neutralelement $\vec{0}$ ist.
- „$\bullet$" ist eine Multiplikation von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ mit Eigenschaften V1–V4.

Rechenregeln: (Lemma 10 – Lemma 14)

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement $(1 \cdot a = a)$, 0 Nullelement $(0 + a = a)$.

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$ wobei

- $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit Neutralelement $\vec{0}$ ist.
- „$\bullet$" ist eine Multiplikation von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ mit Eigenschaften V1–V4.

Rechenregeln: (Lemma 10 – Lemma 14)

- $0v = \vec{0}$

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement $(1 \cdot a = a)$, 0 Nullelement $(0 + a = a)$.

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$ wobei

- $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit Neutralelement $\vec{0}$ ist.
- „$\bullet$“ ist eine Multiplikation von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ mit Eigenschaften V1–V4.

Rechenregeln: (Lemma 10 – Lemma 14)

- $0v = \vec{0}$
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement $(1 \cdot a = a)$, 0 Nullelement $(0 + a = a)$.

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$ wobei

- $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit Neutralelement $\vec{0}$ ist.
- „$\bullet$“ ist eine Multiplikation von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ mit Eigenschaften V1–V4.

Rechenregeln: (Lemma 10 – Lemma 14)

- $0v = \vec{0}$
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- Ist $\lambda v = \vec{0}$,

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement $(1 \cdot a = a)$, 0 Nullelement $(0 + a = a)$.

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$ wobei

- $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit Neutralelement $\vec{0}$ ist.
- „$\bullet$“ ist eine Multiplikation von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ mit Eigenschaften V1–V4.

Rechenregeln: (Lemma 10 – Lemma 14)

- $0v = \vec{0}$
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement ($1 \cdot a = a$), 0 Nullelement ($0 + a = a$).

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$ wobei

- $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit Neutralelement $\vec{0}$ ist.
- „$\bullet$“ ist eine Multiplikation von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ mit Eigenschaften V1–V4.

Rechenregeln: (Lemma 10 – Lemma 14)

- $0v = \vec{0}$
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$
- $-1 \bullet v = -v$

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement $(1 \cdot a = a)$, 0 Nullelement $(0 + a = a)$.

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$ wobei

- $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit Neutralelement $\vec{0}$ ist.
- „$\bullet$" ist eine Multiplikation von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ mit Eigenschaften V1–V4.

Rechenregeln: (Lemma 10 – Lemma 14)

- $0v = \vec{0}$
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$
- $-1 \bullet v = -v$ (wobei $-v$ das inverse Element zu v bzgl. „$+$" ist)
- Ist $\lambda v = \mu v$ für ein $v \neq \vec{0}$,

Wiederholung: Vektoräumen und Rechenregeln

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper , 1 Einselement $(1 \cdot a = a)$, 0 Nullelement $(0 + a = a)$.

$\mathbb{K}-$ Vektorraum ist $(V, +, \bullet)$ wobei

- $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe mit Neutralelement $\vec{0}$ ist.
- „$\bullet$“ ist eine Multiplikation von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ mit Eigenschaften V1–V4.

Rechenregeln: (Lemma 10 – Lemma 14)

- $0v = \vec{0}$
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- Ist $\lambda v = \vec{0}$, so ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$
- $-1 \bullet v = -v$ (wobei $-v$ das inverse Element zu v bzgl. „$+$“ ist)
- Ist $\lambda v = \mu v$ für ein $v \neq \vec{0}$, so ist $\lambda = \mu$.

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp:

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$,

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4}$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}, \ \binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$.

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\binom{1 + 2 \cdot i}{2 - \frac{1}{2} \cdot i}$,

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot i \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 + i \\ 4 \end{pmatrix}$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}, \ \binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\binom{1+2\cdot i}{2-\frac{1}{2}\cdot i}, \ \binom{3+i}{4} \in \mathbb{C}^2$.

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot i \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 + i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$:

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\binom{1+2\cdot i}{2-\frac{1}{2}\cdot i}$, $\binom{3+i}{4} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}, \ \binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1+2\cdot i \\ 2-\frac{1}{2}\cdot i \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 3+i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot i \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 + i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1+2\cdot i \\ 2-\frac{1}{2}\cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3+i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp:

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\binom{1+2\cdot i}{2-\frac{1}{2}\cdot i}$, $\binom{3+i}{4} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2}$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1+2\cdot i \\ 2-\frac{1}{2}\cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3+i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} =$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot i \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 + i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \begin{pmatrix} 1 + 3 \\ 2 + 4 \end{pmatrix} =$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1+2\cdot i \\ 2-\frac{1}{2}\cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3+i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot i \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 + i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal:

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}, \ \binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot i \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot i \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 3 + i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot i \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 + i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1+2\cdot i \\ 2-\frac{1}{2}\cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3+i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1+2\cdot i \\ 2-\frac{1}{2}\cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3+i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot i \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 + i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Bsp:

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot i \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 + i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Bsp: $2 \bullet \binom{1}{2}$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\binom{1+2\cdot i}{2-\frac{1}{2}\cdot i}$, $\binom{3+i}{4} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Bsp: $2 \bullet \binom{1}{2} = \binom{2\cdot 1}{2\cdot 2} =$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\binom{1+2\cdot i}{2-\frac{1}{2}\cdot i}$, $\binom{3+i}{4} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Bsp: $2 \bullet \binom{1}{2} = \binom{2\cdot 1}{2\cdot 2} = \binom{2}{4}$,

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}, \ \binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\binom{1+2\cdot i}{2-\frac{1}{2}\cdot i}, \ \binom{3+i}{4} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Bsp: $2 \bullet \binom{1}{2} = \binom{2\cdot 1}{2\cdot 2} = \binom{2}{4}, \quad i \bullet \binom{1+2\cdot i}{2-\frac{1}{2}\cdot i}$

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot i \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 + i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Bsp: $2 \bullet \binom{1}{2} = \binom{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \binom{2}{4}$, $\quad i \bullet \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot i \\ 2 - \frac{1}{2} \cdot i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \cdot (1 + 2 \cdot i) \\ i \cdot (2 - \frac{1}{2} \cdot i) \end{pmatrix} =$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\binom{1+2\cdot i}{2-\frac{1}{2}\cdot i}$, $\binom{3+i}{4} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Bsp: $2 \bullet \binom{1}{2} = \binom{2\cdot 1}{2 \cdot 2} = \binom{2}{4}$, $\quad i \bullet \binom{1+2\cdot i}{2-\frac{1}{2}\cdot i} = \binom{i\cdot(1+2\cdot i)}{i\cdot(2-\frac{1}{2}\cdot i)} = \binom{-2+i}{\frac{1}{2}+2\cdot i}$.

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}, \ \binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1+2\cdot i \\ 2-\frac{1}{2}\cdot i \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 3+i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Bsp: $2 \bullet \binom{1}{2} = \binom{2\cdot 1}{2\cdot 2} = \binom{2}{4}$, $\quad i \bullet \begin{pmatrix} 1+2\cdot i \\ 2-\frac{1}{2}\cdot i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\cdot(1+2\cdot i) \\ i\cdot(2-\frac{1}{2}\cdot i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+i \\ \frac{1}{2}+2\cdot i \end{pmatrix}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +, \bullet)$

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}, \ \binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1+2\cdot i \\ 2-\frac{1}{2}\cdot i \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 3+i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Bsp: $2 \bullet \binom{1}{2} = \binom{2\cdot 1}{2\cdot 2} = \binom{2}{4}, \quad i \bullet \begin{pmatrix} 1+2\cdot i \\ 2-\frac{1}{2}\cdot i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\cdot(1+2\cdot i) \\ i\cdot(2-\frac{1}{2}\cdot i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+i \\ \frac{1}{2}+2\cdot i \end{pmatrix}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +, \bullet)$ ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum.

$\mathbb{K}^n$ als Hauptbeispiel

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Bsp: $\binom{1}{2}$, $\binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$. **Bsp:** $\begin{pmatrix} 1+2\cdot i \\ 2-\frac{1}{2}\cdot i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3+i \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Addition in $\mathbb{K}^n$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.

Bsp: $\binom{1}{2} + \binom{3}{4} = \binom{1+3}{2+4} = \binom{4}{6}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Elementen von $\mathbb{K}$ und von $\mathbb{K}^n$:

$$\lambda \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

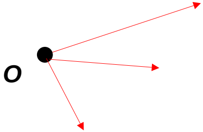
Bsp: $2 \bullet \binom{1}{2} = \binom{2\cdot 1}{2\cdot 2} = \binom{2}{4}$, $\quad i \bullet \begin{pmatrix} 1+2\cdot i \\ 2-\frac{1}{2}\cdot i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\cdot(1+2\cdot i) \\ i\cdot(2-\frac{1}{2}\cdot i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+i \\ \frac{1}{2}+2\cdot i \end{pmatrix}$.

Letztes Mal: $(\mathbb{K}^n, +, \bullet)$ ist ein $\mathbb{K}-$Vektorraum.

Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

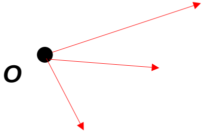
Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.



Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

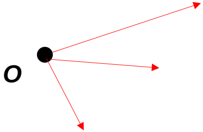
Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.



Begegnet sind Ihnen Vektoren in Geometrie,

Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

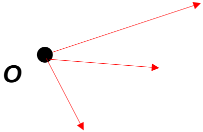
Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.



Begegnet sind Ihnen Vektoren in Geometrie, in der Physik, wo z.B. Kraft,

Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

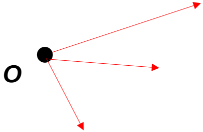
Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.



Begegnet sind Ihnen Vektoren in Geometrie, in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke,

Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

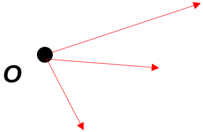
Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.



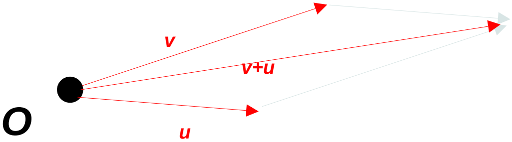
Begegnet sind Ihnen Vektoren in Geometrie, in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.



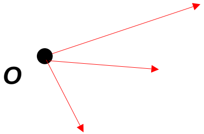
Begegnet sind Ihnen Vektoren in Geometrie, in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Vektoren beschrieben werden.



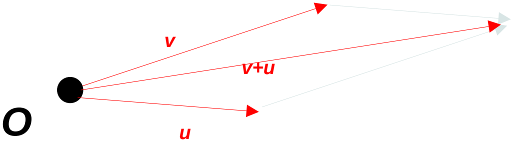
Addition von Vektoren:

Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.



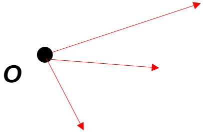
Begegnet sind Ihnen Vektoren in Geometrie, in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Vektoren beschrieben werden.



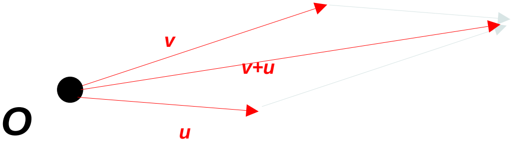
Addition von Vektoren:Parallelogrammregel.

Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.

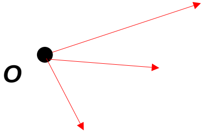


Begegnet sind Ihnen Vektoren in Geometrie, in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Vektoren beschrieben werden.

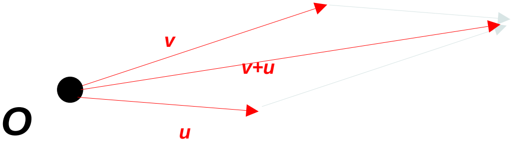


Addition von Vektoren:Parallelogrammregel. $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe.

Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.



Begegnet sind Ihnen Vektoren in Geometrie, in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Vektoren beschrieben werden.

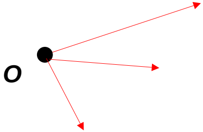


Addition von Vektoren:Parallelogrammregel. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

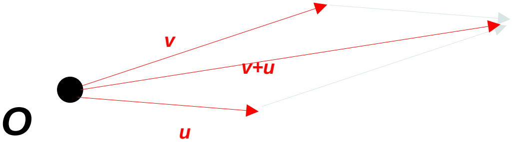
Multiplikation $\bullet$ von Skalaren $\in$ $\mathbb{R}$ und Vektoren:

Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.



Begegnet sind Ihnen Vektoren in Geometrie, in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Vektoren beschrieben werden.

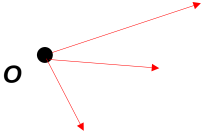


Addition von Vektoren:Parallelogrammregel. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

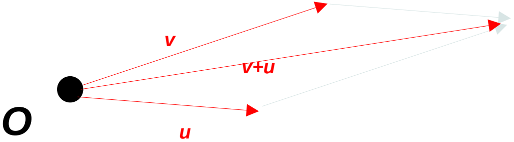
Multiplikation $\bullet$ von Skalaren $\in$ $\mathbb{R}$ und Vektoren: Streckungen/Stauchungen.

Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.

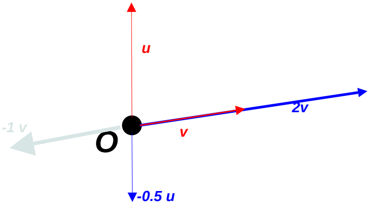


Begegnet sind Ihnen Vektoren in Geometrie, in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Vektoren beschrieben werden.



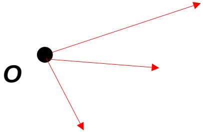
Addition von Vektoren:Parallelogrammregel. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Skalaren $\in \mathbb{R}$ und Vektoren: Streckungen/Stauchungen.

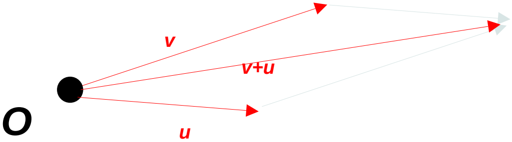


Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.

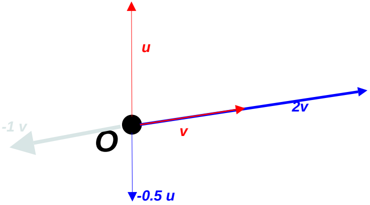


Begegnet sind Ihnen Vektoren in Geometrie, in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Vektoren beschrieben werden.



Addition von Vektoren: Parallelogrammregel. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

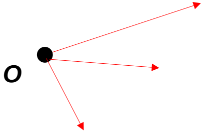
Multiplikation $\bullet$ von Skalaren $\in \mathbb{R}$ und Vektoren: Streckungen/Stauchungen.



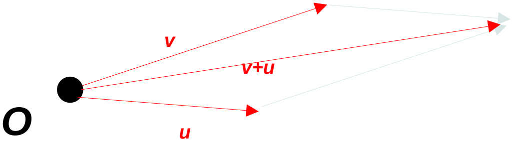
Axiomen V1 – V4 :

Geometrische Vektoren bilden ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

Sei O ein Punkt auf der Ebene. Vektoren (mit Anfangspunkt O) sind die geordnete Strecken mit Anfangspunkt O.

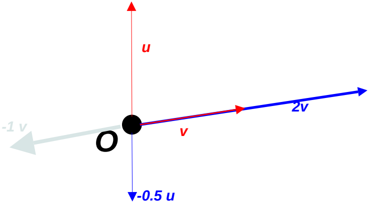


Begegnet sind Ihnen Vektoren in Geometrie, in der Physik, wo z.B. Kraft, elektrische Feldstärke, Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Vektoren beschrieben werden.



Addition von Vektoren:Parallelogrammregel. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Multiplikation $\bullet$ von Skalaren $\in$ $\mathbb{R}$ und Vektoren: Streckungen/Stauchungen.



Axiomen V1 – V4 : einfache geometrische Überlegungen.

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V,

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \implies \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \implies \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp:

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \implies \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \implies \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit.

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit. $\binom{x_1}{0} + \binom{x_2}{0} =$

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit. $\binom{x_1}{0} + \binom{x_2}{0} = \binom{x_1 + x_2}{0}$

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit. $\binom{x_1}{0} + \binom{x_2}{0} = \binom{x_1 + x_2}{0} \in U$.

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit. $\binom{x_1}{0} + \binom{x_2}{0} = \binom{x_1 + x_2}{0} \in U$.
- Abg. bzgl. Mult. mit Skalaren

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit. $\binom{x_1}{0} + \binom{x_2}{0} = \binom{x_1 + x_2}{0} \in U$.
- Abg. bzgl. Mult. mit Skalaren $\lambda \bullet \binom{x}{0}$

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit. $\binom{x_1}{0} + \binom{x_2}{0} = \binom{x_1 + x_2}{0} \in U$.
- Abg. bzgl. Mult. mit Skalaren $\lambda \bullet \binom{x}{0} = \binom{\lambda \cdot x}{0} \in U$.

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit. $\binom{x_1}{0} + \binom{x_2}{0} = \binom{x_1 + x_2}{0} \in U$.
- Abg. bzgl. Mult. mit Skalaren $\lambda \bullet \binom{x}{0} = \binom{\lambda \cdot x}{0} \in U$.

Satz 21 – Wiederholung

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \Longrightarrow \forall\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit. $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.
- Abg. bzgl. Mult. mit Skalaren $\lambda \bullet \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.

Satz 21 – Wiederholung Die Lösungsmenge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$$ der Gleichung

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0,$

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit. $\binom{x_1}{0} + \binom{x_2}{0} = \binom{x_1 + x_2}{0} \in U$.
- Abg. bzgl. Mult. mit Skalaren $\lambda \bullet \binom{x}{0} = \binom{\lambda \cdot x}{0} \in U$.

Satz 21 – Wiederholung Die Lösungsmenge

$L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$ der Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, ist ein Untervektorraum in $\mathbb{K}^n$.

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \implies \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.

Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit. $\binom{x_1}{0} + \binom{x_2}{0} = \binom{x_1 + x_2}{0} \in U$.
- Abg. bzgl. Mult. mit Skalaren $\lambda \bullet \binom{x}{0} = \binom{\lambda \cdot x}{0} \in U$.

Satz 21 – Wiederholung Die Lösungsmenge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$$ der Gleichung

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, ist ein Untervektorraum in $\mathbb{K}^n$.

Bemerkung:

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \implies \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit. $\binom{x_1}{0} + \binom{x_2}{0} = \binom{x_1 + x_2}{0} \in U$.
- Abg. bzgl. Mult. mit Skalaren $\lambda \bullet \binom{x}{0} = \binom{\lambda \cdot x}{0} \in U$.

Satz 21 – Wiederholung Die Lösungsmenge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0 \right\}$$ der Gleichung

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$, ist ein Untervektorraum in $\mathbb{K}^n$.

Bemerkung: Der Untervektorraum U im Bsp. vorher kann man mit

Hilfe von Satz 21 bekommen:

Wiederholung: Untervektorraum

Untervektorraum von $(V, +, \bullet)$ ist eine Teilmenge U von V, die abgeschlossen bzgl.

- Addition (d.h. $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$)
- Multiplikation mit Skalaren ist (d.h. $u \in U \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda u \in U$)

Bsp: In $\mathbb{K}^2$ betrachte $U := \left\{ \binom{x}{0} \mid x \in \mathbb{K} \right\}$.
Diese Menge ist ein Untervektorraum:

- Abg. bzgl. Addit. $\binom{x_1}{0} + \binom{x_2}{0} = \binom{x_1 + x_2}{0} \in U$.
- Abg. bzgl. Mult. mit Skalaren $\lambda \bullet \binom{x}{0} = \binom{\lambda \cdot x}{0} \in U$.

Satz 21 – Wiederholung Die Lösungsmenge

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0 \right\}$$ der Gleichung

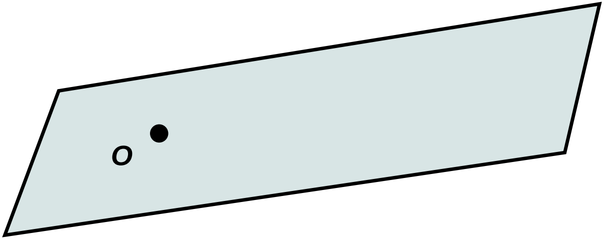
$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$, ist ein Untervektorraum in $\mathbb{K}^n$.

Bemerkung: Der Untervektorraum U im Bsp. vorher kann man mit Hilfe von Satz 21 bekommen: $U = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{K}^2 \mid \underbrace{0}_{a_1} \cdot x + \underbrace{1}_{a_2} \cdot y = 0 \right\}$.

Geometrisches Beispiel vom Untervektorraum

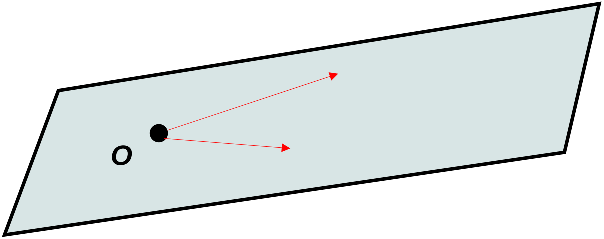
Geometrisches Beispiel vom Untervektorraum

O liege auf einer Ebene im 3-d-Raum.



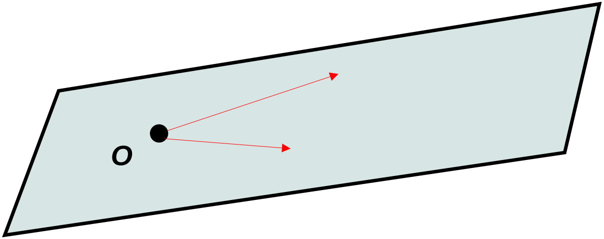
Geometrisches Beispiel vom Untervektorraum

O liege auf einer Ebene im 3-d-Raum. U bestehe aus Vektoren, deren Anfangspunkt O ist, und Endpunkt auch auf der Ebene liegt.



Geometrisches Beispiel vom Untervektorraum

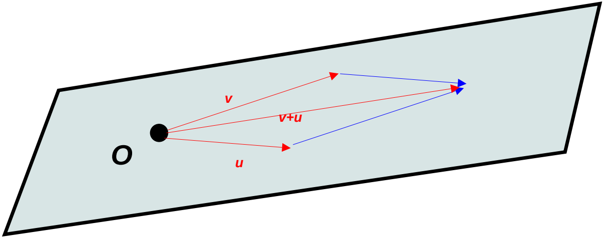
O liege auf einer Ebene im 3-d-Raum. U bestehe aus Vektoren, deren Anfangspunkt O ist, und Endpunkt auch auf der Ebene liegt.



Die Menge U ist abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{R}$.

Geometrisches Beispiel vom Untervektorraum

O liege auf einer Ebene im 3-d-Raum. U bestehe aus Vektoren, deren Anfangspunkt O ist, und Endpunkt auch auf der Ebene liegt.



Die Menge U ist abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation mit Skalaren $\in \mathbb{R}$.

Wiederholung:

Satz 22

Wiederholung:

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum

Wiederholung:

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Wiederholung:

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)

Satz 23

Wiederholung:

Satz 22 Ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzgl. induzierten Multiplikation)
Satz 23 Schnittmenge von Untervektorraumen eines $\mathbb{K}$-Vektorraums ist auch ein Untervektorraum

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$v_1 \quad + \quad v_2 + v_3 \quad + \dots + \quad v_{m-1} + v_m$$

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$(\; v_1 \; + \; (v_2 + v_3 \;)) + \ldots + \; (v_{m-1} + v_m \quad)$$

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$(v_1 \quad + (\; v_2 + v_3 \qquad + \ldots + (\; v_{m-1} + v_m \qquad))$$

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$v_1 \quad + \quad v_2 + v_3 \quad + \ldots + \quad v_{m-1} + v_m$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern)

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$v_1 \ + \ \ v_2 + v_3 \ \ \ + \ldots + \ \ v_{m-1} + v_m$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also, von den Plätzen wo sie stehen) ab.

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$v_3 + \quad v_2 + v_1 \quad + \ldots + \quad v_m \quad + v_{m-1}$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also, von den Plätzen wo sie stehen) ab.

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$v_1 \quad + \quad v_2 + v_3 \quad + \ldots + \quad v_{m-1} + v_m$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also, von den Plätzen wo sie stehen) ab.

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$v_1 \quad + \quad v_2 + v_3 \quad + \ldots + \quad v_{m-1} + v_m \qquad (*)$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also, von den Plätzen wo sie stehen) ab.

Ab Jetzt werden wir die Klammern womöglich weglassen.

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$v_1 \quad + \quad v_2 + v_3 \quad + \ldots + \quad v_{m-1} + v_m \qquad (*)$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also, von den Plätzen wo sie stehen) ab.

Ab Jetzt werden wir die Klammern womöglich weglassen.

Bezeichnung: Statt Summe von mehreren Elementen werden wir das Zeichen $\sum$ verwenden:

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$v_1 \quad + \quad v_2 + v_3 \quad + \ldots + \quad v_{m-1} + v_m \qquad (*)$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also, von den Plätzen wo sie stehen) ab.

Ab Jetzt werden wir die Klammern womöglich weglassen.

Bezeichnung: Statt Summe von mehreren Elementen werden wir das Zeichen $\sum$ verwenden:
z.B.

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$v_1 \;+\; v_2 + v_3 \;+ \ldots +\; v_{m-1} + v_m \qquad (*)$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also, von den Plätzen wo sie stehen) ab.

Ab Jetzt werden wir die Klammern womöglich weglassen.

Bezeichnung: Statt Summe von mehreren Elementen werden wir das Zeichen $\sum$ verwenden:
z.B. $(*) = \sum_{i=1}^{m} v_i$

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$v_1 \ + \quad v_2 + v_3 \quad + \ldots + \quad v_{m-1} + v_m \qquad (*)$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also, von den Plätzen wo sie stehen) ab.

Ab Jetzt werden wir die Klammern womöglich weglassen.

Bezeichnung: Statt Summe von mehreren Elementen werden wir das Zeichen $\sum$ verwenden:
z.B. $(*) = \sum_{i=1}^{m} v_i$
z.B.

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$v_1 \quad + \quad v_2 + v_3 \quad + \ldots + \quad v_{m-1} + v_m \qquad (*)$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also, von den Plätzen wo sie stehen) ab.

Ab Jetzt werden wir die Klammern womöglich weglassen.

Bezeichnung: Statt Summe von mehreren Elementen werden wir das Zeichen $\sum$ verwenden:
z.B. $(*) = \sum_{i=1}^{m} v_i$
z.B. $\sum_{i=2}^{4} A_i :=$

Die $\sum$– Bezeichnung für die Summe (Vorl. Fricke)

In einem Vektorraum ist die Addition assoziativ und kommutativ
Deswegen hängt die Ergebnis

$$v_1 \quad + \quad v_2 + v_3 \quad + \ldots + \quad v_{m-1} + v_m \qquad (*)$$

weder von der Reihenfolge der Addition (also, von Klammern) noch von der Reihenfolge der Elemente (also, von den Plätzen wo sie stehen) ab.

Ab Jetzt werden wir die Klammern womöglich weglassen.

Bezeichnung: Statt Summe von mehreren Elementen werden wir das Zeichen $\sum$ verwenden:
z.B. $(*) = \sum_{i=1}^{m} v_i$
z.B. $\sum_{i=2}^{4} A_i := A_2 + A_3 + A_4$

Die und eine Linearkombination

Die und eine Linearkombination

Def. 19

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei* $k \in \mathbb{N}$,

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ und $v_1, ..., v_k \in V$.*

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ *und* $v_1, ..., v_k \in V$.
Die Linearkombination von $v_1, ..., v_k$ *mit Koeffizienten* $\lambda_1, ..., \lambda_k$

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ *und* $v_1, ..., v_k \in V$.
Die *Linearkombination* *von* $v_1, ..., v_k$ *mit Koeffizienten* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *ist der Vektor*

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ *und* $v_1, ..., v_k \in V$.
Die Linearkombination von $v_1, ..., v_k$ *mit Koeffizienten* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *ist der Vektor*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ *und* $v_1, \dots, v_k \in V$.
Die *Linearkombination* *von* $v_1, \dots, v_k$ *mit Koeffizienten* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *ist der Vektor*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Bsp: *Die Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *mit Koeffizieten*

$-2, \quad 1$ *ist*

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ *und* $v_1, ..., v_k \in V$.
Die *Linearkombination* *von* $v_1, ..., v_k$ *mit Koeffizienten* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *ist der Vektor*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Bsp: *Die Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *mit Koeffizieten* -2, 1 *ist* $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ *und* $v_1, ..., v_k \in V$.
Die *Linearkombination* *von* $v_1, ..., v_k$ *mit Koeffizienten* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *ist der Vektor*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Bsp: *Die Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *mit Koeffizieten* $-2, \;\; 1$ *ist* $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Def. 20

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ *und* $v_1, ..., v_k \in V$.
Die *Linearkombination* *von* $v_1, ..., v_k$ *mit Koeffizienten* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *ist der Vektor*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Bsp: *Die Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *mit Koeffizieten* $-2,\ 1$ *ist* $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Def. 20 *Man sagt dass ein Vektor* v *eine Linearkombination der Vektoren* $v_1, ..., v_m$ *ist,*

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ *und* $v_1, ..., v_k \in V$.
Die *Linearkombination* *von* $v_1, ..., v_k$ *mit Koeffizienten* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *ist der Vektor*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Bsp: *Die Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *mit Koeffizieten* $-2,\ 1$ *ist* $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Def. 20 *Man sagt dass ein Vektor* v *eine Linearkombination der Vektoren* $v_1, ..., v_m$ *ist, falls es* $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ *gibt so dass*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = v$$

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ und $v_1, ..., v_k \in V$.*
Die Linearkombination von $v_1, ..., v_k$ mit Koeffizienten $\lambda_1, ..., \lambda_k$ ist der Vektor

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Bsp: *Die Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *mit Koeffizieten* $-2,\ 1$ *ist* $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Def. 20 *Man sagt dass ein Vektor v eine Linearkombination der Vektoren $v_1, ..., v_m$ ist, falls es $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ gibt so dass*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = v$$

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *ist eine Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die und eine Linearkombination

Def. 19 *Es sei $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ und $v_1, ..., v_k \in V$.*
Die Linearkombination *von $v_1, ..., v_k$ mit Koeffizienten $\lambda_1, ..., \lambda_k$ ist der Vektor*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Bsp: *Die Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *mit Koeffizieten* $-2, \; 1$ *ist* $-2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Def. 20 *Man sagt dass ein Vektor v* eine Linearkombination *der Vektoren $v_1, ..., v_m$ ist, falls es $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ gibt so dass*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = v$$

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *ist* eine *Linearkombination von* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bemerkung: Nach Definition ist die Anzahl von in einer Linearkombination beteiligten Vektoren endlich.

Lineare Hülle

Lineare Hülle

Def. 21

Lineare Hülle

Def. 21 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$.*

Lineare Hülle

Def. 21 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Die lineare Hülle von A*

Lineare Hülle

Def. 21 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$.
Die *lineare Hülle* *von* A *(Bezeichung:* $\operatorname{span}(A)$*)*

Lineare Hülle

Def. 21 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Die lineare Hülle von A (Bezeichung: $\operatorname{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A.*

Lineare Hülle

Def. 21 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Die lineare Hülle von A (Bezeichung: $\mathrm{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A.*

$$\mathrm{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \;\; \lambda_i \in \mathbb{K} \;\; \text{und} \;\; v_i \in A \right\}.$$

Lineare Hülle

Def. 21 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Die lineare Hülle von A (Bezeichung: $\mathrm{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A.*

$$\mathrm{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \ \lambda_i \in \mathbb{K} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}.$$

Bemerkung noch einmal: Auch wenn die Menge A unendlich ist, bestehet die lineare Hülle nur aus endlichen Linearkombinationen

Lineare Hülle

Def. 21 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V,+,\bullet)$. Die lineare Hülle von A (Bezeichung: $\mathrm{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A.*

$$\mathrm{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N},\ \ \lambda_i \in \mathbb{K} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}.$$

Einfaches Bsp. in $\mathbb{R}^3$

Lineare Hülle

Def. 21 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Die* lineare Hülle *von A (Bezeichung: $\mathrm{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A.*

$$\mathrm{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N},\ \ \lambda_i \in \mathbb{K} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}.$$

Einfaches Bsp. in $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right)$$

Lineare Hülle

Def. 21 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V,+,\bullet)$. Die* *lineare Hülle* *von A (Bezeichung: $\mathrm{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A.*

$$\mathrm{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{K} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}.$$

Einfaches Bsp. in $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} \ : \ \text{wobei } x, y \in \mathbb{R}\right\} \qquad (*)$$

Lineare Hülle

Def. 21 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$*.*
Die lineare Hülle von A (Bezeichung: $\mathrm{span}(A)$*) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A.*

$$\mathrm{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N},\ \ \lambda_i \in \mathbb{K} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}.$$

Einfaches Bsp. in $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} \ : \ \text{wobei } x, y \in \mathbb{R}\right\} \qquad (*)$$

Tatsächlich, jede Linearkombination hat die Form wie in $(*)$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}$$

Def. 21 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V,+,\bullet)$. Die* *lineare Hülle* *von A (Bezeichung: $\mathrm{span}(A)$) ist die Menge aller Linearkombinationen der Elemente aus A.*

$$\mathrm{span}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad : \quad \text{so dass } k \in \mathbb{N},\ \ \lambda_i \in \mathbb{K} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}.$$

Einfaches Bsp. in $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} \ : \ \text{wobei } x, y \in \mathbb{R}\right\} \qquad (*)$$

und jedes Element aus $(*)$ ist eine Linearkombination dieser Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$.

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$.
Dann gilt

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Dann gilt*

(a) $\operatorname{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Dann gilt*

(a) $\operatorname{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum* U *alle Elemente von* A, *so ist* $\operatorname{span}(A) \subseteq U$

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$*. Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21'

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum* U *alle Elemente von* A, *so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$.

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist.*

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $\mathbb{A}$ *die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt:*

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $\mathbb{A}$ *die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von* $\mathbb{A}$*:*

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von $\mathbb{A}$:*

$$\mathrm{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum* U *alle Elemente von* A, *so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $\mathbb{A}$ *die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von* $\mathbb{A}$:

$$\mathrm{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung.

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$*. Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$*. Sei* $\mathbb{A}$ *die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von* $\mathbb{A}$*:*

$$\mathrm{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung. Sei $U \in \mathbb{A}$ ein Untervektorraum.

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum* U *alle Elemente von* A, *so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $\mathbb{A}$ *die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von* $\mathbb{A}$:

$$\mathrm{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung. Sei $U \in \mathbb{A}$ ein Untervektorraum.

Liegt v in $\mathrm{span}(A)$

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Dann gilt*

(a) $\operatorname{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\operatorname{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von $\mathbb{A}$:*

$$\operatorname{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung. Sei $U \in \mathbb{A}$ ein Untervektorraum.

Liegt v in $\operatorname{span}(A)$ $\overset{(b)}{\Rightarrow}$

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von $\mathbb{A}$:*

$$\mathrm{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung. Sei $U \in \mathbb{A}$ ein Untervektorraum.
Liegt v in $\mathrm{span}(A) \overset{(b)}{\Rightarrow}$ liegt v auch in U.

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von $\mathbb{A}$:*

$$\mathrm{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung. Sei $U \in \mathbb{A}$ ein Untervektorraum.
Liegt v in $\mathrm{span}(A) \stackrel{(b)}{\Rightarrow}$ liegt v auch in U. Also, $\mathrm{span}(A) \supseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$.

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von $\mathbb{A}$:*

$$\mathrm{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung. Sei $U \in \mathbb{A}$ ein Untervektorraum.

Liegt v in $\mathrm{span}(A) \overset{(b)}{\Rightarrow}$ liegt v auch in U. Also, $\mathrm{span}(A) \supseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$.

Liegt v in jedem $U \in \mathbb{A}$

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Dann gilt*

(a) $\operatorname{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\operatorname{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $\mathbb{A}$ *die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von* $\mathbb{A}$*:*

$$\operatorname{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung. Sei $U \in \mathbb{A}$ ein Untervektorraum.

Liegt v in $\operatorname{span}(A) \overset{\text{(b)}}{\Rightarrow}$ liegt v auch in U. Also, $\operatorname{span}(A) \supseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$.

Liegt v in jedem $U \in \mathbb{A} \overset{\text{(a)}}{\Rightarrow}$

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$*. Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$*. Sei* $\mathbb{A}$ *die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von* $\mathbb{A}$*:*

$$\mathrm{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung. Sei $U \in \mathbb{A}$ ein Untervektorraum.
Liegt v in $\mathrm{span}(A)$ $\overset{\text{(b)}}{\Rightarrow}$ liegt v auch in U. Also, $\mathrm{span}(A) \supseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$.
Liegt v in jedem $U \in \mathbb{A}$ $\overset{\text{(a)}}{\Rightarrow}$ $v \in \mathrm{span}(A)$.

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von $\mathbb{A}$:*

$$\mathrm{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung. Sei $U \in \mathbb{A}$ ein Untervektorraum.
Liegt v in $\mathrm{span}(A)$ $\overset{(b)}{\Rightarrow}$ liegt v auch in U. Also, $\mathrm{span}(A) \supseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$.
Liegt v in jedem $U \in \mathbb{A}$ $\overset{(a)}{\Rightarrow}$ $v \in \mathrm{span}(A)$. Also, $\mathrm{span}(A) \subseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$.

Lineare Hülle ist ein Untervektorraum

Satz 24 *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Dann gilt*

(a) $\mathrm{span}(A)$ *ist ein Untervektorraum.*

(b) *Enthält ein Untervektorraum U alle Elemente von A, so ist* $\mathrm{span}(A) \subseteq U$

Folgerung — Def. 21' *A sei eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller Untervektorräume, deren Teilmenge A ist. Dann gilt: die lineare Hülle von A ist die Schnittmenge aller Elementen von $\mathbb{A}$:*

$$\mathrm{span}(A) := \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$$

Beweis der Folgerung. Sei $U \in \mathbb{A}$ ein Untervektorraum.
Liegt v in $\mathrm{span}(A) \overset{(b)}{\Rightarrow}$ liegt v auch in U. Also, $\mathrm{span}(A) \supseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$.
Liegt v in jedem $U \in \mathbb{A} \overset{(a)}{\Rightarrow} v \in \mathrm{span}(A)$. Also, $\mathrm{span}(A) \subseteq \bigcap_{U \in \mathbb{A}} U$. $\square$

Beweis für Satz 24(b)

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.:

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.
Betrachte eine Linearkombination, z.B.

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.
Betrachte eine Linearkombination, z.B.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.
Betrachte eine Linearkombination, z.B. (wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $v_i \in A$.)

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.
Betrachte eine Linearkombination, z.B.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.
Betrachte eine Linearkombination, z.B.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = {\color{red}\lambda_1 v_1} + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

$\lambda_1 v_1 \in U$ (Abgeschlossenheit des Unter vektorraums bzg. „•„)

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.
Betrachte eine Linearkombination, z.B.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

$\lambda_2 v_2 \in U$ (Abgeschlossenheit bzg. „$\bullet$„)

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.
Betrachte eine Linearkombination, z.B.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

Deswegen $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U$ (Abgeschlossenheit bzg. „+„)

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.
Betrachte eine Linearkombination, z.B.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

$\lambda_3 v_3 \in U$

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.
Betrachte eine Linearkombination, z.B.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U$

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.
Betrachte eine Linearkombination, z.B.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \in U$

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.
Betrachte eine Linearkombination, z.B.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

Nach endlich viele solchen Überlegungen

Beweis für Satz 24(b)

Z.z.: Jede Linearkombination der Elemente aus A in jedem Untervektorraum $U \in \mathbb{A}$ liegt.
Betrachte eine Linearkombination, z.B.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m.$$

Nach endlich viele solchen Überlegungen liegt $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ in U

Beweis für Satz 24(a)

Beweis für Satz 24(a)

Z.z.: $\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\; : \;\; \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \;\; \lambda_i \in \mathbb{R} \;\; \text{und} \;\; v_i \in A \right\}$ ein Untervektorraum von V ist.

Beweis für Satz 24(a)

Z.z.: $\left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \ : \ \text{so dass } k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}$
ein Untervektorraum von V ist.
Wir müssen zeigen dass die Menge abgeschlossen bzg.
(i) „+“

Beweis für Satz 24(a)

Z.z.: $\left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \ : \ \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}$
ein Untervektorraum von V ist.
Wir müssen zeigen dass die Menge abgeschlossen bzg.
(i) „$+$“ und (ii) „$\bullet$“ ist.

Beweis für Satz 24(a)

Z.z.: $\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;:\; \text{so dass } k \in \mathbb{N},\; \lambda_i \in \mathbb{R} \;\text{ und }\; v_i \in A \right\}$
ein Untervektorraum von V ist.
Wir müssen zeigen dass die Menge abgeschlossen bzg.
(i) „$+$“ und (ii) „$\bullet$“ ist.
(i): Seien u, v Linearkombinationen der Elemente aus A.

Beweis für Satz 24(a)

Z.z.: $\left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \ : \ \text{so dass } k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}$
ein Untervektorraum von V ist.
Wir müssen zeigen dass die Menge abgeschlossen bzg.
(i) „$+$“ und (ii) „$\bullet$“ ist.
(i): Seien u, v Linearkombinationen der Elemente aus A. Also, für irgendwelche $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \mathbb{R}$, $v_i \in A$ $(i = 1, ..., k)$ gilt

Beweis für Satz 24(a)

Z.z.: $\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\; : \;\; \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \;\; \lambda_i \in \mathbb{R} \;\; \text{und} \;\; v_i \in A \right\}$
ein Untervektorraum von V ist.
Wir müssen zeigen dass die Menge abgeschlossen bzg.
(i) „$+$“ und (ii) „$\bullet$“ ist.
(i): Seien u, v Linearkombinationen der Elemente aus A. Also, für irgendwelche $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \mathbb{R}$, $v_i \in A$ $(i = 1, ..., k)$ gilt

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$$

Beweis für Satz 24(a)

Z.z.: $\left\{ \sum_{i=1}^{k} \; \lambda_i v_i \; : \; \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \; \lambda_i \in \mathbb{R} \; \text{ und } \; v_i \in A \right\}$
ein Untervektorraum von V ist.
Wir müssen zeigen dass die Menge abgeschlossen bzg.
(i) „+“ und (ii) „•“ ist.
(i): Seien u, v Linearkombinationen der Elemente aus A. Also, für irgendwelche $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \mathbb{R}$, $v_i \in A$ $(i = 1, ..., k)$ gilt

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$$

$m \in \mathbb{N}$ und $\mu_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in A$ $(i = 1, ..., m)$ gilt

Beweis für Satz 24(a)

Z.z.: $\left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \ : \ \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}$
ein Untervektorraum von V ist.
Wir müssen zeigen dass die Menge abgeschlossen bzg.
(i) „+" und (ii) „•" ist.
(i): Seien u, v Linearkombinationen der Elemente aus A. Also, für irgendwelche $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \mathbb{R}$, $v_i \in A$ $(i = 1, ..., k)$ gilt

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$$

$m \in \mathbb{N}$ und $\mu_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in A$ $(i = 1, ..., m)$ gilt

$$u = \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_i = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_m u_m$$

Beweis für Satz 24(a)

Z.z.: $\left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \ : \ \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ v_i \in A \right\}$
ein Untervektorraum von V ist.
Wir müssen zeigen dass die Menge abgeschlossen bzg.
(i) „+“ und (ii) „•“ ist.
(i): Seien u, v Linearkombinationen der Elemente aus A. Also, für irgendwelche $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \mathbb{R}$, $v_i \in A$ $(i = 1, ..., k)$ gilt

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$$

$m \in \mathbb{N}$ und $\mu_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in A$ $(i = 1, ..., m)$ gilt

$$u = \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_i = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_m u_m$$

Dann ist die Summe

Beweis für Satz 24(a)

Z.z.: $\left\{\sum_{i=1}^{k} \ \lambda_i v_i \ \ : \ \ \text{so dass } k \in \mathbb{N}, \ \ \lambda_i \in \mathbb{R} \ \ \text{und} \ \ v_i \in A \ \right\}$
ein Untervektorraum von V ist.
Wir müssen zeigen dass die Menge abgeschlossen bzg.
(i) „+" und (ii) „$\bullet$" ist.
(i): Seien u, v Linearkombinationen der Elemente aus A. Also, für irgendwelche $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \mathbb{R}$, $v_i \in A$ $(i = 1, ..., k)$ gilt

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$$

$m \in \mathbb{N}$ und $\mu_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in A$ $(i = 1, ..., m)$ gilt

$$u = \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_i = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_m u_m$$

Dann ist die Summe

$$v + u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_m u_m$$

Beweis für Satz 24(a)

Z.z.: $\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;:\; \text{so dass } k \in \mathbb{N},\; \lambda_i \in \mathbb{R} \;\text{ und }\; v_i \in A \right\}$
ein Untervektorraum von V ist.
Wir müssen zeigen dass die Menge abgeschlossen bzg.
(i) „+" und (ii) „•" ist.
(i): Seien u, v Linearkombinationen der Elemente aus A. Also, für irgendwelche $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \mathbb{R}$, $v_i \in A$ $(i = 1, ..., k)$ gilt

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$$

$m \in \mathbb{N}$ und $\mu_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in A$ $(i = 1, ..., m)$ gilt

$$u = \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_i = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_m u_m$$

Dann ist die Summe

$$v + u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_m u_m$$

die Linearkombination der Elementen aus A.

Beweis für Satz 24(a)

Z.z.: $\left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;:\; \text{so dass } k \in \mathbb{N},\; \lambda_i \in \mathbb{R} \;\text{ und }\; v_i \in A\right\}$
ein Untervektorraum von V ist.
Wir müssen zeigen dass die Menge abgeschlossen bzg.
(i) „+“ und (ii) „•“ ist.
(i): Seien u, v Linearkombinationen der Elemente aus A. Also, für irgendwelche $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \mathbb{R}$, $v_i \in A$ $(i = 1, ..., k)$ gilt

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$$

$m \in \mathbb{N}$ und $\mu_i \in \mathbb{R}$, $u_i \in A$ $(i = 1, ..., m)$ gilt

$$u = \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_i = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_m u_m$$

Dann ist die Summe

$$v + u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + ... + \mu_m u_m$$

die Linearkombination der Elementen aus A. Also, liegt $u + v$ in der ersten Menge oben.

Linear unabhängige Vektoren

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge.*

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig*

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein Vektorraum,* $A \subseteq V$ *sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass* A *linear unabhängig ist, falls das Null-Element* $\vec{0}$ *des Vektorraums*

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente*

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind,

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein Vektorraum,* $A \subseteq V$ *sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass* A *linear unabhängig ist, falls das Null-Element* $\vec{0}$ *des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von* A *dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A *linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation,*

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.
Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.
Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.
Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da
$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.

Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.
Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da
$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.
Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da
$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.
Lemma 15 *Die Menge $\{v\}$ ist genau dann linaer unabhängig,*

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da

$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.

Lemma 15 *Die Menge $\{v\}$ ist genau dann linaer unabhängig, wenn $v \neq \vec{0}$.*

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein Vektorraum,* $A \subseteq V$ *sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass* A *linear unabhängig ist, falls das Null-Element* $\vec{0}$ *des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von* A *dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A *linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich* $\vec{0}$ *ist.*

Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da

$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.

Lemma 15 *Die Menge* $\{v\}$ *ist genau dann linaer unabhängig, wenn* $v \neq \vec{0}$.

Beweis.

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.

Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da

$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.

Lemma 15 *Die Menge $\{v\}$ ist genau dann linaer unabhängig, wenn $v \neq \vec{0}$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“:

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein Vektorraum,* $A \subseteq V$ *sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass* A *linear unabhängig ist, falls das Null-Element* $\vec{0}$ *des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von* A *dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A *linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich* $\vec{0}$ *ist.*
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.
Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da
$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.
Lemma 15 *Die Menge* $\{v\}$ *ist genau dann linaer unabhängig, wenn* $v \neq \vec{0}$*.*
Beweis. „$\Rightarrow$“: Ist $\{v\}$ linear unabhängig,

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.

Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da

$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.

Lemma 15 *Die Menge $\{v\}$ ist genau dann linaer unabhängig, wenn $v \neq \vec{0}$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Ist $\{v\}$ linear unabhängig, so ist jede nichttriviale Linearkombination,

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.

Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da
$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.

Lemma 15 *Die Menge $\{v\}$ ist genau dann linaer unabhängig, wenn $v \neq \vec{0}$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Ist $\{v\}$ linear unabhängig, so ist jede nichtriviale Linearkombination, z.B. $1 \bullet v$, nicht $\vec{0}$.

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.

Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da
$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.

Lemma 15 *Die Menge $\{v\}$ ist genau dann linaer unabhängig, wenn $v \neq \vec{0}$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Ist $\{v\}$ linear unabhängig, so ist jede nichttriviale Linearkombination, z.B. $1 \bullet v$, nicht $\vec{0}$. Aber $1 \bullet v = v$. Also $v \neq \vec{0}$.

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein Vektorraum,* $A \subseteq V$ *sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass* A *linear unabhängig ist, falls das Null-Element* $\vec{0}$ *des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von* A *dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A *linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich* $\vec{0}$ *ist.*
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da

$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.

Lemma 15 *Die Menge* $\{v\}$ *ist genau dann linaer unabhängig, wenn* $v \neq \vec{0}$.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Ist $\{v\}$ linear unabhängig, so ist jede nichtriviale Linearkombination, z.B. $1 \bullet v$, nicht $\vec{0}$. Aber $1 \bullet v = v$. Also $v \neq \vec{0}$.

„$\Leftarrow$“:

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da
$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.
Lemma 15 *Die Menge $\{v\}$ ist genau dann linaer unabhängig, wenn $v \neq \vec{0}$.*
Beweis. „$\Rightarrow$“: Ist $\{v\}$ linear unabhängig, so ist jede nichttriviale Linearkombination, z.B. $1 \bullet v$, nicht $\vec{0}$. Aber $1 \bullet v = v$. Also $v \neq \vec{0}$.
„$\Leftarrow$“: Ist $v \neq \vec{0}$,

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.
Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.
Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da
$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.
Lemma 15 *Die Menge $\{v\}$ ist genau dann linaer unabhängig, wenn $v \neq \vec{0}$.*
Beweis. „$\Rightarrow$": Ist $\{v\}$ linear unabhängig, so ist jede nichtriviale Linearkombination, z.B. $1 \bullet v$, nicht $\vec{0}$. Aber $1 \bullet v = v$. Also $v \neq \vec{0}$.
„$\Leftarrow$": Ist $v \neq \vec{0}$, so ist nach Lemma 12 jede nichtriviale Linearkombination λv

Linear unabhängige Vektoren

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$, heißt trivial, falls alle λ_i gleich 0 sind.

Def. 22 *Es sei $(V, +, \bullet)$ ein Vektorraum, $A \subseteq V$ sei eine nichtleere Teilmenge. Man sagt dass A linear unabhängig ist, falls das Null-Element $\vec{0}$ des Vektorraums nur als triviale Linearkombination der Elemente von A dargestellt werden kann.*
Man sagt dass A linear abhängig ist, wenn sie nicht linear unabhängig sind, also es gibt eine nichttriviale Linearkombnation, die gleich $\vec{0}$ ist.

Bsp. $A = \{\vec{0}\}$ ist linear abhängig, da $1 \bullet \vec{0} = \vec{0}$.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da

$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $\lambda = 0$.

Lemma 15 *Die Menge $\{v\}$ ist genau dann linaer unabhängig, wenn $v \neq \vec{0}$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Ist $\{v\}$ linear unabhängig, so ist jede nichttriviale Linearkombination, z.B. $1 \bullet v$, nicht $\vec{0}$. Aber $1 \bullet v = v$. Also $v \neq \vec{0}$.
„$\Leftarrow$“: Ist $v \neq \vec{0}$, so ist nach Lemma 12 jede nichttriviale Linearkombination λv nicht $\vec{0}$. □

Bsp.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig,

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig, weil jede Linearkombination

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig, weil jede Linearkombination

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig, weil jede Linearkombination

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig, weil jede Linearkombination

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ist genau dann $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig, weil jede Linearkombination

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ist genau dann $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Bsp.

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig,

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig, weil die Linearkombination

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig, weil die Linearkombination

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig, weil die Linearkombination

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bsp. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig, weil die Linearkombination

$$4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Definition der Basis

Def. 23 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein* $\mathbb{K}-$ *Vektorraum. Eine* $k-$*Tupel* $(v_1, ..., v_k)$ *von verschiedenen Vektoren* $v_i \in V$ *heißt eine Basis, falls die Menge* $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) *Linear unabhängig ist und*

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

Definition der Basis

Def. 23 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein* $\mathbb{K}-$ *Vektorraum. Eine* $k-$*Tupel* $(v_1, ..., v_k)$ *von verschiedenen Vektoren* $v_i \in V$ *heißt eine* *Basis*, *falls die Menge* $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) *Linear unabhängig ist und*

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Definition der Basis

Def. 23 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein* $\mathbb{K}-$ *Vektorraum. Eine* $k-$*Tupel* $(v_1, ..., v_k)$ *von verschiedenen Vektoren* $v_i \in V$ *heißt eine* *Basis*, *falls die Menge* $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) *Linear unabhängig ist und*

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.
Eigenschaft (a) ist erfüllt:

Definition der Basis

Def. 23 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein* $\mathbb{K}-$ *Vektorraum. Eine* $k-$*Tupel* $(v_1, ..., v_k)$ *von verschiedenen Vektoren* $v_i \in V$ *heißt eine Basis, falls die Menge* $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) *Linear unabhängig ist und*

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen. Eigenschaft (a) ist erfüllt: jede Linearkombination der Elemente aus dem Tupel ist gleich

Definition der Basis

Def. 23 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein* $\mathbb{K}-$ *Vektorraum. Eine* $k-$*Tupel* $(v_1, ..., v_k)$ *von verschiedenen Vektoren* $v_i \in V$ *heißt eine* Basis, *falls die Menge* $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) *Linear unabhängig ist und*

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen. Eigenschaft (a) ist erfüllt: jede Linearkombination der Elemente aus dem Tupel ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definition der Basis

Def. 23 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein* $\mathbb{K}-$ *Vektorraum. Eine* $k-$*Tupel* $(v_1, ..., v_k)$ *von verschiedenen Vektoren* $v_i \in V$ *heißt eine* ***Basis****, falls die Menge* $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) *Linear unabhängig ist und*

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen. Eigenschaft (a) ist erfüllt: jede Linearkombination der Elemente aus dem Tupel ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definition der Basis

Def. 23 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein* $\mathbb{K}-$ *Vektorraum. Eine* $k-$*Tupel* $(v_1, ..., v_k)$ *von verschiedenen Vektoren* $v_i \in V$ *heißt eine Basis, falls die Menge* $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) *Linear unabhängig ist und*

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen. Eigenschaft (a) ist erfüllt: jede Linearkombination der Elemente aus dem Tupel ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich

Definition der Basis

Def. 23 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein* $\mathbb{K}-$ *Vektorraum. Eine* $k-$*Tupel* $(v_1, ..., v_k)$ *von verschiedenen Vektoren* $v_i \in V$ *heißt eine Basis, falls die Menge* $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) *Linear unabhängig ist und*

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen. Eigenschaft (a) ist erfüllt: jede Linearkombination der Elemente aus dem Tupel ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Definition der Basis

Def. 23 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein* $\mathbb{K}-$ *Vektorraum. Eine* $k-$*Tupel* $(v_1, ..., v_k)$ *von verschiedenen Vektoren* $v_i \in V$ *heißt eine* *Basis*, *falls die Menge* $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) *Linear unabhängig ist und*

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen. Eigenschaft (a) ist erfüllt: jede Linearkombination der Elemente aus dem Tupel ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ falls die Linearkombination nichttrivial ist,

Definition der Basis

Def. 23 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein* $\mathbb{K}-$ *Vektorraum. Eine* $k-$*Tupel* $(v_1, ..., v_k)$ *von verschiedenen Vektoren* $v_i \in V$ *heißt eine* Basis, *falls die Menge* $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) *Linear unabhängig ist und*

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen. Eigenschaft (a) ist erfüllt: jede Linearkombination der Elemente aus dem Tupel ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ falls die Linearkombination nichttrivial ist,

Definition der Basis

Def. 23 *Es sei* $(V, +, \bullet)$ *ein* $\mathbb{K}-$ *Vektorraum. Eine* $k-$*Tupel* $(v_1, ..., v_k)$ *heißt eine* *Basis*, *falls die Menge* $A := \{v_1, ..., v_k\}$

(a) *Linear unabhängig ist und*

(b) $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen. Eigenschaft (b) ist nicht erfüllt: nicht alle Vektoren von $\mathbb{R}^3$ kann man als lineare Hülle darstellen. Tatsächlich ist der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht eine Linearkombination der Vektoren aus dem Tupel.

Nein, es ist keine Basis.

Frage:

Frage: Was ist die Basis der trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$?

Frage: Was ist die Basis der trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$?
V hat zwei Teilmengen:

Frage: Was ist die Basis der trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$?
V hat zwei Teilmengen: $\{\vec{0}\}$

Frage: Was ist die Basis der trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$?
V hat zwei Teilmengen: $\{\vec{0}\}$ und $\varnothing$.

Frage: Was ist die Basis der trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$?
V hat zwei Teilmengen: $\{\vec{0}\}$ und $\varnothing$.
$\{\vec{0}\}$ ist keine Basis,

Frage: Was ist die Basis der trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$?
V hat zwei Teilmengen: $\{\vec{0}\}$ und $\emptyset$.
$\{\vec{0}\}$ ist keine Basis, da linear abhänging ist $1\,\vec{0} = \vec{0}$.

Frage: Was ist die Basis der trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$?
V hat zwei Teilmengen: $\{\vec{0}\}$ und $\varnothing$.
$\{\vec{0}\}$ ist keine Basis, da linear abhänging ist $1\,\vec{0} = \vec{0}$.
$\varnothing$ ist auch keine Basis,

Frage: Was ist die Basis der trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$?
V hat zwei Teilmengen: $\{\vec{0}\}$ und $\varnothing$.
$\{\vec{0}\}$ ist keine Basis, da linear abhänging ist $1\,\vec{0} = \vec{0}$.
$\varnothing$ ist auch keine Basis, da $\mathrm{span}(\varnothing) = \varnothing$.

Frage: Was ist die Basis der trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$?
V hat zwei Teilmengen: $\{\vec{0}\}$ und $\varnothing$.
$\{\vec{0}\}$ ist keine Basis, da linear abhänging ist $1\,\vec{0} = \vec{0}$.
$\varnothing$ ist auch keine Basis, da $\mathrm{span}(\varnothing) = \varnothing$.
Also, hat der triviale Vektorraum keine Basis

Frage: Was ist die Basis der trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$?
V hat zwei Teilmengen: $\{\vec{0}\}$ und $\varnothing$.
$\{\vec{0}\}$ ist keine Basis, da linear abhänging ist $1\,\vec{0} = \vec{0}$.
$\varnothing$ ist auch keine Basis, da $\operatorname{span}(\varnothing) = \varnothing$.
Also, hat der triviale Vektorraum keine Basis

Def. 23 – Vortsetzung: *Nach Definition setzen wir die Basis vom trivialen Vektorraum*

Frage: Was ist die Basis der trivialen Vektorraum $V := \{\vec{0}\}$?
V hat zwei Teilmengen: $\{\vec{0}\}$ und $\varnothing$.
$\{\vec{0}\}$ ist keine Basis, da linear abhänging ist $1\,\vec{0} = \vec{0}$.
$\varnothing$ ist auch keine Basis, da $\operatorname{span}(\varnothing) = \varnothing$.
Also, hat der triviale Vektorraum keine Basis

Def. 23 – Vortsetzung: *Nach Definition setzen wir die Basis vom trivialen Vektorraum gleich $\varnothing$.*

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (a) ist erfüllt:

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (a) ist erfüllt: jede Linearkombination der Elemente aus A ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (a) ist erfüllt: jede Linearkombination der Elemente aus A ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (a) ist erfüllt: jede Linearkombination der Elemente aus A ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.
Eigenschaft (a) ist erfüllt: jede Linearkombination der Elemente aus A ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ falls die Linearkombination nichttrivial ist,

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (a) ist erfüllt: jede Linearkombination der Elemente aus A ist gleich

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

und ist ungleich $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ falls die Linearkombination nichttrivial ist, d.h. falls nicht nicht alle λ_i gleich 0 sind.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (b) ist erfüllt:

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$,

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von Elementen aus dem Tupel.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von Elementen aus dem Tupel.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von Elementen aus dem Tupel.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ja, es ist eine Basis

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.
Eigenschaft (b) ist erfüllt:

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$,

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von (sogar den ersten 3) Elementen aus dem Tupel.

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von (sogar den ersten 3) Elementen aus dem Tupel.

Eigenschaft (a)

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.

Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von (sogar den ersten 3) Elementen aus dem Tupel.

Eigenschaft (a) ist nicht erfüllt (Bsp. vorher)

Bsp. Ist das folgende Tupel eine Basis in $\mathbb{R}^3$?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Um zu Antworten, müssen wir die Eigenschaften (a), (b) nachprüfen.
Eigenschaft (b) ist erfüllt: jedes Element von V hat die Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z \in \mathbb{R}$, und ist deswegen eine Linearkombination von (sogar den ersten 3) Elementen aus dem Tupel.

Eigenschaft (a) ist nicht erfüllt (Bsp. vorher)

Nein, es ist keine Basis

Satz 25. $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$.

Satz 25. $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$.

Satz 25. *$(v_1, ..., v_k)$ sei ein $k-$Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen $\mathbb{K}-$Vektorraums $(V, +, \bullet)$. Sei $A := \{v_1, ..., v_k\}$. Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

Satz 25. $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

Satz 25. $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, ..., v_k)$ *ist eine Basis.*

Satz 25. $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, ..., v_k)$ *ist eine Basis.*

Satz 25. $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, ..., v_k)$ *ist eine Basis.*

(b) *Jedes* $v \in V$ *läßt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus* A *darstellen.*

Satz 25. $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, ..., v_k)$ *ist eine Basis.*

(b) *Jedes* $v \in V$ *läßt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus* A *darstellen.*

(c) A *ist linear unabhängig*

Satz 25. $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, ..., v_k)$ *ist eine Basis.*

(b) *Jedes* $v \in V$ *läßt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus* A *darstellen.*

(c) A *ist linear unabhängig und für jedes* $v \in V$, $v \notin A$ *die Vereinigungsmenge* $A \cup \{v\}$ *ist linear abhängig.*

Satz 25. $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, ..., v_k)$ *ist eine Basis.*

(b) *Jedes* $v \in V$ *läßt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus* A *darstellen.*

(c) A *ist linear unabhängig und für jedes* $v \in V$, $v \notin A$ *die Vereinigungsmenge* $A \cup \{v\}$ *ist linear abhängig.*

Schema des Beweises:

Satz 25. $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, ..., v_k)$ *ist eine Basis.*

(b) *Jedes* $v \in V$ *läßt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus* A *darstellen.*

(c) A *ist linear unabhängig und für jedes* $v \in V$, $v \notin A$ *die Vereinigungsmenge* $A \cup \{v\}$ *ist linear abhängig.*

Schema des Beweises: (a) $\Rightarrow$ (b)

Satz 25. $(v_1, ..., v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, ..., v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, ..., v_k)$ *ist eine Basis.*

(b) *Jedes* $v \in V$ *läßt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus* A *darstellen.*

(c) A *ist linear unabhängig und für jedes* $v \in V$, $v \notin A$ *die Vereinigungsmenge* $A \cup \{v\}$ *ist linear abhängig.*

Schema des Beweises: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c)

Satz 25. $(v_1, \ldots, v_k)$ *sei ein* $k-$*Tupel von verschiedenen Elementen eines nichttrivialen* $\mathbb{K}-$*Vektorraums* $(V, +, \bullet)$. *Sei* $A := \{v_1, \ldots, v_k\}$. *Dann sind die folgende Aussagen äquivalent.*

(a) $(v_1, \ldots, v_k)$ *ist eine Basis.*

(b) *Jedes* $v \in V$ *läßt sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus* A *darstellen.*

(c) A *ist linear unabhängig und für jedes* $v \in V$, $v \notin A$ *die Vereinigungsmenge* $A \cup \{v\}$ *ist linear abhängig.*

Schema des Beweises: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a)

(a) $\Rightarrow$ (b)

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis. Z.z.:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis. Z.z.:

(1) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A,

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis. Z.z.:

(1) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A,

(2) die Darstellung von v als Linearkombination ist eindeutig.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis. Z.z.:

(1) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A,

(2) die Darstellung von v als Linearkombination ist eindeutig.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis. Z.z.:

(1) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A,

(2) die Darstellung von v als Linearkombination ist eindeutig.

Die Aussage (1) folgt direkt aus der Definition von Basis:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis. Z.z.:

(1) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A,

(2) die Darstellung von v als Linearkombination ist eindeutig.

Die Aussage (1) folgt direkt aus der Definition von Basis:

$\text{span(A)} \overset{\text{Def.23}}{=} V$,

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sei $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis. Z.z.:

(1) Jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A,

(2) die Darstellung von v als Linearkombination ist eindeutig.

Die Aussage (1) folgt direkt aus der Definition von Basis: $\mathrm{span(A)} \overset{\mathrm{Def.23}}{=} V$, und deswegen jedes $v \in V$ ist eine Linearkombination der Vektoren aus A.

(a) $\Rightarrow$ (b)

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen
$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i,$

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \tag{$*$}$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angenommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \tag{$*$}$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$$

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}.$$

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}$.

Nach dem Distributionsgesetze (Eigenschaften(V2–V3))

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}.$$

Nach dem Distributionsgesetze (Eigenschaften(V2–V3)) ist dann

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i = \vec{0}.$$

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}$.

Nach dem Distributionsgesetze (Eigenschaften(V2–V3)) ist dann
$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - \mu_i) v_i = \vec{0}$.

Da $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}$.

Nach dem Distributionsgesetze (Eigenschaften(V2–V3)) ist dann
$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - \mu_i)v_i = \vec{0}$.

Da $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis und deswegen eine linear unabhängige Menge ist,

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}$.

Nach dem Distributionsgesetze (Eigenschaften(V2–V3)) ist dann
$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - \mu_i)v_i = \vec{0}$.

Da $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis und deswegen eine linear unabhängige Menge ist, ist die Linearkombination $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - \mu_i)v_i$ trivial,

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}.$$

Nach dem Distributionsgesetze (Eigenschaften(V2–V3)) ist dann
$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - \mu_i)v_i = \vec{0}.$

Da $(v_1, \dots, v_k)$ eine Basis und deswegen eine linear unabhängige Menge ist, ist die Linearkombination $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - \mu_i)v_i$ trivial, also $\lambda_i - \mu_i = 0$

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}$.

Nach dem Distributionsgesetze (Eigenschaften(V2–V3)) ist dann $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i = \vec{0}$.

Da $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis und deswegen eine linear unabhängige Menge ist, ist die Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i$ trivial, also $\lambda_i - \mu_i = 0$ also $\lambda_i = \mu_i$.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig. Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1)\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}$.

Nach dem Distributionsgesetze (Eigenschaften(V2–V3)) ist dann $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - \mu_i)v_i = \vec{0}$.

Da $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis und deswegen eine linear unabhängige Menge ist, ist die Linearkombination $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - \mu_i)v_i$ trivial, also $\lambda_i - \mu_i = 0$ also $\lambda_i = \mu_i$.
Also, (a) $\Rightarrow$ (b),

(a) $\Rightarrow$ (b)

Wir beweisen Aussage (2): die Darstellung von v als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A ist eindeutig.
Angennommen

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i, \qquad (*)$$

wobei $v_i \in A$ paarweise verschieden sind.
Z.z.: für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gilt $\lambda_i = \mu_i$.

Wir addieren $(-1) \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$ zu beiden Seiten der Gleichung $(*)$.

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + (-1) \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \vec{0}$.

Nach dem Distributionsgesetze (Eigenschaften(V2–V3)) ist dann
$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i = \vec{0}$.

Da $(v_1, ..., v_k)$ eine Basis und deswegen eine linear unabhängige Menge ist, ist die Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i$ trivial, also $\lambda_i - \mu_i = 0$ also $\lambda_i = \mu_i$.
Also, (a) $\Rightarrow$ (b),

(b) $\Rightarrow$ (c)

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen: jedes $v \in V$ lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen: jedes $v \in V$ lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen. Z.z.:

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen: jedes $v \in V$ lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen. Z.z.:

(1) A ist linear unabhängig,

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen: jedes $v \in V$ lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen. Z.z.:

(1) A ist linear unabhängig, und

(2) für jedes $v \notin A$ ist die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ linear abhängig.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen: jedes $v \in V$ lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen. Z.z.:

(1) A ist linear unabhängig, und

(2) für jedes $v \notin A$ ist die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ linear abhängig.

Beweis für (1):

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen: jedes $v \in V$ lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen. Z.z.:

(1) A ist linear unabhängig, und

(2) für jedes $v \notin A$ ist die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ linear abhängig.

Beweis für (1): Ist die Darstellung jedes Elements eindeutig,

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen: jedes $v \in V$ lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen. Z.z.:

(1) A ist linear unabhängig, und

(2) für jedes $v \notin A$ ist die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ linear abhängig.

Beweis für (1): Ist die Darstellung jedes Elements eindeutig, so ist die Darstellung von $\vec{0}$ auch eindeutig,

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen: jedes $v \in V$ lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen. Z.z.:

(1) A ist linear unabhängig, und

(2) für jedes $v \notin A$ ist die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ linear abhängig.

Beweis für (1): Ist die Darstellung jedes Elements eindeutig, so ist die Darstellung von $\vec{0}$ auch eindeutig, also $\vec{0}$ kann man nur als die triviale Linearkombination darstellen.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen: jedes $v \in V$ lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen. Z.z.:

(1) A ist linear unabhängig, und

(2) für jedes $v \notin A$ ist die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ linear abhängig.

Beweis für (1): Ist die Darstellung jedes Elements eindeutig, so ist die Darstellung von $\vec{0}$ auch eindeutig, also $\vec{0}$ kann man nur als die triviale Linearkombination darstellen. i.e. A ist linear unabhängig

(b) $\Rightarrow$ (c)

Angenommen: jedes $v \in V$ lass sich in eindeutiger Weise als eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus A darstellen. Z.z.:

(1) A ist linear unabhängig, und

(2) für jedes $v \notin A$ ist die Vereinigungsmenge $A \cup \{v\}$ linear abhängig.

Beweis für (1): Ist die Darstellung jedes Elements eindeutig, so ist die Darstellung von $\vec{0}$ auch eindeutig, also $\vec{0}$ kann man nur als die triviale Linearkombination darstellen. i.e. A ist linear unabhängig

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2):

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$ s.d. $A \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$ s.d. $A \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$,

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$ s.d. $A \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$ s.d. $A \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$ s.d. $A \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k,$$

wobei $v_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$ s.d. $A \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k,$$

wobei $v_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann
$\vec{0} = (-1)v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k,$

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$ s.d. $A \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k,$$

wobei $v_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann

$$\vec{0} = (-1)v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k, \qquad (**)$$

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$ s.d. $A \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k,$$

wobei $v_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann

$$\vec{0} = (-1)v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k, \qquad (**)$$

und deswegen kann man $\vec{0}$ als zwei verschiedenen Linearkombination der Elemente $v, v_1, ..., v_k$ darstellen:

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$ s.d. $A \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k,$$

wobei $v_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann

$$\vec{0} = (-1)v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k, \qquad (**)$$

und deswegen kann man $\vec{0}$ als zwei verschiedenen Linearkombination der Elemente $v, v_1, ..., v_k$ darstellen: wie in $(**)$

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$ s.d. $A \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k,$$

wobei $v_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann

$$\vec{0} = (-1)v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k, \qquad (**)$$

und deswegen kann man $\vec{0}$ als zwei verschiedenen Linearkombination der Elemente $v, v_1, \ldots, v_k$ darstellen:
wie in $(**)$
und als die triviale Linearkombination

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$ s.d. $A \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k,$$

wobei $v_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann

$$\vec{0} = (-1)v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k, \qquad (**)$$

und deswegen kann man $\vec{0}$ als zwei verschiedenen Linearkombination der Elemente $v, v_1, \ldots, v_k$ darstellen:
wie in $(**)$
und als die triviale Linearkombination
$\vec{0} = 0v + 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_k$,

(b) $\Rightarrow$ (c)

Widerspruchsbeweis für (2): Angenommen, es gibt $v \in V$, $v \notin A$ s.d. $A \cup \{v\}$ ist linear unabhängig.
Nach Voraussetzungen ist $\mathrm{span}(A) = V$, also

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k,$$

wobei $v_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann

$$\vec{0} = (-1)v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k, \qquad (**)$$

und deswegen kann man $\vec{0}$ als zwei verschiedenen Linearkombination der Elemente $v, v_1, ..., v_k$ darstellen:
wie in $(**)$
und als die triviale Linearkombination
$\vec{0} = 0v + 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_k$,
Widerspruch zeigt, dass (b) (c) impliziert.

(c) $\Rightarrow$ (a)

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \Bigg\{$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \begin{cases} \quad\quad\quad\quad A \text{ ist linear unabhängig} \\ \end{cases}$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(c) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(\mathrm{a}) = \begin{cases} \end{cases}$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \left\{ \begin{array}{c} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{array} \right.$$

$$(\mathrm{a}) = \left\{ \begin{array}{c} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \end{array} \right.$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(c) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(a) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{cases}$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(c) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(a) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{cases}$$

Angenommen (c),

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(\mathrm{a}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{cases}$$

Angenommen (c), müssen wir zeigen, dass $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A.

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(\mathrm{a}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{cases}$$

Angenommen (c), müssen wir zeigen, dass $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A.
Fall 1.

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(\mathrm{a}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{cases}$$

Angenommen (c), müssen wir zeigen, dass $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A.
Fall 1. $v \in A$. Dann ist v schon eine Linearkombination von Elemente aus A,

(c) $\Rightarrow$ (a)

$$(\mathrm{c}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{für } v \notin A \text{ ist } A \cup \{v\} \text{ nicht linear unabhängig} \end{cases}$$

$$(\mathrm{a}) = \begin{cases} A \text{ ist linear unabhängig} \\ \text{jedes } v \in V \text{ ist eine Linearkombination der Elemente aus } A \end{cases}$$

Angenommen (c), müssen wir zeigen, dass $v \in V$ ist eine Linearkombination der Elemente aus A.
Fall 1. $v \in A$. Dann ist v schon eine Linearkombination von Elemente aus A, weil $v = 1v$.

Fall 2. $v \notin A$.

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$,

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} =$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor.

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.)

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$.

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig, d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ durch $-\frac{1}{\lambda_j}$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichttriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ durch $-\frac{1}{\lambda_j}$

$$\vec{0} =$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ durch $-\frac{1}{\lambda_j}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ durch $-\frac{1}{\lambda_j}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - \ldots$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ durch $-\frac{1}{\lambda_j}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - ... - 1 v_j - ...$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig, d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ durch $-\frac{1}{\lambda_j}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - ... - 1 v_j - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ durch $-\frac{1}{\lambda_j}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - ... - 1 v_j - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

und addieren v zu beiden Seiten. Wir bekommen

$$v =$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichtriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ durch $-\frac{1}{\lambda_j}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - ... - 1 v_j - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

und addieren v zu beiden Seiten. Wir bekommen

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ .$$

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichttriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ durch $-\frac{1}{\lambda_j}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - \ldots - 1 v_j - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

und addieren v zu beiden Seiten. Wir bekommen

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ .$$

Also ist v eine Linearkombination der Elemente aus A.

Fall 2. $v \notin A$. Dann ist $A \cup \{v\}$ linear abhängig,
d.h. es gibt eine nichttriviale Linearkombination von Elemente aus $A \cup \{v\}$, die Null ist

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \qquad (***)$$

In dieser Linearkombination kommt v mit von Null verschiedenen Koeffizient vor. (Sonst ist $(***)$ eine Linearkombination von Elemente nur aus A und muß trivial sein.) Also, fur irgendwelches j ist $v_j = v$ und $\lambda_j \neq 0$. Wir multiplizieren $(***)$ durch $-\frac{1}{\lambda_j}$

$$\vec{0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_j} v_2 - ... - 1 v_j - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_j} v_k$$

und addieren v zu beiden Seiten. Wir bekommen

$$v = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \ .$$

Also ist v eine Linearkombination der Elemente aus A.

Noch einmal über das Schema des Beweises:

Noch einmal über das Schema des Beweises: Wir müssten zeigen,

Noch einmal über das Schema des Beweises: Wir müssten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.

Noch einmal über das Schema des Beweises: Wir müssten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

Noch einmal über das Schema des Beweises: Wir müssten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

- falls (a) erfüllt ist, (b) ist auch erfüllt;

Noch einmal über das Schema des Beweises: Wir müssten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

- falls (a) erfüllt ist, (b) ist auch erfüllt; (Schritt (a) $\Rightarrow$ (b))

Noch einmal über das Schema des Beweises: Wir müssten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

- falls (a) erfüllt ist, (b) ist auch erfüllt; (Schritt (a) $\Rightarrow$ (b))
- falls (b) erfüllt ist, (c) ist auch erfüllt; (Schritt (b) $\Rightarrow$ (c))

Noch einmal über das Schema des Beweises: Wir müssten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

- falls (a) erfüllt ist, (b) ist auch erfüllt; (Schritt (a) $\Rightarrow$ (b))
- falls (b) erfüllt ist, (c) ist auch erfüllt; (Schritt (b) $\Rightarrow$ (c))
- falls (c) erfüllt ist, (a) ist auch erfüllt; (Schritt (c) $\Rightarrow$ (a))

Noch einmal über das Schema des Beweises: Wir müssten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

- falls (a) erfüllt ist, (b) ist auch erfüllt; (Schritt (a) $\Rightarrow$ (b))
- falls (b) erfüllt ist, (c) ist auch erfüllt; (Schritt (b) $\Rightarrow$ (c))
- falls (c) erfüllt ist, (a) ist auch erfüllt; (Schritt (c) $\Rightarrow$ (a))

Also, falls eine von Aussagen (a), (b), (c) erfüllt ist,

Noch einmal über das Schema des Beweises: Wir müssten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

- falls (a) erfüllt ist, (b) ist auch erfüllt; (Schritt (a) $\Rightarrow$ (b))
- falls (b) erfüllt ist, (c) ist auch erfüllt; (Schritt (b) $\Rightarrow$ (c))
- falls (c) erfüllt ist, (a) ist auch erfüllt; (Schritt (c) $\Rightarrow$ (a))

Also, falls eine von Aussagen (a), (b), (c) erfüllt ist, dann sind die zwei anderen Aussagen auch erfüllt.

Noch einmal über das Schema des Beweises: Wir müssten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

- falls (a) erfüllt ist, (b) ist auch erfüllt; (Schritt (a) $\Rightarrow$ (b))
- falls (b) erfüllt ist, (c) ist auch erfüllt; (Schritt (b) $\Rightarrow$ (c))
- falls (c) erfüllt ist, (a) ist auch erfüllt; (Schritt (c) $\Rightarrow$ (a))

Also, falls eine von Aussagen (a), (b), (c) erfüllt ist, dann sind die zwei anderen Aussagen auch erfüllt.
Also, falls eine von Aussagen (a), (b), (c) nicht erfüllt ist,

Noch einmal über das Schema des Beweises: Wir müssten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

- falls (a) erfüllt ist, (b) ist auch erfüllt; (Schritt (a) $\Rightarrow$ (b))
- falls (b) erfüllt ist, (c) ist auch erfüllt; (Schritt (b) $\Rightarrow$ (c))
- falls (c) erfüllt ist, (a) ist auch erfüllt; (Schritt (c) $\Rightarrow$ (a))

Also, falls eine von Aussagen (a), (b), (c) erfüllt ist, dann sind die zwei anderen Aussagen auch erfüllt.
Also, falls eine von Aussagen (a), (b), (c) nicht erfüllt ist, dann sind die zwei anderen Aussagen auch nicht erfüllt.

Noch einmal über das Schema des Beweises: Wir müssten zeigen, dass die Aussagen (a), (b), (c) äquivalent sind.
Wir haben gezeigt, dass

- falls (a) erfüllt ist, (b) ist auch erfüllt; (Schritt (a) $\Rightarrow$ (b))
- falls (b) erfüllt ist, (c) ist auch erfüllt; (Schritt (b) $\Rightarrow$ (c))
- falls (c) erfüllt ist, (a) ist auch erfüllt; (Schritt (c) $\Rightarrow$ (a))

Also, falls eine von Aussagen (a), (b), (c) erfüllt ist, dann sind die zwei anderen Aussagen auch erfüllt.
Also, falls eine von Aussagen (a), (b), (c) nicht erfüllt ist, dann sind die zwei anderen Aussagen auch nicht erfüllt.

Def. 24

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$

Def. 24 *Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$ heißt* *endlich erzeugt,*

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$ *heißt* *endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt*

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$ *heißt* *endlich erzeugt*, *falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\operatorname{span}(A) = V$.

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$ *heißt* *endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\operatorname{span}(A) = V$.

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V,+,\bullet)$ *heißt* *endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp.

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum* $(V, +, \bullet)$ *heißt* *endlich erzeugt*, *falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt:

Def. 24 *Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$ heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge $A \subseteq V$ gibt so dass $\mathrm{span}(A) = V$.*

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: wie wir bereits gezeigt haben, ist jeder Vektor

Def. 24 *Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$ heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge $A \subseteq V$ gibt so dass $\operatorname{span}(A) = V$.*

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: wie wir bereits gezeigt haben, ist jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Def. 24 *Ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $(V, +, \bullet)$ *heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge* $A \subseteq V$ *gibt so dass* $\mathrm{span}(A) = V$.

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: wie wir bereits gezeigt haben, ist jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Def. 24 *Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \bullet)$ heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge $A \subseteq V$ gibt so dass $\mathrm{span}(A) = V$.*

Bsp. $\mathbb{R}^3$ ist endlich erzeugt: wie wir bereits gezeigt haben, ist jeder Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Linearkombination der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bsp. Der Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ der Polynomen (Vorlesung Fricke/Hausaufgabe 1b Blatt 6) ist nicht endlich erzeugt.