Wiederholung.

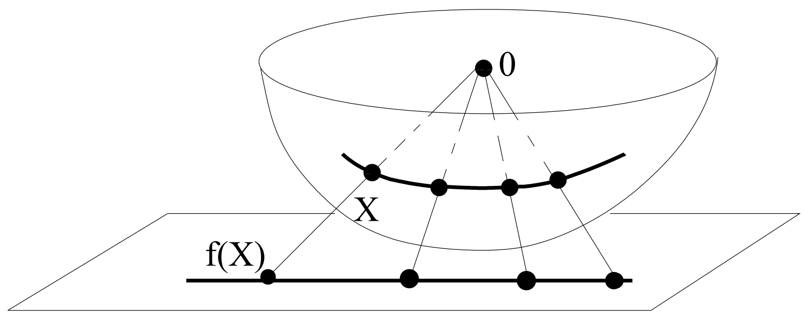
Def. 39. Der zum Vektorraum V gehörige projektive Raum $P(V)$ ist die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume von V .

Def. 40 Auf $P(V)$ sind die homogenen Koordinaten (von dem Punkt $\mathbb{K}v \in P(V)$ definiert durch

$\boxed{(x_0 : x_1 : ... : x_n) := \mathcal{G}_v := \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{K}\}}$.

In der nähe des Punktes s.d. $x_0 \neq 0$, kann man die inhomogene Koordinaten $(x_1', ...x_n')$ definieren: $(x_1', ..., x_n') = (\frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0})$.

Geometriesche Vorstellung der inhomogenen Koordinaten: Man betrachte die Projektion f, die Gerade durch $\vec{0}$ in Schnittpunkt der Gerade mit der Ebene $\{(x_0, ..., x_n) \mid x_0 = 1\}$ überführt. Dann sind die Koordinaten von $f(x)$ die inhomogene Koordianten der Geraden.



Def. 42. Seien V, W zwei $(n+1)$-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann heißt eine bijektive Abbildung $\varphi : P(V) \to P(W)$ eine Projektivität, falls es eine bijektive $\mathbb{K}-$lineare Abbildung

$$\vec{\varphi} : V \longrightarrow W \text{ gibt mit } \varphi(P) = \vec{\varphi}(P) \quad \forall P \in \mathbb{P}(V)$$

(Hierbei ist P ein Punkt von $\mathbb{P}(V)$ und also ein eindimensionaler Teilraum von V.) Es ist dann $\vec{\varphi}$ *nicht* eindeutig durch φ bestimmt, denn für $\lambda \in K^*$ ist $(\lambda\vec{\varphi})(P) = \vec{\varphi}(\lambda P) = \vec{\varphi}(P)$.

Ferner gilt $\boxed{\varphi(\mathbb{P}(U)) = \mathbb{P}(\vec{\varphi}(U))}$ für jeden Untervektorraum U von V und jede Projektivität φ.

Bemerkung. Wir haben oben die folgende bezeichnung benutzt: $\vec{\varphi}(P) = Bild_{\vec{\varphi}}(\mathbb{K}P)$.

Def. 42 in koordinaten:

Sei $V = \mathbb{K}^{n+1}$ und $\varphi : P(V) \to P(V)$ eine Projektivität. Bezüglich der Standardbasis wird $\vec{\varphi} : V \to V$ durch eine Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$$

beschrieben.

In Worten: Eine Projektivität $\varphi : P(\mathbb{K}^{n+1}) \to P(\mathbb{K}^{n+1})$ ist eine Abbildung, die auf den homogenen Koordinaten durch Multiplikation mit einer invertierbaren $(n+1) \times (n+1)$-Matrix definiert ist.

Es ist dann $\varphi(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = (y_0 : y_1 : \ldots : y_n)$ mit $y_i = a_{i0}x_0 + \ldots + a_{in}x_n$. Übergang zu inhomogenen Koordinaten ergibt

$$y_i' = \frac{y_i}{y_0} = \frac{a_{i0}x_0 + \ldots + a_{in}x_n}{a_{00}x_0 + \ldots + a_{0n}x_n} = \frac{a_{i0} + a_{i1}x_1' + \ldots + a_{in}x_n'}{a_{00} + a_1 x_1' + \ldots + a_{0n}x_n'}$$

mit $x_i' = \frac{x_i}{x_0}$ und $x_0 \neq 0$. Die Abbildung

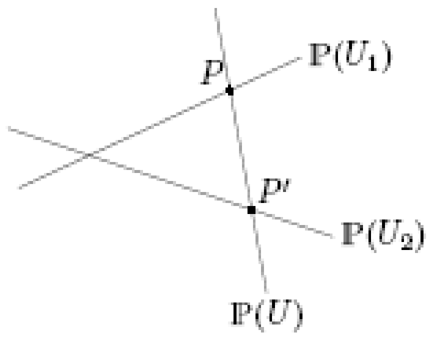
$$\varphi' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad (x_1', \ldots, x_n') \mapsto (y_1', \ldots, y_n')$$

ist auf der affinen Hyperebene $\mathcal{E} = \{(x_1', \ldots, x_n') \in \mathbb{K}^n | a_{00} + a_{01}x_1' + \ldots + a_{0n}x_n' = 0\}$ nicht definiert. Die Punkte von $\mathcal{E}$ werden auf die unendlich ferne Hyperebene abgebildet.

Bsp. Zentralprojektion

Sei V ein $(n+1)-$dimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum und $X = P(U)$ ein projektiver Unterraum von $P(V)$. Ferner seien $P(U_1)$ und $P(U_2)$ zwei $m-$dimensionale projektive Unterräume von $P(V)$. Es gelte:
(i) $X \cap P(U_1) = X \cap P(U_2) = \varnothing$
(ii) $X \vee P(U_1) = X \vee P(U_2) = P(V)$

Dann aus aus dem Dimensionssatz 45 folgt, dass $dim((X \vee P) \cap P(U_2)) = 0$,
deswegen $dim((X \vee P) \cap P(U_2)) =: P'$
ein Punkt.
Die Abbildung $\phi : P(U_1) \to P(U_2)$, $P \mapsto P'$, heißt Zentralprojektion.



Satz 49. Die Zentralprojektion $\phi : P(U_1) \to P(U_2)$ ist eine Projektivität.

Beweis. Aus (i) folgt $U \cap U_1 = U \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ und wegen (ii) ist $U \oplus U_1 = U \oplus U_2 = V$. Nach Definition von Direktprodukt (Def. 49 Vorl. 19 LAAG I, siehe auch Vorl. 5) gibt es zu jedem $u_1 \in U_1$ eindeutig bestimmte Vektoren $u \in U$ und $u_2 \in U_2$ mit $u_1 = \vec{0} + u_1 = u + u_2$.Setze

$$\varphi : U_1 \to U_2, \; u_1 \mapsto u_2.$$

Dann ist

$$\varphi(\mathbb{K}u_1) = P(U + \mathbb{K}u_1) \cap P(U_2) = \mathbb{K}u_2 = \vec{\varphi}(\mathbb{K}u_1) \forall u_1 \in U_1 \setminus \{\vec{0}\},$$

und $\vec{\phi}$ ist linear und injektiv. Da die Dimensionen von U_1 und U_2 gleich sind, ist $\vec{\phi}$ eine Bijektion nach 1. Dimensionsformel, $\square$

Projektive Fortsetzung affiner Transformationen

Bemerkung. Jede Affinität $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lässt sich zu einer projektiven Transformation $\varphi : P(\mathbb{K}^{n+1}) \to P(\mathbb{K}^{n+1})$ fortsetzen.
Die affine Transformation sei

$$F : (x) = T + Ax$$

mit der invertierbaren Matrix $A \in GL(n, \mathbb{K})$. In Vorl. 19 sahen wir bereits, dass man die Abbildung mit Hilfe von der $(n+1) \times (n+1)$– Matrix der Form $\bar{A} = \begin{pmatrix} & \boxed{A} & & T_1 \\ & & & \vdots \\ & & & T_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, wobei $A \in GL(n, \mathbb{K})$, angeben kann:
wenn wir $\bar{A}$ mit den Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$ multiplizieren, bekommen wir den Vektor $\binom{F(x)}{1}$. Weil A invertierbar ist, ist auch die $(n+1) \times (n+1)$–Matrix $\bar{A}$ invertierbar. Multiplikation mit $\bar{A}$ definiert also eine Projektivität $\varphi : P(\mathbb{K}^{n+1}) \to P(\mathbb{K}^{n+1})$. Auf den ersten n Koordinaten der Punkten $(x_0 : ... : x_{n-1} : 1)$ von $P(\mathbb{K}^{n+1})$ ist dies genau die gegebene affine Transformation.

Bemerkung. Man kann selbstverständlich auch die Projektivität φ konstruieren, sodass φ die gegebene affine Transformation auf den letzten n Koordianten der Punkten $(1 : x_1 : \ldots : x_n)$, in dem Fall ist die Matrix von φ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ T_1 & & & \\ \vdots & & \boxed{A} & \\ T_n & & & \end{pmatrix},$$

Kollineationen

Def. 43 – Wiederholung. Eine bijektive Abbildung $\varphi : P(V) \to P(W)$ heißt Kollineation, wenn das Bild einer projektive Geraden $G_{P,Q}$ durch die Punkte $P, Q \in G_{P,Q} \subseteq P(V)$ die projektive Gerade $G_{\varphi(P),\varphi(Q)}$ durch die Punkte $\varphi(P), \varphi(Q) \in P(W)$ ist.

Satz 47 – Wiederholung. Es gilt:

(i) Zu je zwei Punkten $P, Q \in P(V)$ mit $P \neq Q$ gibt es genau eine projektive Gerade G, die P und Q enthält.

(ii) Ist $\varphi : P(V) \to P(W)$ eine Projektivität, so ist φ eine Kollineation.

Hauptsatz der projektiven Geometrie

Satz 50 Seien V, W zwei $(n+1)-$dimensionale $R-$Vektorräume, $n \geq 2$, und sei $\varphi : P(V) \to P(W)$ eine Kollineation. Dann ist φ ein Projektivität.

Wiederholung: Satz 22 (Fundamentalsatz der affinen Geometrie (über $\mathbb{R}$)) Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$ affine Räume über den $\mathbb{R}$-Vektorräumen V, V_0. Sei $dim(\mathcal{A}) \geq 2$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_0$ eine Bijektion, die Geraden auf Geraden abbildet. Dann ist F eine Affinität.

Beweis von Satz 50. Wir zeigen, dass der Satz eine einfache Folgerung aus der Fundamentalsatz der affinen Geometrie ist.
Wir betrachten eine Hyperebene $H \subseteq P(V)$. Setze $H_1 := Bild_\varphi(H)$. H_1 ist auch eine Hyperebene.
In der Tat, wir betrachten $P_1 = \mathbb{K}v_1, P_2 = \mathbb{K}v_2 \in H_1$. Nach Voraussetzungen enthält H_1 mit je 2 verschiedenen Punkte $P_1 = \mathbb{K}v_1, P_2 = \mathbb{K}v_2 \in H_1$ die ganze Gerade durch diese Punkte. Dann enthält $\mathcal{H}_1$ mit je 2 linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \neq \vec{0}$ die ganze Ebene $\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$. Insbesonderem enthält $\mathcal{H}_1$ die Gerade durch die Punkte v_1, v_2. Dann ist $\mathcal{H}_1$ affin abgeschlossen, und deswegen ein affiner Unterraum nach Satz 21. Da $\mathcal{H}_1$ den Punkt $\vec{0}$ enthält, ist $\mathcal{H}_1$ ein Untervektorraum von W. Dimension von $\mathcal{H}_1$ ist offensichtlich gleich n. In der Tat, betrahcten wir einen Punkt $Q \notin H$. Da $dim(Q \vee H) \overset{\text{Satz 45}}{=} n$, ist $dim(Q \vee H) = P(V)$, woraus folgt, dass jedes $Q' \in P(V)$ auf einer Gerade liegt durch Q und einen Punkt von H. Da φ Geradentreu Bijektion ist, liegt jedes $Q_1' \in P(W)$ auf einer Gerade durch den Punkt $\varphi(Q)$ und einer Punkt von H_1. Dann ist $\varphi(Q) \vee H_1 = P(W)$, schließlich $dim(H_1) = n - 1$.

Wir betrachten ein Koordinatensystem $(x_0, ..., x_n)$ in V, so dass $H = \{(x_0, ..., x_n) \mid x_0 = 0\}$, und ein Koordinatensystem $(y_0, ..., y_n)$ in W, so dass $H_1 = \{(y_0, ..., y_n) \mid y_0 = 0\}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \; \tilde{\varphi}(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n)$$

sodass $\varphi(1 : x_1 : ... : x_n) = (1 : y_1 : ... : y_n)$. Da $Bild_\varphi(H) = H_1$ ist, ist die Abbildung ist wohldefiniert und ist eine Bijektion. Da φ Kollineation ist, ist $\tilde{\varphi}$ auch Geradentreu. Dann ist $\tilde{\varphi}$ eine affine Abbildung nach Satz 22, schliesslich φ eine projektive Abbildung nach Bemerkung oben, $\square$

Projektive Basen

Seien V, W zwei $(n+1)-$dimensionale $\mathbb{K}-$Vektorräume. Dann sind $n+2$ Punkte $P_0, \dots, P_{n+1}$ von $P(V)$ in allgemeiner Lage, wenn keine $n+1$ Punkte davon einen echten projektiven Unterraum von $P(V)$ erzeugen. Man sagt dann, dass $P_0, \dots, P_{n+1}$ eine projektive Basis von $P(V)$ bilden.

Bsp. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ ist eine Projektive (Standard-)Basis in $P(\mathbb{R}^3)$

Satz 51. Sind $P_0, \dots, P_{n+1}$ in allgemeiner Lage in $P(V)$ und sind $Q_0, \dots, Q_{n+1}$ in allgemeiner Lage in $P(W)$, dann gibt es genau eine Projektivität $\varphi : P(V) \to P(W)$ mit $\varphi(P_i) = Q_i$ für alle $i = 0, \dots, n+1$.

Satz 51. Sind $P_0, ..., P_{n+1}$ in allgemeiner Lage in $P(V)$ und sind $Q_0, ..., Q_{n+1}$ in allgemeiner Lage in $P(W)$, dann gibt es genau eine Projektivität $\varphi : P(V) \to P(W)$ mit $\varphi(P_i) = Q_i$ für alle $i = 0, ..., n+1$.
Beweis. Es ist $P_i = \mathbb{K}v_i$ mit $v_i \in V \setminus \vec{0}$ für $i = 0, ..., n$ und analog $Q_i = \mathbb{K}w_i$ mit $w_i \in W \setminus \vec{0}$. Nach Voraussetzung bilden $v_0, ..., v_n$ eine Basis von V und $w_0, ..., w_n$ eine Basis von W. Sei $f : V \to W$ die durch $f(v_i) = \lambda_i w_i$ mit noch zu bestimmenden $\lambda_i \in \mathbb{K}$ für $i = 0, ..., n$ definierte $\mathbb{K}-$lineare Abbildung. Es ist $v_{n+1} = \sum_{i=0}^n \mu_i v_i$ mit $0 \neq \mu_i \in \mathbb{K}$ für alle $i = 0, ..., n$, da $P_0, \ . \ . \ . \ , P_{n+1}$ in allgemeiner Lage sind, und analog $w_{n+1} = \sum_{i=0}^n \eta_i w_i$ mit $0 \neq \eta_i \in \mathbb{K}$.
Setze $\lambda_i = \frac{\eta_i}{\mu_i}$, $\eta_i = \mu_i \lambda_i$ für $i = 0, ..., n$. Dann ist
$f(v_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \mu_i f(v_i) = \sum_{i=0}^n \eta_i w_i = w_{n+1}$.
Für $\varphi : P(V) \to P(W)$, $\mathbb{K}v \mapsto \mathbb{K}f(v)$, ist dann $\varphi(P_i) = Q_i$ und $\vec{\varphi} = f$.
Bis auf einen Faktor $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ist $\vec{\varphi}$ eindeutig bestimmt, $\square$

Folgerung. Jede Projektivität ist eine Zentralprojektion.

Folgerung. Sei $\varphi : P(\mathbb{K}^{n+1}) \to P(\mathbb{K}^{n+1})$ eine Projektivität. Es gibt projektive Hyperebenen $H_1, H_2 \in P(\mathbb{K}^{n+2})$, eine Gerade $G \in \mathbb{K}^{n+2}$, und Projektivitäten $\varphi_1 : P(\mathbb{K}^{n+1}) \to H_1$ und $\varphi_2 : H_2 \to P(\mathbb{K}^{n+1})$ sodass $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_G \circ \varphi_1$, wobei φ_G die Zentralprojektion bzgl. Gerade G ist.

Beweis. Wir betrachen zwei beliebeige $H_1 = P(U_1)$, $H_2 = P(U_2)$ und Gerade $G = P(V)$ mit
(i) $G \cap P(U_1) = G \cap P(U_2) = \varnothing$. Dann ist
(ii) $G \vee P(U_1) = G \vee P(U_2) = P(V)$ automatisch erfüllt.
Die dazugehörige Zentralprojektion bezeichnen wir φ_G. Nach Satz 49 ist φ_G eine Projektivität. Wir nehmen eine Basis $(B_0, ..., B_{n+1})$ in $P(\mathbb{K}^{n+1})$. Die Bilder $\varphi_{B_0}, ..., \varphi(B_{n+1})$ sind auch in der allgemeinere Lage, und bilden deswegen eine Projektive Basis. Wir nehmen eine projektive Basis $(P_0, ..., P_{n+1})$ in H_1. Dann ist $(Q_0 = \varphi_G(P_0), ..., Q_{n+1} = \varphi_G(P_{n+1}))$, auch eine projektive Basis in H_2. Wir betrachten Projektivitat φ_1, die $B_0, ..., B_{n+1}$ jeweils in $P_0, ..., P_{n+1}$ Standard-Basispunkten überführt, und eine Projektivität φ_2, die $Q_0, ..., Q_{n+1}$ jeweils in $\varphi_{B_0}, ..., \varphi(B_{n+1})$ überführt. Die Verkettung $\varphi_2 \circ \varphi_G \circ \varphi_1 : P(\mathbb{K}^{n+1}) \to P(\mathbb{K}^{n+1})$ bildet nach Konstruktion die Punkte $B_0, ..., B_{n+1}$ jeweils auf $\varphi_{B_0}, ..., \varphi(B_{n+1})$ ab; nach Satz 51 ist dann $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_G \circ \varphi_1$, $\square$

Das Doppelverhältnis

Sei $n = 1$ und $X = P(V)$ mit $dim(V) = 2$. Dann sind je drei verschiedene Punkte $P_0, P_1, P_2 \in X$ in allgemeiner Lage. Seien nun P_0, P_1, P_2, P_3 vier paarweise verschiedene Punkte in X. Dann gibt es nach Satz 51 genau eine Projektivität $\varphi_X : X \longrightarrow P(\mathbb{K}^2)$ mit

$$\varphi_X(P_0) = (1:0), \ \varphi_X(P_1) = (1:1), \ \text{ und } \ \varphi_X(P_2) = (0:1).$$

Dadurch ist $\phi_X(P_3) =: (\lambda : \mu)$ schon eindeutig festgelegt. Man nennt $D(P_0, P_1, P_2, P_3) = (\lambda : \mu) \in P(\mathbb{K}^2)(= \mathbb{K} \cup \infty$ das Doppelverhältnis der vier Punkte $P_0, P_1, P_2, P_3 \in X$.

Satz 52. Sei $dim(V) = 2 = dim(W)$. Seien $X = P(V)$ und $Y = P(W)$ zwei projektive Geraden. Ist $\varphi : X \longrightarrow Y$ eine Projektivität, so gilt $D(P_0, P_1, P_2, P_3) = D(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3))$ für je vier paarweise verschiedene Punkte $P_0, P_1, P_2, P_3 \in X$. Das Doppelverhältnis bleibt also unter Projektivitäten erhalten.

Satz 52. Sei $dim(V) = 2 = dim(W)$. Seien $X = P(V)$ und $Y = P(W)$ zwei projektive Geraden. Ist $\varphi : X \to Y$ eine Projektivität, so gilt $D(P_0, P_1, P_2, P_3) = D(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2), \varphi(P_3))$ für je vier paarweise verschiedene Punkte $P_0, P_1, P_2, P_3 \in X$. Das Doppelverhältnis bleibt also unter Projektivitäten erhalten.

Beweis. Sei $Q_i = \varphi(P_i)$ für $i = 0, 1, 2, 3$. Dann gelten

$$(\varphi_Y \circ \varphi)(P_0) = \varphi_Y(Q_0) = (1 : 0) = \varphi_X(P_0)$$
$$(\varphi_Y \circ \varphi)(P_1) = \varphi_Y(Q_1) = (1 : 1) = \varphi_X(P_1)$$
$$(\varphi_Y \circ \varphi)(P_2) = \varphi_Y(Q_2) = (0 : 1) = \varphi_X(P_2),$$

also ist $\varphi_Y \circ \varphi = \varphi_X$ nach Satz 51. Damit folgt
$(\varphi_Y \circ \varphi)(P_3) = \varphi_X(P_3) = D(P_0, P_1, P_2, P_3)$, $\square$.

Beispiel. Seien $P_i = (1 : \lambda_i) \in P(\mathbb{K}^2)$ für $i = 0, 1, 2, 3$ paarweise verschiedene Punkte. Für die Möbiustransformation

$$\varphi : K \cup \{\infty\} \longrightarrow K \cup \{\infty\}, \quad x \longmapsto \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_0} \cdot \frac{x - \mu_0}{x - \mu_2}$$

gilt $\varphi(\mu_0) = 0$, $\varphi(\mu_1) = 1$ und $\varphi(\mu_2) = \infty$. Es ist dann

$$D(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = \frac{\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_0}}{\frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_3 - \mu_0}}$$

das Doppelverhältnis von $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$.

Das Doppelverhältnisin Determinantenform

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$$

ist es in Determinantenform

$$\boxed{DV(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{det\begin{pmatrix} x_0 & u_0 \\ x_1 & u_1 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} x_0 & v_0 \\ x_1 & v_1 \end{pmatrix}} : \frac{det\begin{pmatrix} y_0 & u_0 \\ y_1 & u_1 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} y_0 & v_0 \\ y_1 & v_1 \end{pmatrix}}.}$$