Hamel-Basen

Def. 37 Eine Hamel-Basis von $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, +, \cdot)$ ist eine Teilmenge $B \subseteq V$, so dass
• sie linear unabhängig ist (d.h., das Null-Element $\vec{0}$ nur als triviale **ENDLICHE** Linearkombination der Elemente von B dargestellt werden kann.)
•• sie ist erzeugend : Man kan jedes Element von V als **ENDLICHE** Linearkombination der Elemente von B darstellen.

Bemerkung. In Satz 25 LAAG I haben wir bewiesen, dass (••) zur folgenden Aussage äquivalent ist: Die Menge B ist maximal: wenn wir noch einen Element hinzufügen, wird die Menge linear abhängig.

Falls der Vektorraum V endlich erzeugt ist, ist Hammel-Basis fast dasselbe wie eine Basis: wenn wir die Elemente von B als ein Tupel schreiben, bekommen wir eine Basis, und umgekehrt.

Satz 44. Jeder Vektorraum hat eine Hamel-Basis

Beweis. Sei V ein Vektorraum. Wir betrachten:

$P := \{X \subseteq V \mid X \text{ linear unabhängig } \} \subseteq 2^V$.

Die Menge P ist bezuglich der Relation „$\subseteq$“ halbgeordnet. Es gilt:

1. Besteht V nicht nur aus dem Nullvektor, dann ist P nicht leer (weil jede Einermenge $\{v\}$ mit $v \in V$ und $v \neq \vec{0}$ ein Element von P ist).

2. Für jede total geordnete Teilmenge $T \subseteq P$ ist auch $\bigcup T := \bigcup_{X \in T} X = \{v \mid \exists X \in T : v \in X\}$ in P.

In der Tat, die Menge $\bigcup T$ ist linear unabhängig: endlich viel Vektoren $\underbrace{v_1}_{\in X_1}, \dots, \underbrace{v_k}_{\in X_k}$ liegen alle in der grossten vom $X_1, \dots, X_k$; (existiert, weil T total geordnet ist) dann sind sie nach Konstruktion linear unabhängig. Also, T hat eine obere Schränke.

Aus dem Lemma von Zorn folgt nun, dass P ein maximales Element hat. Die maximalen Elemente von P sind nun aber genau die maximalen (in Sinne der Bemerkung oben) linear unabhängigen Teilmengen von V, also die Basen von V. Daher hat V eine Basis und es gilt darüber hinaus, dass jede linear unabhängige Teilmenge von V in einer Basis von V enthalten ist,

Bsp. Da $\mathbb{Q}$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Nach Satz 1 ist er unendlichdimensional. Er hat trotsdem eine Hamel-Basis, d.h., die Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ sodass jedes $a \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Linearkombination von der Elementen von B ist. Diese Menge B kann man nicht konstruieren, wir kennen nur die Existenz.

Die Basis B ist nicht explizit gegeben, und ist mit Hilfe von Auswahlfunktion konstruiert. Wir können sie nicht explizit geben: „Explizit" bedeuted, dass wir die Basiselemente in Worten beschreiben.

Aber: Kardinalität von allen möglichen Sätze ist $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ (auch wenn wir die unendlichen Sätze erlauben), aber die Kardinalität von B ist $\aleph_1 = |\mathbb{R}|$.

Frage. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \qquad (*)$$

Ist sie linear?

(Umformulieren: folgt $f(\lambda \cdot x) = \lambda f(x)$ aus $(*)$?)

Angenomenn $f(1) = \alpha \neq 0$. Dann ist $f(2) = f(1+1) \overset{(*)}{=} 2\alpha$, induktiv $f(n) = n \cdot \alpha$.

Dann ist $f(0+1) \overset{(*)}{=} f(0) + f(1) = f(1) \implies f(0) = 0$.
Analog $f(-n)$ ist die Zahl sodass $f(-n) + f(n) = f(0) = 0$; schliesslich $f(-n) = -n\alpha$
Analog $f(p/q)$ ist die Zahl sodass

$$q \cdot f(p/q) = \underbrace{f(p/q) + \ldots + f(p/q)}_{q \text{ Stück}} \overset{(*)}{=} f(\underbrace{p/q + \ldots + p/q}_{q \text{ Stück}}) = f(p) =$$

$p\alpha \implies f(p/q) = p/q \cdot \alpha$.
Also, $f(x)$ fällt mit der (linearen Funktion) $\alpha \cdot x$ auf $\mathbb{Q}$ zusammen.
Insbesondere gilt: wenn wir zusätzlich verlangen, dass f stetig ist, dann ist sie linear.

Es gibt aber nichtlineare Funktionen mit der Bedingung $(*)$:
Man betrachte z.B. zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, die über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind (z.B. $a = 1$ und $b = \sqrt{2}$), und eine Hamel-Basis B in $\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{ein } \mathbb{Q}\text{-Vektorraum}}$, sodass $a, b \in B$ sind.

Wiederholung. Um eine lineare Abbildung zu definiren, brauchen wir nur die Bilder von Basiselementen einzugeben. (Satz 30 LAAG I)

Wir wählen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und setzen $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ und $\forall x \in B \setminus \{a, b\}$ setzen wir $f(x) := 0$.
Die Abbildung ist linear (über $\mathbb{Q}$).
Sie erfüllt deswegen $f(x + y) = f(x) + f(y)$, wie wir wollen.

Bemerkung. Man kann selbstverständlich mehr als zwei Basisvektor benutzen, sogar $\aleph_0$ Vektoren.

Was kennen wir über f

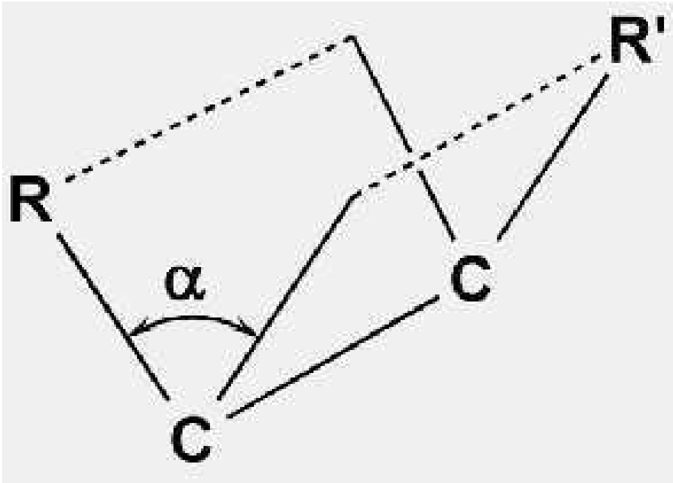
Def von f: $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ und $\forall x \in B \setminus \{a, b\}$ $f(x) := 0$.

Also, wir können nur die Werte von Funktion f auf der Zahlen der Form $\frac{p_1}{q_1}a + \frac{p_2}{q_2}b$ berechnen (wobei $\frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{Q}$);
$f\left(\frac{p_1}{q_1}a + \frac{p_2}{q_2}b\right) = \frac{p_1}{q_1}\alpha + \frac{p_2}{q_2}\beta$. Dies reicht, um 3. Problem von Hilbert zu lösen.

Wiederholung: Das dritte Hilbertsche Problem (1900): Sind je zwei 3-dim Polyeder mit gleichem Volumen zerlegungsgleich, das heißt kann man immer ein Polyeder in polyedrische Teile schneiden und das andere Polyeder aus diesen Teilen zusammensetzen?
Antwort: Nein: Sogar ein Würfel kann man nicht in polyedrische Teile schneiden und dann ein regelmäßiges Tetraeder aus diesen Teilen zusammensetzen.

Beweis. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Polyedra. Wir betrachten die Folgende Abbildung $F : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$:

$$F(P) := \sum_{\substack{l \text{ ist} \\ \text{eine Kante} \\ \text{von } P}} |l| \cdot f(\phi(l)),$$



wobei $|l|$ ist die Länge von der Kante l,
$\phi(l)$ ist der Diederwinkel um Kante l, s. Bild.

Und f ist die oben konstruierte Abbildung (mit der Eigenschaft $f(x+y) = f(x) + f(y)$); die Daten $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind wie folgt:

a ist der Diederwinkel von Würfel (d.h., $a = \pi/2$)
b ist der Diederwinkel vom regelmäßigen Tetraeder (die Zahlen a und b sind über $\mathbb{Q}$ linearunbhängig;wir werden es nicht beweisen).
$\alpha = 0$ **und** $\beta = 1$

Die Funktion F vom Würfel und vom regelmäßigen Tetraeder

Wir können die Funktion f nur für einige Einträge ausrechnen, und zwar nur für Linearkombinationen von a und b. Das reicht, um $F(\text{Würfel})$ und $F(Reg.Tetraeder)$ auszurechnen.

$$F(\text{Würfel}) = \sum_{\substack{I \text{ ist} \\ \text{eine Kante}}} |I| \underbrace{\alpha}_{=0} = 0 \quad ;$$

$$F(\text{Reg. Tetraeder}) = \sum_{\substack{I \text{ ist} \\ \text{eine Kante}}} |I| \underbrace{\beta}_{=1} > 0.$$

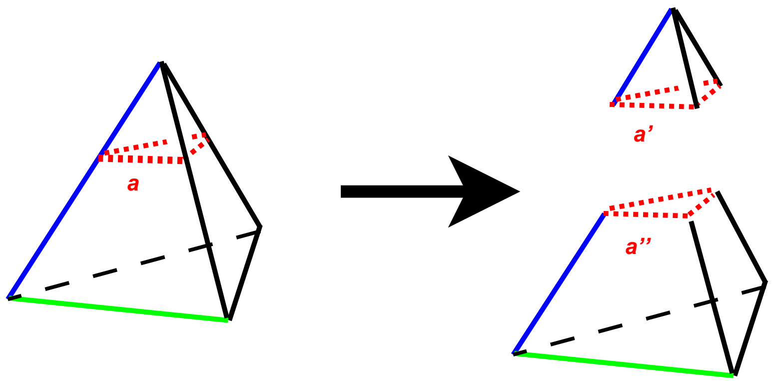
Wir sehen, dass $F(\text{Würfel}) \neq F(\text{Reg. Tetraeder})$
Das folgende Behauptung löst das 3. Problem von Hilbert:

Behauptung Sind zwei Polyeder P_1 und P_2 zerlegungsgleich, so gilt $F(P_1) = F(P_2)$.

Lösung des 3. Problem von Hilbert. Da $F(\text{Würfel}) \neq F(\text{Reg. Tetraeder})$ ist, sind Würfel und reg. Tetraeder nicht zerlegungsgleich.

Behauptung Sind zwei Polyeder P_1 und P_2 zerlegungsgleich, so gilt $F(P_1) = F(P_2)$.

Beweis der Behauptung: Wenn wir ein Polyeder (T auf dem Bild) mit einen Ebene in zwei Polyedra (T_1, T_2) schneiden, gilt $F(T) = F(T_1) + F(T_2)$.



In der Tat, der Ausdruck $|l|f(\phi(l))$, der grüne Kante entspricht, bleibt unverändert.
Der Ausdruck , $|l|f(\phi(l))$, der blaue Kante entspricht, ist die Summe von Ausdrucke der blauen Kanten von T_1 und T_2.
Die Summe von Ausdrücke für die neuen kanten a' und a'' ist 0, weil $|a'| = |a''| = |a|$, und

$$|a'|f(\phi(a')) + |a''|f(\phi(a'')) \overset{(*)}{=} |a|f(\phi(a') + \phi(a'')) = |a|f(\pi) = 2|a|f(\pi/2) = 0.$$

Da man OBdA annehmen kann, dass P_1 mit Hilfe von endlich viel Anwendungen von schneiden in zwei Polyedra zerlegt ist, ist die Behauptung bewiesen.

Neuer (kurzer) Abschnitt: Transformationsgruppen (Einführung)

- Sei $\mathcal{S}_M$ die Menge aller Bijektionen a von M auf sich (heissen oft Selbstabbildungen).
- $\mathcal{S}_M$ ist eine Gruppe bzgl. Verkettungen, siehe Satz 3 Vorl. 4 LAAG I.
- Transformationsgruppe (informell) ist eine Untergruppe von $\mathcal{S}_M$, die irgendwelche Eigenschaften von Objekten von M nicht verändert.

Affine Transformationen

Zwei Definitionen:
Ursprüngliche Def. aus LAAG I; und auch aus LAAG II, siehe
Def. 13 Eine affine Transformation, oder Affinität, (von $M = \mathbb{R}^n$) ist eine Abbildung der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in GL(n, \mathbb{R})$.

Folgerung aus Satz 22 (Fundamentalsatz der affinen Geometrie). Eine affine Transformation ist eine Bijektion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die Geraden auf Geraden abbildet.

Euklidische Transformationen

Wiederholung. Euklidische Räume sind affine Räume über Vektorräumen mit Skalarprodukt. In dem Fall ist der Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten erklärt ist: $d(x,y) = |\overrightarrow{xy}| \overset{\text{in } \mathbb{R}^n}{=} |x-y|$.
$a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt eine Isometrie, wenn für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$d(x,y) = d(a(x), a(y))$.

Bsp. Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Saklarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Dann sind die Abbildungen

$$F_{O,b} : V \to V \ , \ F_{O,b} := Ox + b, \qquad (*)$$

wobei O eine orthogonale $(n \times n)-$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist, (bijektive) Isometrien (bzgl. Standard-Metrik).

Satz 68 LAAG I. *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen Euklidischen Raums ist wie in* $(*)$

Das heißt Im Standard-Raum $\mathbb{R}^n$ mit Standard-Skalarprodukt:
jede Isometrie g kann man als

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = O\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ schreiben,}$$

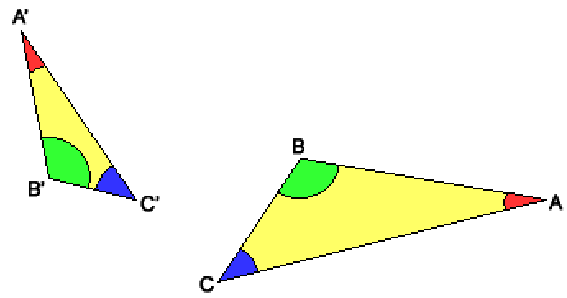
wobei O eine orthogonale Matrix ist.
In Worten Jede Isometrie (der Standard-Metrik) ist Verkettung von Drehung und Verschiebung

Noch ein Bsp.: Ähnlichkeitstransformationen in Elementargeometrie

Schuldefinition: Ähnlichkeitsabbildungen sind Abbildungen, die die Gestalt von Figuren erhalten.

Def. 38 Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarpriodukt $\langle\ ,\ \rangle$.

Eine Bijektion a von $\mathbb{R}^n$ heißt ein Ähnlichkeittransformation , wenn es eine reelle Zahl $k > 0$ gibt, sodass für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$d(a(x), a(y)) = k \cdot d(x, y)$.



Ähnliche Dreiecke

k heißt Ähnlichkeitsfaktor von a.

Bemerkung. Isometrien sind Ähnlichkeitsabbildungen mit $k = 1$.

Folgerung. $a(x) = Cx + c$ mit $C = k \cdot O$, wobei $O \in O(n)$.
Beweis. die Abbildung $\tilde{a}$, $\tilde{a}(x) = \frac{1}{k}a(x)$ ist eine Isometrie.
Folgerung. (Hausaufgabe) Ähnlichkeitsabbldungen sind die Bijektionen, die gleichzeitig Geradentreu sind (d.h., Bild jeder Gerade ist eine Gerade) und Winkeltreu (d.h., Winkel zwichen Geraden $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ ist gleich den Winkel zwichen Geraden $Bild_a(\mathcal{G}_1)$ und $Bild_a(\mathcal{G}_2)$) sind.

Alle oben genannten Transformationsgruppen kann man aus Untergruppen von Matrizengruppen Darstellen:

Wir werden dies in dim 2 erklären, und zuerst nur für Ähnlichkeitsabbildungen obwohl die Dimension nicht wichtig ist: Wir betrachten die ërweiterte Koordinaten“ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{Ersetzt}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. In diesen Koordinaten gilt:

- **Drehung um 0-Punkt:** $\begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$
- **Skalierung:** $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\,x \\ k\,y \\ 1 \end{bmatrix}$
- **Translation:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_v \\ 0 & 1 & y_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + x_v \\ y + y_v \\ 1 \end{bmatrix}$
- **Spiegelung:** $\begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) & 0 \\ \sin(a) & -\cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$

Da jede oben genannte Transformationen (in dim 2) Verkettungen von den Abbildungen aus der Liste links ist, sind die oben genannten Gruppe von Transformationen (isomorph zu) Untegruppen von $GL(\underbrace{n+1}_{=3}, \mathbb{R})$

$\Longrightarrow$ Jede Transformation wird (in den ërweiterten Koordinaten") zu einer Matrizenmultiplikation mit der Matrix der Form
$\begin{pmatrix} \boxed{{}_k O} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$, wobei $O \in O(2)$.
Wir haben diese Formel bereits benutzt, in Vorl. 25– 26, siehe Hauptsätze der Theorie der Quadriken (Normalformen).
Analog gilt: Matrizen der Form $\bar{A} = \begin{pmatrix} \boxed{A} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$, wobei
$A \in GL(2, \mathbb{R})$ repräsentieren alle affinen Transformationen von $\mathbb{R}^2$.

Der projektive Raum $P(V)$ und projektive Transformationen

$(V, +, \cdot)$ sei ein Vektorraum (über $\mathbb{K}$).

Def. 39. Der zu V gehörige projektive Raum $P(V)$ ist definiert als die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume von V. Ist $dim(V) < \infty$, so setzt man $dim(P(V)) := dim(V) - 1$. (Nach Def. ist $P(\{\vec{0}\}) = \varnothing$ und $P(\{\vec{0}\}) = -1$ – wir können damit leben).

Bemerkung. Man hat eine kanonische Abbildung $V \setminus \{\vec{0}\} \to P(V), v \mapsto \mathcal{G}_v := \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Homogene Koordinaten

Def. 40 Sei $V = \mathbb{K}^{n+1}$. Dann sind die homogenen Koordinaten von $v = (x_0, x_1, ..., x_n) \in V \setminus \{\vec{0}\}$ definiert durch

$\boxed{(x_0 : x_1 : ... : x_n) := \mathcal{G}_v := \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{K}\}}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_v = \mathcal{G}_{v'} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus 0 \text{ mit } v' = \lambda v \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus 0 \text{ mit } (x_0', ..., x_n') = (\lambda x_0, ..., \lambda x_n) \end{aligned} .$$

Die homogenen Koordinaten sind also nur bis auf einen gemeinsamen Faktor $\lambda \neq 0$ aus $\mathbb{K}$ festgelegt.