Organisatorisches

- Klausur am 1. August, 10-12 Uhr in CZ 3, HS 3
- Zulassungskriterium: 60% von Hausaufgaben + Bonuspunkten. Bitte bei zweifeln mit Übungsgruppenleitern klären. Keine Anmeldung.
- 5 Aufgaben; nur eine davon rechnerische davon 3 theoretische; eine davon wird bestehen, einen wichtigen Satz aus der Vorlesung zu beweisen (die Liste von „wichtigen Sätze“ ist auf der nächste Folie)
- Keine Hilfsmittel zugelassen; Papier wird gegeben.
- Bitte Ihren Lichtbildausweis (egal welcher) mitbringen
- Über Einsichtmöglichkeit werden Sie über CAJ und der Homeseite der Vorlesung informiert. Vermutlich eine Woche nach der Veröffentlichung der Ergebnisse in CAJ + 2 Wochen irgendwann. Sie können einfach vorbei schauen, aber wegen Sommerpause es lohnt sich, sicherheitshalber zuerst per email/telefon Termin bei Herr Dr. Schöbel (ich bin nicht da) vereinbaren.
- Genauer Termin für Nachklausur wird morgen besprochen; vermutlich die dritte Woche der Oktober-Prüfungszeit

Sätze zur Klausur

- Mengenlehre
  - Satz 2 (Wann sind zwei Menge gleichmächtig)
  - Satz 44 (Hamel-Basis)
  - Lösung des dritten Hilbertschen Problem
- Jordan-Form
  - Satz 5 (Normalform für die Endomorphismen, die über $\mathbb{C}$ diagonalisierber sind.)
  - Satz 11 (Zerlegung in Produkt von verallgemeinerten Eigenräumen)
  - Lemma 4 (Zerlegunslemma)
  - Satz 13 (Jordan-Normalform)
- Affine, projektive und konvexe Geometrie
  - Satz 22 (Fundamentalsatz der affinen Geometrie)
  - Satz 23 (Konvexe Hülle)
  - Satz 34 (Extrempunkt = Ecke = ein Element der minimalen Darstellung)
  - Satz 40 ($K = K^{**}$)
  - Satz 55 (von Desargues)

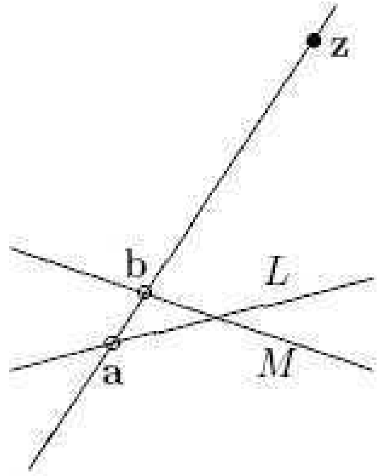
Lineare Geometrie der projektiven Ebene

Def. Eine Perspektivität in der Ebene ist folgendes (unten ist $P(\mathbb{K}^3) = \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$:); wir werden annehmen (obwohl es nicht nötig ist), dass $\#\mathbb{K} = \infty$

Es seien zwei Geraden $L, M \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ und ein Punkt $\mathbf{z} \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ in der projektiven Ebene gegeben. Wir nennen $\mathbf{z}$ das *Perspektivitäts-Zentrum* und die Geraden $S \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ durch $\mathbf{z}$ die *Perspektivitäts-Strahlen*. Jeder Strahl S schneidet die Geraden L und M in genau einem Punkt. Umgekehrt gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{a} \in L$ genau einen Strahl $S_\mathbf{a}$, nämlich die von $\mathbf{z}$ und $\mathbf{a}$ aufgespannte Gerade. Dieser Strahl schneidet die Gerade M im Punkt $\mathbf{b} = S_\mathbf{a} \cap M$. Dadurch ist eine Abbildung

$$L \to M, \quad \mathbf{a} \mapsto \mathbf{b} = S_\mathbf{a} \cap M$$

definiert. Sie heißt die *Perspektivität mit Zentrum* $\mathbf{z}$.

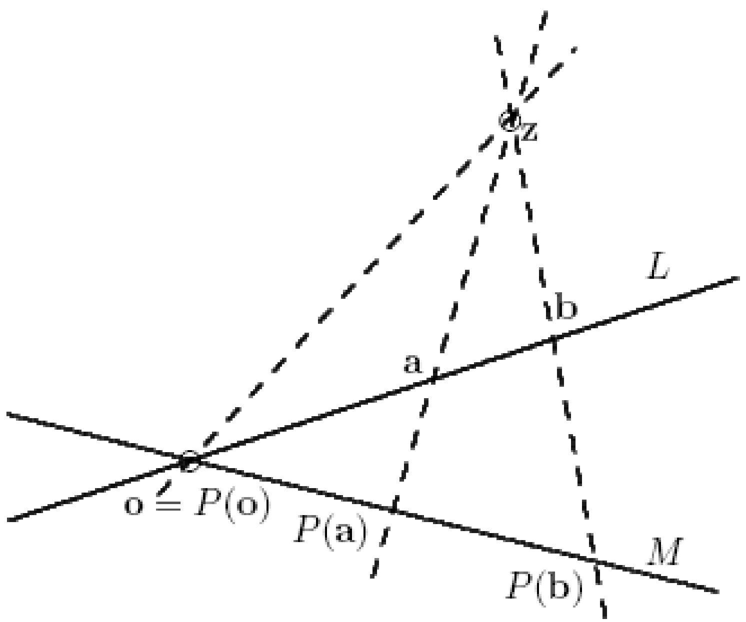


Bemerkung. Diese Definition geht genauso für zwei Hyperebenen $L, M \subseteq P(\mathbb{K}^{n+1})$ im $n-$dimensionalen projektiven Raum. Man muss nur darauf achten, dass das Perspektivitäts-Zentrum z auf keiner dieser beiden Hyperebenen liegt.

Satz 53. Jede Perspektivität ist eine Projektivität. (Beweis wie von Satz 49)

Zunächst wollen wir Projektivitäten $P : L \to M$ zwischen zwei Geraden $L, M \subseteq P(\mathbb{K}^3)$ betrachten. Wenn nichts anderes gesagt wird, setzen wir $L \neq M$ voraus. Dann nennen wir den Schnittpunkt $L \cap M =: o$.

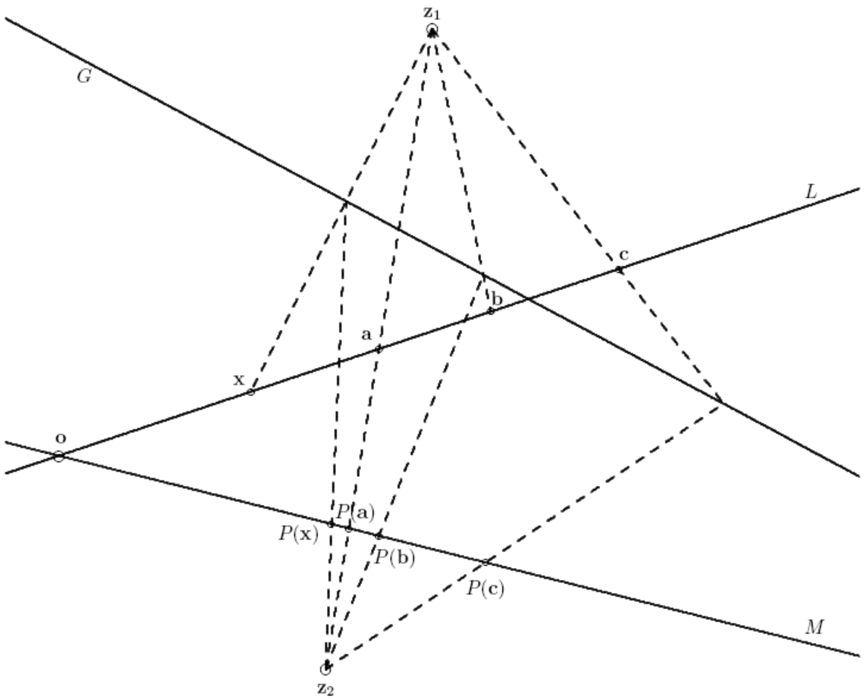
Satz 54 (Projektivitäten und Perspektivitäten)
(a) Eine Projektivität $P : L \to M$ ist eine Perspektivität genau dann, wenn $P(o) = o$.
(b) Jede Projektivität $P : L \to M$ ist ein Produkt von höchstens zwei (falls $L \neq M$) oder drei (falls $L = M$) Perspektivitäten.



Beweis. (a) Sei $P(o) = o$. Wir wählen zwei Punkte $o \neq a \neq b \neq o$ auf der Geraden L. Dann sind ihre Bilder $P(a), P(b) \in M$ voneinander und von o verschieden.
Als Projektionszentrum wählen wir den Schnittpunkt z er Geraden $aP(a)$ und $bP(b)$. Die Perspektivität mit Zentrum z bildet, ebenso wie die Projektivität P, die drei (Basis)Punkte o, a, b auf o, $P(a)$, $P(b)$ ab.

Aus Satz 51 folgt, dass P die Perspektivität mit Zentrum z ist.

(b) Jede Projektivität $P : L \longrightarrow M$ ist ein Produkt von höchstens zwei (falls $L \neq M$) oder drei (falls $L = M$) Perspektivitäten.



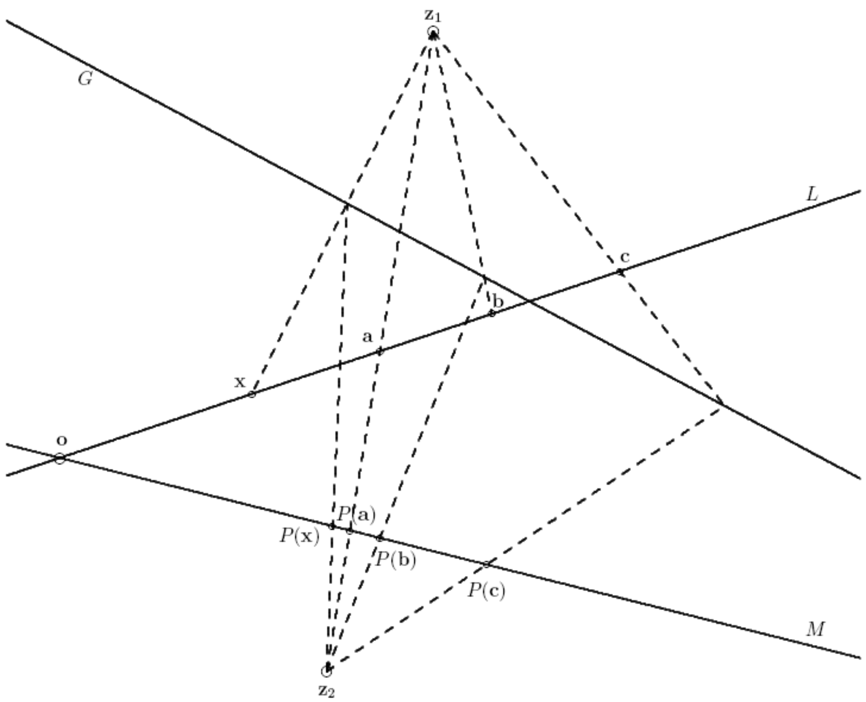
Beweis. Auf L wählen wir drei Punkte a, b, c, die untereinander und von o, sowie $P^{-1}(o)$ verschieden seien. Dann sind ihre Bildpunkte $P(a), P(b), P(c) \in M$ voneinander und von o verschieden.

Auf der Verbindungsgeraden von a und $P(a)$ wählen wir zwei beliebige Punkte $z_1 \neq z_2$, die von a und $P(a)$ verschieden sein sollen.

Weil die Punkte $b, c, P(b)$ und $P(c)$ nicht auf der Verbindungsgeraden von a und $P(a)$ liegen, sind die Geraden $z_1 b$ und $z_2 P(b)$, sowie $z_1 c$ und $z_2 P(c)$ verschieden, und schneiden sich (Satz 46 (c)) jeweils in einem Punkt.

Die Gerade durch diese beiden Schnittpunkte nennen wir G. Sei $P_1 : L \longrightarrow G$ durch die Perspektivität mit Zentrum z_1 gegeben und $P_2 : G \longrightarrow M$ durch die Perspektivität mit Zentrum z_2. Wir verfolgen die Punkte a, b und c unter $P_2 \circ P_1$:

Wir verfolgen die Punkte a, b und c unter $P_2 \circ P_1$:

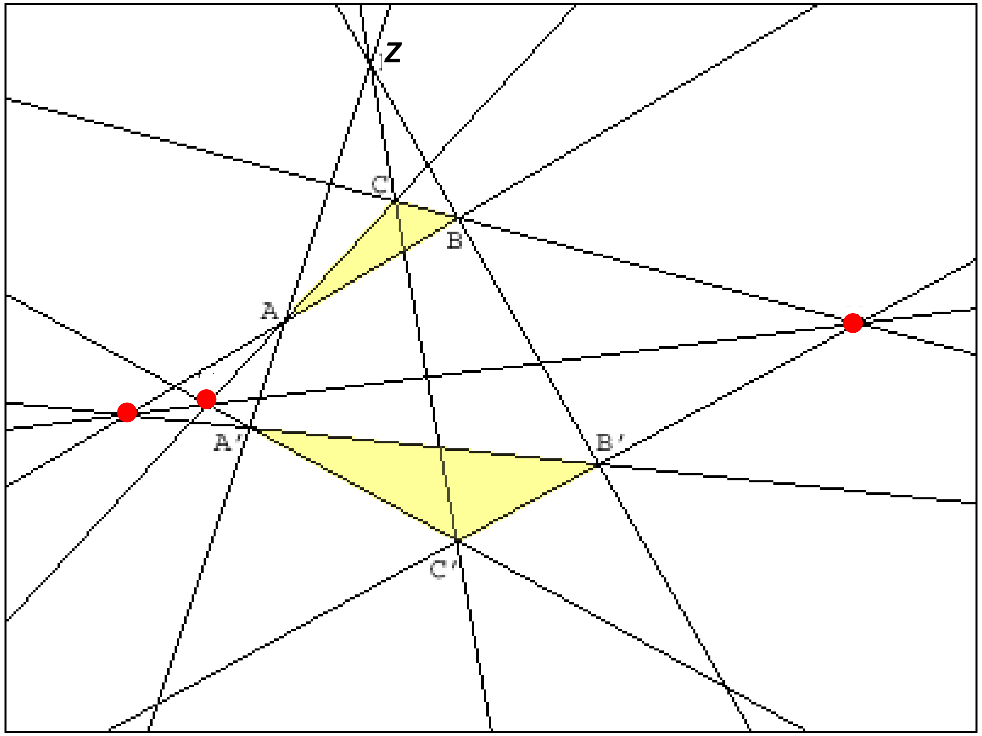


$$P_1: \begin{cases} \mathbf{a} \mapsto G \cap \mathbf{a}P(\mathbf{a}) \\ \mathbf{b} \mapsto G \cap \mathbf{z}_1\mathbf{b} = G \cap \mathbf{z}_2P(\mathbf{b}) \\ \mathbf{c} \mapsto G \cap \mathbf{z}_1\mathbf{c} = G \cap \mathbf{z}_2P(\mathbf{c}) \end{cases} \qquad P_2: \begin{cases} G \cap \mathbf{a}P(\mathbf{a}) \mapsto P(\mathbf{a}) \\ G \cap \mathbf{z}_2P(\mathbf{b}) \mapsto P(\mathbf{b}) \\ G \cap \mathbf{z}_2P(\mathbf{c}) \mapsto P(\mathbf{c}) \end{cases}$$

Wir sehen: Die Projektivität $P_2 \circ P_1$ bildet die drei Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ genauso ab, wie P.

Nach Satz 49 muß die Projektivität P mit $P_2 \circ P_1$ übereinstimmen. Falls $L = M$ gewesen sein sollte, bilden wir zuerst L auf eine Gerade $L' \neq L$ durch eine Perspektivität ab, und dann $L' \mapsto M$ durch ein Produkt von zwei Perspektivitäten, Satz 55 (von Desargues (1591-1661))

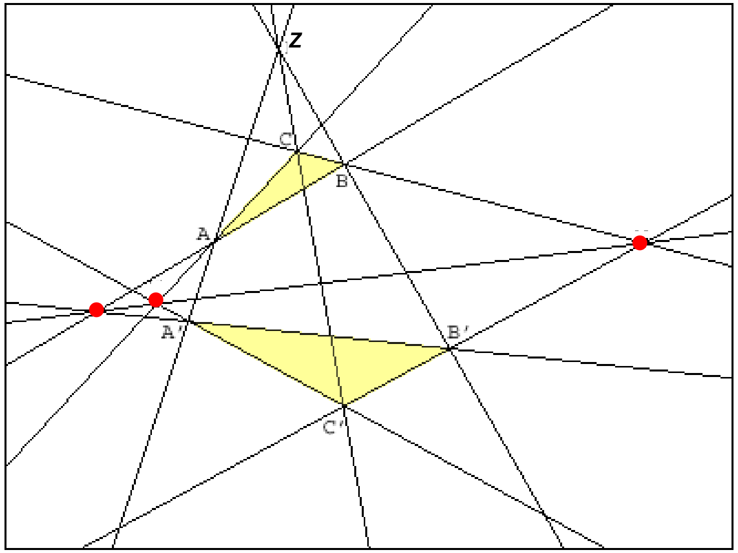
Die Dreiecke $a_1 a_2 a_3$ und $b_1 b_2 b_3$ seien perspektiv, d.h., es gebe eine Perspektivität mit Zentrum $z \notin \{a_1, ..., b_3\}$, welche für $i = 1, 2, 3$ die Ecken a_i auf die Ecken b_i abbildet.



Dann sind die Schnittpunkte $t_1 := a_2 a_3 \cap b_2 b_3$, $t_2 := a_3 a_1 \cap b_3 b_1$, $t_3 := a_1 a_2 \cap b_1 b_2$ kollinear.

Beweis. Falls zwei der Ecken a_i und b_i zusammenfallen, wird die Aussage trivial: Sei etwa $a_1 = b_1$. Dann wird $t_2 = t_3 = a_1 = b_1$.
Deswegen können wir oBdA $a_i \neq b_i$ für $i = 1, 2, 3$ annehmen. Wir bezeichnen mit $\hat{o} \neq \hat{a}_1, ..., \hat{b}_3, \hat{z} \in \mathbb{K}^3$ Vektoren, die zu den Punkten $a_1, ..., b_3, z \in P(\mathbb{K}^3)$ gehören. Weil a_i, b_i und z kollinear sind, sind die Vektoren $\hat{a}_i, \hat{b}_i$ und $\hat{z}$ linear abhängig. Es gibt deswegen Zahlen λ_i, $\mu_i \in \mathbb{K}$ mit $\hat{z} = \lambda_i \hat{a}_i + \mu_i \hat{b}_i$ für $i = 1, 2, 3$. Dann gilt:

$$\hat{z} = \lambda_1 \hat{a}_1 + \mu_1 \hat{b}_1 = \lambda_2 \hat{a}_2 + \mu_2 \hat{b}_2 = \lambda_3 \hat{a}_3 + \mu_3 \hat{b}_3$$



Aus $\hat{z} = \lambda_1 \hat{a}_1 + \mu_1 \hat{b}_1 = \lambda_2 \hat{a}_2 + \mu_2 \hat{b}_2 = \lambda_3 \hat{a}_3 + \mu_3 \hat{b}_3$ folgen die drei Gleichungen

$\lambda_1 \hat{a}_1 - \lambda_2 \hat{a}_2 = \mu_2 \hat{b}_2 - \mu_1 \hat{b}_1 =: \hat{t}_3,$

$\lambda_2 \hat{a}_2 - \lambda_3 \hat{a}_3 = \mu_3 \hat{b}_3 - \mu_2 \hat{b}_2 =: \hat{t}_1,$

$\lambda_3 \hat{a}_3 - \lambda_1 \hat{a}_1 = \mu_1 \hat{b}_1 - \mu_3 \hat{b}_3 =: \hat{t}_2.$

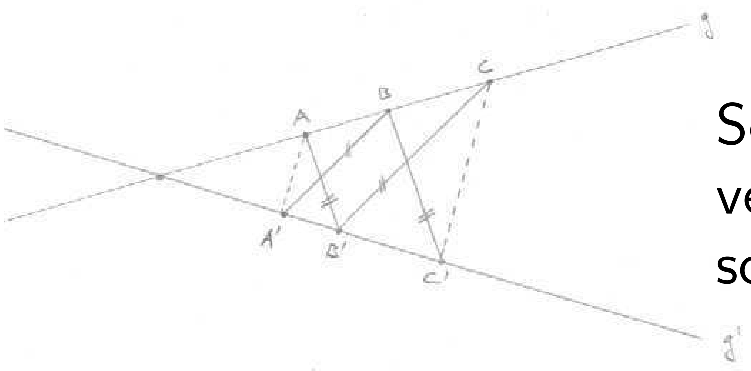
Weil $\hat{a}_i$ und $\hat{a}_j$ für $i \neq j$ linear unabhängig sind, sind die Vektoren $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3 \in \mathbb{K}^3$ nicht $\vec{0}$. Sie sind deshalb Vektoren zu den Schnittpunkten t_1, t_2, t_3 der Geraden $a_i b_j$ und $a_j b_i$. Nun sind die drei Vektoren $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3$ linear abhängig, denn

$\hat{t}_1 + \hat{t}_2 + \hat{t}_3 = (\lambda_1 \hat{a}_1 - \lambda_2 \hat{a}_2) + (\lambda_2 \hat{a}_2 - \lambda_3 \hat{a}_3) + (\lambda_3 \hat{a}_3 - \lambda_1 \hat{a}_1) = \vec{0}.$

Deswegen sind die drei Punkte t_1, t_2, t_3 kollinear, $\square$

Satz 56 von Pappos (IV. Jhd. n. Chr.)

Einfache (affine) Version des Satzes

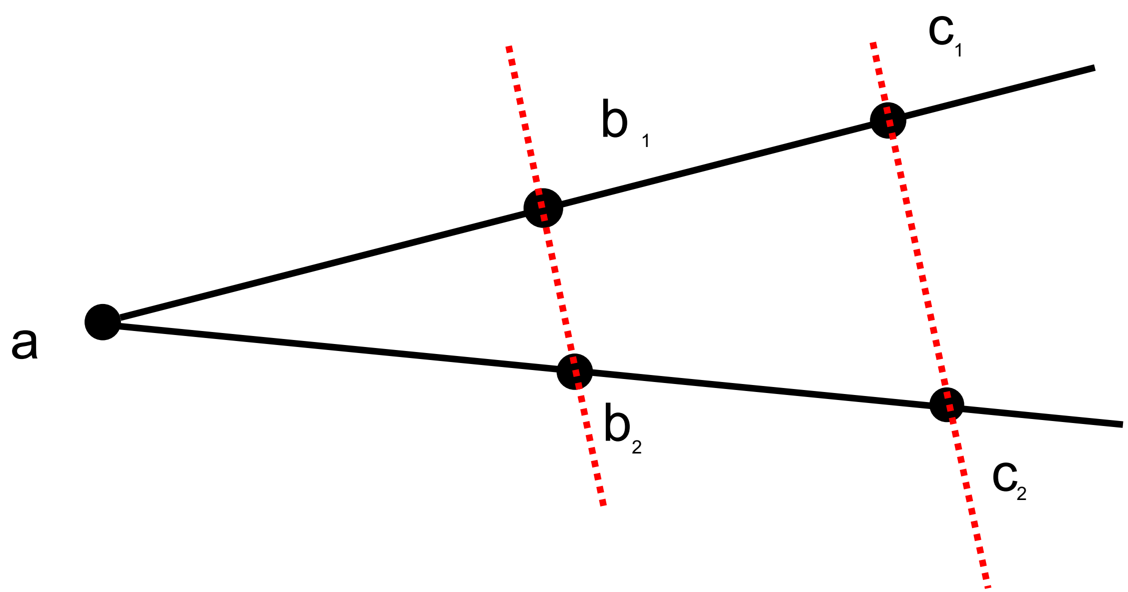


Seien G, G' Geraden in der Ebene A, B, C verschiedene Punkte auf G A', B', C' verschieden Punkte auf G'

$A, B, C, A', B', C' \notin G \cap G'$.
Dann gilt: Wenn $AB' \parallel BC'$ und $A'B \parallel B'C$, dann $AA' \parallel CC'$

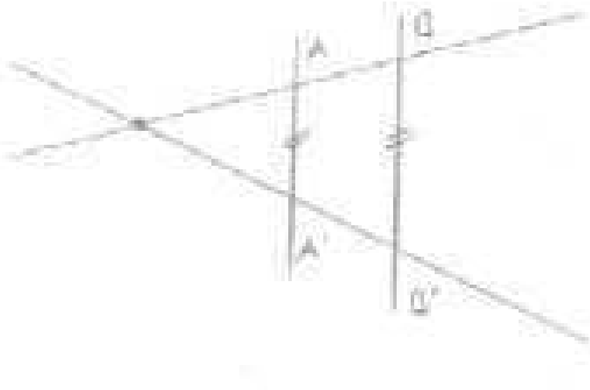
Beweis mit Hilfe von affiner Geometrie

Wiederholung — Strahlensatz (Satz 20) *Seien* (a, b_1, c_1) *und* (a, b_2, c_2) *kollineare Punktetripel auf verschiedenen Geraden durch* $a \notin \{b_1, b_2, c_1, c_2\}$. *Dann sind die Geraden* $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ *und* $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ *genau dann parallel, wenn* $TV(a, b_1, c_1) = TV(a, b_2, c_2)$.



Wiederholung. Ist (a, b, c) ein kollineares Punktetripel und $a \neq b$, so heißt der durch die Gleichung $\overrightarrow{ac} = \lambda\overrightarrow{ab}$ eindeutig bestimmte Skalar λ das Teilverhältnis des kollinearen Punktetripels (a, b, c), bezeichnet durch $TV(a, b, c)$.

Einfache Formulierung des Strahlensatzes



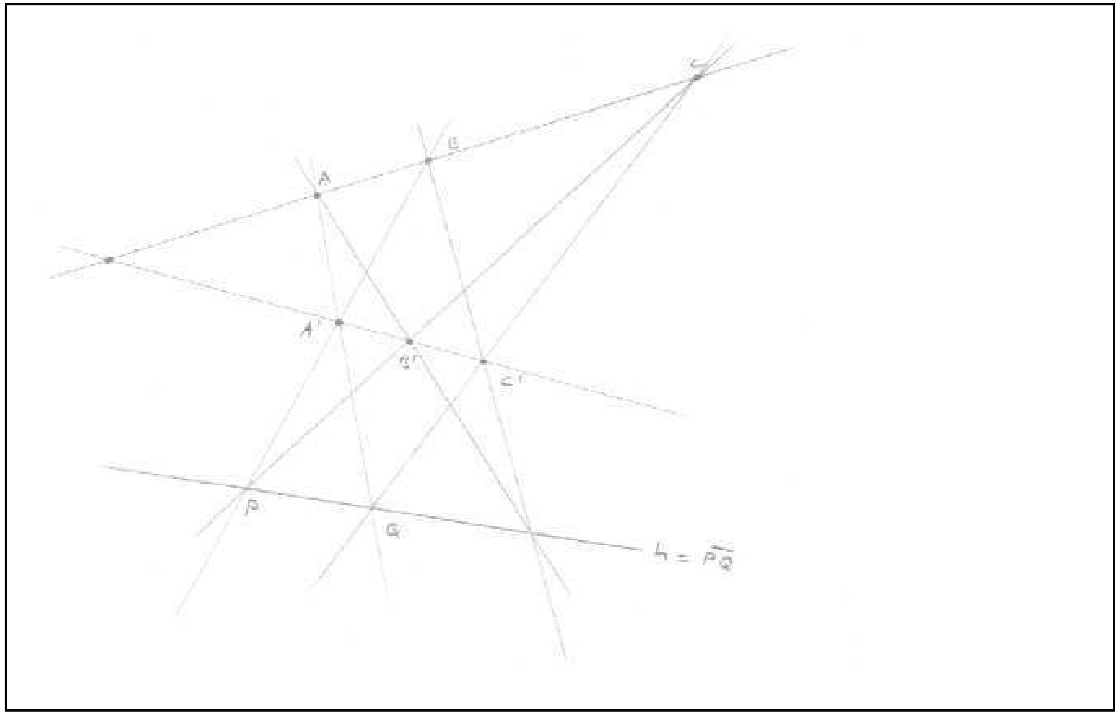
$$AA' \| BB' \Leftrightarrow \exists \lambda : \overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA} \text{ und } \overrightarrow{OB'} = \lambda \overrightarrow{OA'}$$

Organisatorisches

- Klausur am 1. August, 10-12 Uhr in CZ 3, HS 3
- Zulassungskriterium: 60% von Hausaufgaben + Bonuspunkten. Bitte bei zweifeln mit Übungsgruppenleitern klären. Keine Anmeldung.
- 5 Aufgaben; nur eine davon rechnerische davon 3 theoretische; eine davon wird bestehen, einen wichtigen Satz aus der Vorlesung zu beweisen (die Liste von „wichtigen Sätze“ ist auf der nächste Folie)
- Keine Hilfsmittel zugelassen; Papier wird gegeben.
- Bitte Ihren Lichtbildausweis (egal welcher) mitbringen
- Über Einsichtmöglichkeit werden Sie über CAJ und der Homeseite der Vorlesung informiert. Vermutlich eine Woche nach der Veröffentlichung der Ergebnisse in CAJ + 2 Wochen irgendwann. Sie können einfach vorbei schauen, aber wegen Sommerpause es lohnt sich, sicherheitshalber zuerst per email/telefon Termin

Projektive Version des Satzes von Pappus:

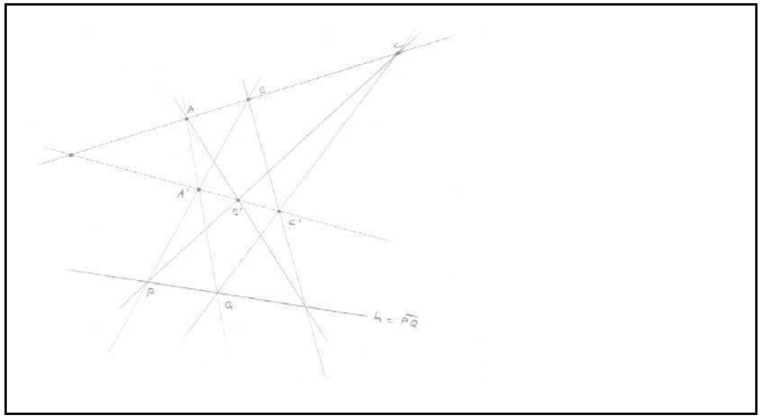
Satz 55: G, G' projektive Geraden in $P(\mathbb{R}^3)$. $G \cap G' =: \{0\}$. O, A, B, C verschiedene Punkte auf G O, A', B', C' verschieden Punkte auf G'. Die Durchschnittspunkte der drei Paare von Geraden AB',BC';$A'B$,$B'C$;AA',CC' liegen auf der selben Gerade.



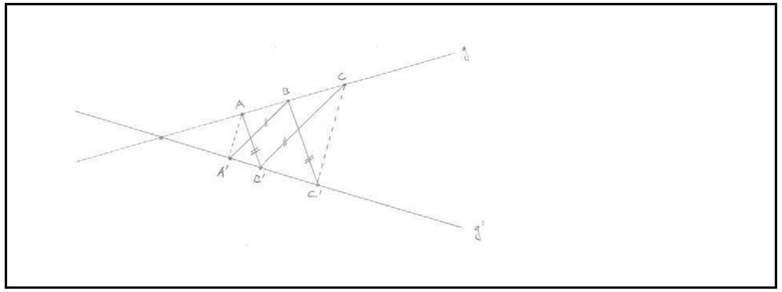
Poetische Formulierung (Coxeter): Liegen die Eckpunkte eines 6-Ecks $AB'CC'BA'$ alternierend auf zwei Geraden, so treffen sich die drei Paare gegenüberliegender Seiten in kollinearen Punkten.

Beweis.

Man betrachte eine Projektivität $\phi : P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$, die die Gerade $H = PQ$ auf unendlich ferne Gerade $H_\infty = \{x_0 : x_1 : x_2 \mid x_0 = 0\}$ abbildet. (Existiert nach Satz 51: es genügend die Punkte P, Q und noch einen Punkt von H auf unendlich ferne Punkte, z.B. $(0:0:1)$, $(0:1:0)$, $0:1:1)$, abbilden.) Dann ist $\phi(A)\phi(B') \parallel \phi(B)\phi(C')$ und $\phi(A')\phi(B) \parallel \phi(B')\phi(C)$ als Geraden auf der affinen $\mathcal{E}_2 = P(\mathbb{R}^3) \setminus H_\infty (= \mathbb{R}^2$ mit inhomogenen Koordinaten $(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$.) (Das affine Bild wie folgt verändert:)



$\longmapsto$



Wi sehen dass wir genau in der Voraussetzungen des einfachen (affinen) Version des Satzes von Pappos sind, also $\phi(A)\phi(A') \parallel \phi(C)\phi(C')$ (als Geraden auf $\mathcal{E}_2$). Dann liegt der Schnittpunkt von $\phi(A)\phi(A')$ $\phi(C)\phi(C')$ (als Geraden auf $P(\mathbb{R}^3)$) auf $Bild_\phi(H)$, deswegen ist Schnittpunkt von AA' CC' auf H, $\square$

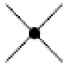
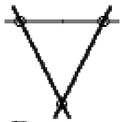
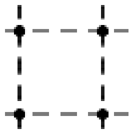
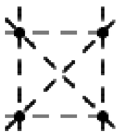
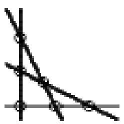
Dualität in der projektiven Ebene

Ausgangspunkt ist folgende Bemerkung: Genauso, wie ein Punkt $a \in P(\mathbb{K}^3)$ durch seine drei homogenen Koordinaten $(a_0 : a_1 : a_2)$ festgelegt ist, so ist auch eine Gerade $L : \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ durch drei Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ festgelegt. Und ändert man diese drei Zahlen um einen gemeinsamen Faktor $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ab, so ändert die Gerade nicht. Man kann also auch die Gerade L durch ein Tripel $(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2)$ homogener Koordinaten charakterisieren. Die Inzidenz (=ein Punkt ist mit einer Geraden Inzident, falls er auf der Gerade liegt) eines Punktes a mit der Geraden L kann man den homogenen Koordinaten von a und L ansehen: $a \in L \iff \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$.
In dieser Inzidenz–Gleichung kann man die Rollen des Punktes a und der Geraden L vertauschen: Nimmt man die Koordinaten des Punktes a, um eine Gerade
$a^* : a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \subseteq P(\mathbb{K}^3)$
zu definieren, und die Koordinaten von L, um einen Punkt
$L^* := (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in P(\mathbb{K}^3)$ zu definieren, so gilt $a \in L \iff a^* \ni L^*$.

Man nennt $a^* \subseteq P(\mathbb{K}^3)$ die duale Gerade zum Punkt a und $L^* \in P(\mathbb{K}^3)$ den dualen Punkt zur Geraden L.Diese Dualitätsbeziehung ist symmetrisch:
$L = a^* \iff L^* = a.$
Weil man die Rollen von Punkt und Gerade bei der Inzidenz vertauschen kann, bleibt eine Inzidenz zwischen einem Punkt und einer Geraden beim Übergang zur dualen Geraden und dem dualen Punkt erhalten. Dies ist das
Dualitätsprinzip: Gilt eine Aussage über Punkte und Geraden, die nur mit Hilfe von Inzidenzen formuliert ist (z.B. der Satz von Pappos, der Satz von Desargues), so gilt auch die duale Aussage, die man erhält, wenn man alle
Punkte durch die dualen Geraden
Geraden durch die dualen Punkte
Inzidenzen durch die Inzidenzen zwischen den dualen Objekten ersetzt.

Duale Objekte

Als Beispiele stellen wir eine kleine Liste der einfachsten Figuren in der projektiven
und ihrer dualen Figuren zusammen:

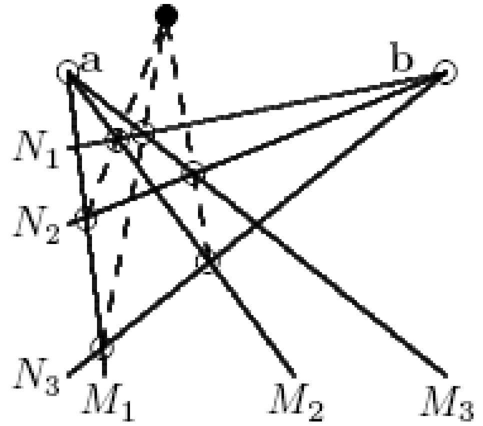
Figur	Dual
Punkt	Gerade
 Punkt auf einer Geraden	 Gerade durch einen Punkt
 zwei Punkte auf einer Geraden	 zwei Geraden durch einen Punkt
 Dreieck	 Dreiseit
 Viereck	 Vierseit
 volständiges Viereck	 vollständiges Vierseit

Als Beispiel einer nicht ganz trivialen Aussage dualisieren wir den Satz von Pappos:

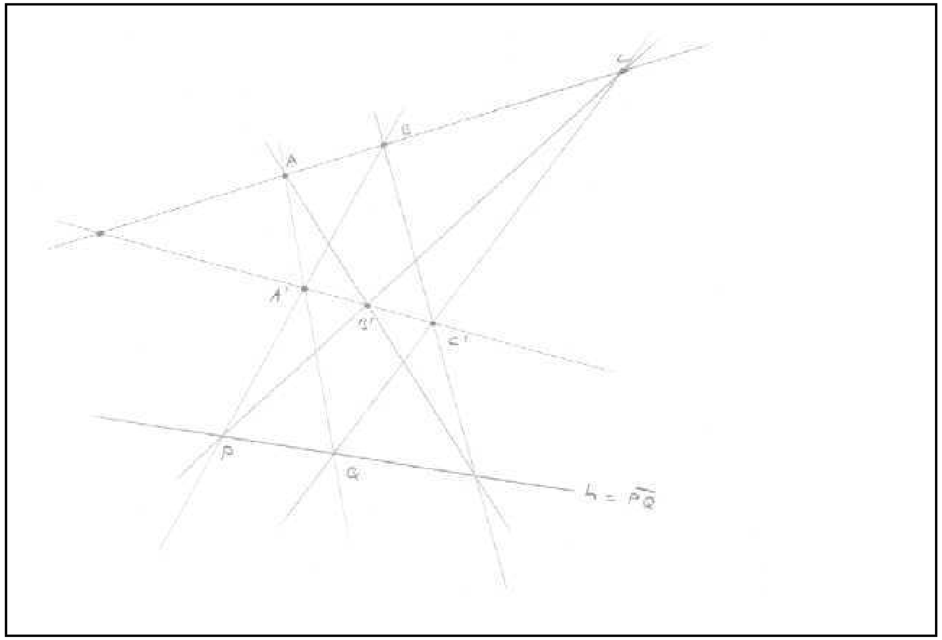
Satz (Dual zum Satz von Pappos)
Es seien $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b} \in \mathbb{P}_2$ *zwei verschiedene Punkte. Durch jeden der Punkte seien drei Geraden* $M_1, M_2, M_3 \ni \mathbf{a}$ *und* $N_1, N_2, N_3 \ni \mathbf{b}$ *gewählt, die voneinander und von der Verbindungsgeraden* $\mathbf{ab}$ *verschieden sein mögen. Dann treffen sich die drei Verbindungsgeraden der Punktepaare*

$$M_i \cap N_j \text{ und } N_i \cap M_j, \quad i \neq j = 1,2,3$$

in einem Punkt.



Satz 55 – Wiederholung: G, G' projektive Geraden in $P(\mathbb{R}^3)$. $G \cap G' =: \{0\}$. O, A, B, C verschiedene Punkte auf G O, A', B', C' verschieden Punkte auf G' Die Durchschnittspunkte der drei Paare von Geraden $AB', BC'; A'B, B'C; AA', CC'$ liegen auf der selben Gerade.



Abschied:

- Die Vorlesung Morgen wird Herr Dr. Schöbel halten – er wird über ein Paar mathematischen Paradoxen sprechen. Ich werde mithören.
- Die Übungsgruppe am Do fällt aus: stattdessen wird (vermutlich, am Dienstag 29. Juli vor der Klausur) eine Fragestunde angeboten: Wird nichts vorgerechnet/vorbereitet, sondern die Fragen werden verantwortet. Ort und Zeit in CAJ
- Viel Erfolg!