Wiederholung.

Def. 39. Der zum Vektorraum V gehörige projektive Raum $P(V)$ ist definiert als die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume von V .

Falls $V = \mathbb{K}^{n+1}$ ist, bezeichnet man $P(V)$ oft mit $P^n(\mathbb{K})$ (s.d. $P(\mathbb{K}^{n+1}) = P^n(\mathbb{K})$), oder sogar mit $\mathbb{P}\mathbb{K}^n$.
Bemerkung. Man hat eine kanonische Abbildung
$V \setminus \{\vec{0}\} \to P(V), v \mapsto \mathcal{G}_v := \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{K}\} := \mathbb{K}v.$
Def. 40 Sei $V = \mathbb{K}^{n+1}$. Dann sind die homogenen Koordinaten von $v = (x_0, x_1, ..., x_n) \in V \setminus \{\vec{0}\}$ definiert durch
$\boxed{(x_0 : x_1 : ... : x_n) := \mathcal{G}_v := \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{K}\}}$.
Die homogenen Koordinaten sind also nur bis auf einen gemeinsamen Faktor $\lambda \neq 0$ aus $\mathbb{K}$ festgelegt.

Eine Funktion $f : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt homogen mit Grad $k \in \mathbb{Z}$, falls $f(\lambda x_0, ..., \lambda x_n) = \lambda^k f(x_0, ..., x_n)$ für alle $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$

Bsp. Eine lineare Funktion $f \in (\mathbb{K}^{n+1})^*$ ist 1-homogen.
f^2 ist $2-$homogen.

Bemerkung. Sei f eine homogene funktion. Liegt $(x_0, ..., x_n)$ in der Lösungsmenge der Gleichung $f(x) = 0$, so liegen alle Punkte der Gerade $\mathbb{K}(x_0, ..., x_n)$ in der Lösungsmenge der Gleichung $f(x) = 0$. Also, die Gleichung $f(x) = 0$ kann man als Gleichung auf $P(\mathbb{K}^{n+1})$ verstehen.

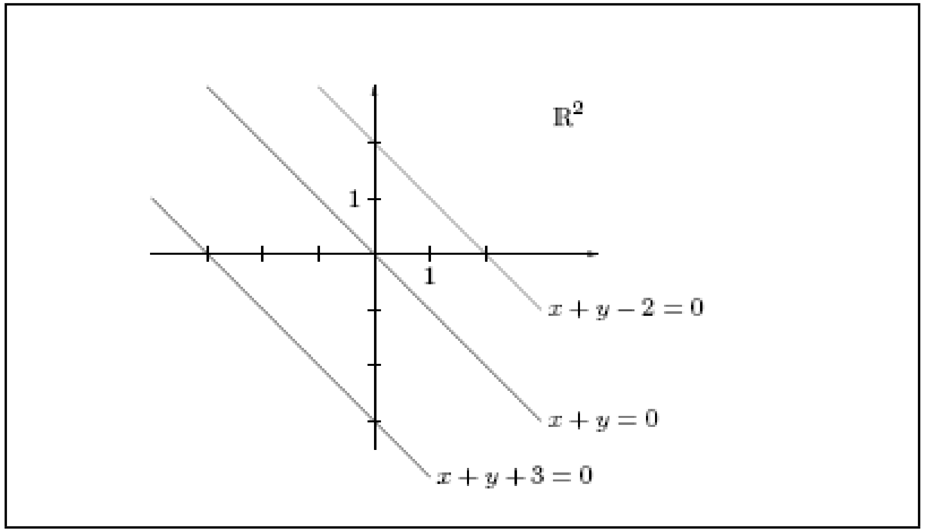
Beispiele zur Homogenisierung

Sei $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ und $(b, c) \neq (0, 0)$. Man betrachte in der affinen Ebene $\mathbb{K}^2$ die Gerade mit der Gleichung $bx + cy + a = 0$.
Die Gleichung ist inhomogen, wenn $a \neq 0$.
Setze $x = \frac{x_1}{x_0}$ und $y = \frac{x_2}{x_0}$ mit $x_0 \neq 0$. Dann folgt $b\frac{x_1}{x_0} + c\frac{x_2}{x_0} + a = 0$ und also durch Multiplikation mit x_0
$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0 \qquad (*)$.
Nach Def. 40 ist $(x_0 : x_1 : x_2) = (\frac{1}{x_0}x_0 : \frac{1}{x_0}x_1 : \frac{1}{x_0}x_2) = (1 : x : y)$.
Es ist also $(y_0 : y_1 : y_2) \in P(\mathbb{K}^3)$ genau dann eine Lösung von $(*)$, wenn $(y_0 : y_1 : y_2) = (1 : x : y)$ mit einer Lösung (x, y) von $(*)$ gilt oder wenn $(y_0 : y_1 : y_2) = (0 : c : -b)$ ist.

Beispiel.

Betrachte in $\mathbb{R}^2$ die parallelen Geraden

$x + y - 2 = 0, x + y = 0, x + y + 3 = 0.$



Homogenisierung liefert:

$$\begin{aligned} x + y - 2 = 0 &\quad\rightsquigarrow\quad -2x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x + y = 0 &\quad\rightsquigarrow\quad 0 \cdot x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x + y + 3 = 0 &\quad\rightsquigarrow\quad 3x_0 + x_1 + x_2 = 0 \end{aligned}$$

In allen drei Fällen ist $(0 : 1 : -1)$ eine Lösung in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Die Geraden haben also einen Schnittpunkt in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Projektive Geraden in $P^2(\mathbb{K})$

Eine projektive Gerade $G \in P^2(\mathbb{K})$ ist die Nullstellenmenge in $P^2(\mathbb{K})$ einer Gleichung

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0 \quad \text{mit} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Es ist also

$$G = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in P^2(\mathbb{K}) \mid ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}.$$

Ist $b = c = 0$, so ist G die unendlich ferne Gerade
$P^1 := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in P^2(\mathbb{K}) \mid x_0 = 0\}$.
Die übrigen Geraden in $P^2(\mathbb{K})$ erhält man, wie in Bsp. oben beschrieben, durch Homogenisierung und durch Hinzufügen des unendlich fernen Punktes $(0 : c : -b) \in P^1(\mathbb{K})$.
Ist $c \neq 0$, so ist $U = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3 \mid ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^3$ mit Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix} \right)$ und es ist $G = P(U)$.

Projektive Unterräume in $P(V)$

Def. 41 Eine Teilmenge $X \subseteq P(V)$ heißt projektiver Unterraum, falls $X = P(U)$ mit einem Untervektorraum U von V gilt. Es ist dann
• X eine projektive Gerade in $P(V)$, falls $dim(X) = 1$
• eine projektive Hyperebene in $P(V)$, falls $dim(X) = dim(P(V)) - 1$ und $dim V < \infty$.

Beispiele.

Seien $(X_i = \mathbb{P}(U_i))_{i \in I}$ projektive Unterräume von $\mathbb{P}(V)$, dann ist

$$\boxed{\bigcap_{i \in I} X_i = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in I} U_i\Big)}$$

ein projektiver Unterraum.

Man nennt den kleinsten projektiven Unterraum von $P(V)$, der $\bigcup_{i \in I} X_i$ enthält, den Verbindungsraum $\vee_{i \in I} X_i$ (das ist ein Analog von Hülle). Es ist

$$\boxed{\bigvee_{i \in I} X_i = \mathbb{P}\Big(\sum_{i \in I} U_i\Big)}$$

Dimensionssatz

Satz 45. Sei $dim(P(V)) < \infty$. Für projektive Unterraüme $X_1 = P(U_1)$ und $X_2 = P(U_2)$ gilt

$$\boxed{\dim(X_1 \vee X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \cap X_2)}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{array}{rclr} dim(X_1 \vee X_2) & = & dim(U_1 + U_2) - 1 & \text{nach Def. 39 und Def. 41.} \\ & = & dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1 \cap U_2) - 1 & \text{nach Aufgabe 3 Blatt 7} \\ & = & dim(X_1) + 1 + dim(X_2) + 1 - (dim(X_1 \cap X_2) + 1) - 1 & \text{nach Def. 39 und Def. 41.} \\ & = & dim(X_1) + dim(X_2) - dim(X_1 \cap X_2) & \end{array},$$

$\square$

Schnittpunktsatz

Satz 46. Sei $dim(P(V)) < \infty$. Dann gelten:
(i) Ist $dim(X_1) + dim(X_2) \geq dim(P(V))$ für zwei projektive Unterraüme X_1, X_2 von $P(V)$, so ist $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.
(ii) Ist $X_1 = G$ eine projektive Gerade in $P(V)$, $X_2 = H$ eine projektive Hyperebene in $P(V)$, und gilt $G \not\subseteq H$, dann schneiden sich G und H in genau einem Punkt $p \in P(V)$.
(iii) Zwei projektive Geraden in $P^2(\mathbb{K})$ schneiden sich stets.

Beweis (i): $dim(X_1 \cap X_2) \overset{\text{Satz 45}}{=} dim(X_1) + dim(X_2) - dim(X_1 \vee X_2)$ $\geq dim(X_1) + dim(X_2) - dim(P(V)) \geq 0 \overset{Def.39}{\Longrightarrow} X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.
Beweis (ii): Aus $G \not\subseteq H$ folgt $dim(X_1 \vee X_2) = dim(P(V))$ und somit $dim(X_1 \cap X_2) = 0$. Es ist also $X_1 \cap X_2 = \{p\}$ ein Punkt.
(iii) folgt aus (ii), da die Hyperebene H eine projektive Gerade in $P(\mathbb{K}^2)$ ist, $\square$

Projektiver Abschluss von $P(\mathbb{K}^n)$

Sei $V = \mathbb{K}^{n+1}$. Betrachte die Abbildung

$$\psi : \mathbb{K}^n \to P(V),\ (x_1, ..., x_n) \mapsto (1 : x_1 : ... : x_n) = \mathbb{K}v \text{ mit } v = (1, x_1, ..., x_n)$$

Es ist $U = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid x_0 = 0\}$ ein $n-$dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{K}^{n+1}$, also ist $H := P(U)$ eine Hyperebene in $P(V)$.

Behauptung $Bild_\psi = P(V) \setminus H$.

Beweis. Nach Definition gilt: $Bild_\psi \subseteq P(V) \setminus H$.

Sei $(y_0 : y_1 : ... : y_n) \in P(V) \setminus H$, also $y_0 \neq 0$.

$\Longrightarrow (y_0 : y_1 : ... : y_n) = \left(1 : \frac{y_1}{y_0} : ... : \frac{y_n}{y_0}\right) = \psi\left(\frac{y_1}{y_0}, ..., \frac{y_n}{y_0}\right)$, $\square$

Man nennt H die unendlich ferne Hyperebene, heißt kanonische Einbettung von $\mathbb{K}^n$ in $P(\mathbb{K}^{n+1})$, und $P(\mathbb{K}^{n+1})$ wird als projektiver Abschluss von $\mathbb{K}^n$ bezeichnet. Man schreibt auch $P(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{K}^n \cup A_\infty$, wobei $A_\infty = H$ ist. Für $n = 1$ schreibt man dann speziell $P(\mathbb{K}^2) = \mathbb{K}^1 \cup \infty$, da H dann ein Punkt ist.

Projektivitäten

Def. 42. Seien V, W zwei $(n+1)$-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann heißt eine bijektive Abbildung $\varphi : P(V) \to P(W)$ eine Projektivität, falls es eine bijektive $\mathbb{K}-$lineare Abbildung

$$\vec{\varphi} : V \longrightarrow W \text{ gibt mit } \varphi(P) = \vec{\varphi}(P) \quad \forall P \in \mathbb{P}(V)$$

(Hierbei ist P ein Punkt von $\mathbb{P}(V)$ und also ein eindimensionaler Teilraum von V.) Es ist dann $\vec{\varphi}$ *nicht* eindeutig durch φ bestimmt, denn für $\lambda \in K^*$ ist $(\lambda\vec{\varphi})(P) = \vec{\varphi}(\lambda P) = \vec{\varphi}(P)$.

Ferner gilt $\boxed{\varphi(\mathbb{P}(U)) = \mathbb{P}(\vec{\varphi}(U))}$ für jeden Untervektorraum U von V und jede Projektivität φ.

Bemerkung. Wir haben oben die folgende bezeichnung benutzt: $\vec{\varphi}(P) = Bild_{\varphi}(\mathbb{K}P)$.

Kollineationen

Def. 43 Eine bijektive Abbildung $\varphi : P(V) \to P(W)$ heißt Kollineation, wenn das Bild einer projektive Geraden G durch die Punkte $P, Q \in\subseteq P(V)$ die projektive Gerade durch die Punkte $\varphi(P), \varphi(Q) \in P(W)$ ist.

Satz 47. Es gilt:

(i) Zu je zwei Punkten $P, Q \in P(V)$ mit $P \neq Q$ gibt es genau eine projektive Gerade G, die P und Q enthält.

(ii) Ist $\varphi : P(V) \to P(W)$ eine Projektivität, so ist φ eine Kollineation.

Beweis.

(i) Es ist $P = \mathbb{K}v_1$ und $Q = \mathbb{K}v_2$ mit $v_1,\ v_2 \in V \setminus \vec{0}$. Da $P \neq Q$ ist folgt, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind. Es ist also $g = P(U)$ mit $U = \mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2 :=$ die gesuchte projektive Gerade.

(ii) Es ist $\varphi(G) = P(\vec{\varphi}(U))$. Daraus folgt die zweite Behauptung, $\square$

Weitere Beispiele zur Homogenisierung

Analog konstruiert man zu einer Hyperebene
$X = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + ... + a_nx_n + b = 0\}$
durch Homogenisierung ihrer definierenden Gleichung den Abschluss

$$\bar{X} = \{(y_0 : y_1 : ... : y_n) \in P(\mathbb{K}^{n+1}) | by_0 + a_1y_1 + ... + a_ny_n = 0\}.$$

(in $P(\mathbb{K}^{n+1})$. Man setze $x_i = \frac{y_i}{y_0}$ für alle $i = 1, ..., n$.)
Analog erhält man durch Homogenisierung den projektiven Abschluss von Quadriken, Kegelschnitten, etc.

Beispiele.

Betrachte die definierenden Gleichungen

i) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ Kreis

ii) $x^2 - y^2 - 1 = 0$ Hyperbel

iii) $x^2 - y = 0$ Parabel

Homogenisierung Mit $x = \frac{x_1}{x_0}$ und $y = \frac{x_2}{x_0}$ erhält man:

i) $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

ii) $-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

iii) $x_1^2 - x_2x_0 = 0$

Behauptung. Kreis, Hyperbel und Parabel sind projektiv äquivalent, d.h. die zugehörigen projektiven Kurven gehen durch eine Projektivität $\varphi : P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$ ineinander über.

Beispiele.

Betrachte die definierenden Gleichungen

i) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ Kreis

ii) $x^2 - y^2 - 1 = 0$ Hyperbel

iii) $x^2 - y = 0$ Parabel

Homogenisierung Mit $x = \frac{x_1}{x_0}$ und $y = \frac{x_2}{x_0}$ erhält man:

i) $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

ii) $-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

iii) $x_1^2 - x_2 x_0 = 0$

Beweis. Durch $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 : x_0 : x_2)$ geht die projektive Quadrik mit der Gleichung (ii) in die projektive Quadrik mit der Gleichung (i) über. Durch $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 + x_2 : x_1 : x_0 - x_2)$ erhält man aus Gleichung (iii) die Gleichung (i), $\square$

Bemerkung. Ist $H = P(U)$ eine projektive Hyperebene in $P(V)$, so ist $\mathcal{A} := P(V) \setminus H$ ein affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum U, und es ist $A_\infty = H$

Frage: Was geschieht dabei mit einer projektiven Quadrik in $P(V)$?

Beispiel. Sei $Q = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in P(\mathbb{R}^3) \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$.

(1) Sei $H = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in P(\mathbb{R}^3) | x_0 = 0\}$ und

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to P(\mathbb{R}^2) \setminus H, \quad (x_1, x_2) \mapsto (1 : x_1 : x_2).$$

Dann ist $Q \cap H = \varnothing$, und $Urbild_\psi(Q) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$ ist ein Kreis. Ersetzt man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$, so besteht $Q \cap H$ aus zwei Punkten.

(2) Sei $H = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in P(\mathbb{R}^3) | x_1 = 0\}$. Dann besteht $Q \cap H$ aus zwei Punkten, und für

$\psi : \mathbb{R}^2 \to P(\mathbb{R}^3) \setminus H,\ (x_0, x_2) \mapsto (x_0 : 1 : x_2)$ ist

$Urbild_\psi(Q) = \{(x_0, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0^2 - x_2^2 - 1 = 0\}$ eine Hyperbel.

(3) Sei $H = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in P(\mathbb{R}^3) | x_0 + x_1 = 0\}$. Dann ist $Q \cap H$ ein Punkt, und für

$\psi : \mathbb{R}^2 \to P(\mathbb{R}^3) \setminus H,\ (x_1, x_2) \mapsto ((1 - x_1) : x_1 : x_2)$ ist

$Urbild_\psi(Q) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2^2 + 2x_1 - 1 = 0\}$ eine Parabel. (Die Substitution $x_1 = -z_1 + \frac{1}{2}$ ergibt $\frac{1}{2}x_2^2 - z_1 = 0$.) (Je nachdem, was man als unendlich ferne Hyperebene auszeichnet, erhält man aus Q die drei affinen Kurven: Kreis, Hyperbel, Parabel)

Explizite Beschreibung von Projektivitäten

Sei $V = \mathbb{K}^{n+1}$ und $\varphi : P(V) \to P(V)$ eine Projektivität. Bezüglich der Standardbasis wird $\vec{\varphi} : V \to V$ durch eine Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$$

beschrieben. Es ist dann $\varphi(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = (y_0 : y_1 : \ldots : y_n)$ mit $y_i = a_{i0}x_0 + \ldots + a_{in}x_n$. Übergang zu inhomogenen Koordinaten ergibt

$$y_i' = \frac{y_i}{y_0} = \frac{a_{i0}x_0 + \ldots + a_{in}x_n}{a_{00}x_0 + \ldots + a_{0n}x_n} = \frac{a_{i0} + a_{i1}x_1' + \ldots + a_{in}x_n'}{a_{00} + a_1x_1' + \ldots + a_{0n}x_n'}$$

mit $x_i' = \frac{x_i}{x_0}$ und $x_0 \neq 0$. Die Abbildung

$$\varphi' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad (x_1', \ldots, x_n') \mapsto (y_1', \ldots, y_n')$$

ist auf der affinen Hyperebene $\mathcal{E} = \{(x_1', \ldots, x_n') \in \mathbb{K}^n | a_{00} + a_{01}x_1' + \ldots + a_{0n}x_n' = 0\}$ nicht definiert. Die Punkte von $\mathcal{E}$ werden auf die unendlich ferne Hyperebene abgebildet.

Ist speziell $n = 1$ und $P(\mathbb{K}^1) = \mathbb{K} \cup \infty$, so ist mit $x_1' =: x$ und $y_1' =: y$ eine Projektivität gegeben durch

$$x \mapsto y := \frac{a_{11}x + a_{10}}{a_{01}x + a_{00}}$$

(„Möbiustransformation“). Der Punkt $x = -\frac{a_{00}}{a_{01}}$ wird auf ∞ abgebildet, falls $a_{01} \neq 0$. Definiere $\infty \mapsto -\frac{a_{00}}{a_{01}}$.