Exkurs in Mengenlehre: Das Auswahlaxiom

Def. 35 Sei A eine Menge von nichtleeren Mengen. Dann heißt $F : A \to \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ eine Auswahlfunktion für A (mit dem Definitionsbereich A und Werbereich Vereinigung von allen Elemente aus A), falls gilt: $\forall X \in A : F(X) \in X$.
F wählt also aus jeder Menge X in A genau ein Element aus.

Das Auswahlaxiom lautet dann wie folgt:
Zu jeder Menge nichtleerer Mengen gibt es mindestens eine Auswahlfunktion.

Das Auswahlaxiom postuliert die Existenz einer Auswahlfunktion, gibt jedoch kein Verfahren an, wie man eine solche konstruieren könnte.

Beispielsweise ist es nicht allgemein möglich, für eine beliebige Menge von Teilmengen $\mathbb{R}$ eine Auswahlfunktion explizit anzugeben.

Das Auswahlaxiom ist von der überwiegenden Mehrheit der Mathematiker akzeptiert. Es folgt nicht von anderen Axiomen der Mathematik. Es gibt Zweigen der Mathematik (z.B Die Konstruktivistische Mathematik), die auf das Auswahlaxiom verzichtet.

Beispiele

Für welche Fälle das Auswahlaxiom relevant ist, sei an den folgenden Beispielen verdeutlicht:

* Für eine endliche Menge $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$von nichtleeren Mengen ist es trivial, eine Auswahlfunktion anzugeben: Man wählt von jeder Menge irgendein bestimmtes Element aus, was problemlos möglich ist. Man braucht das Auswahlaxiom hierfür nicht. Ein formaler Beweis würde Induktion über die Größe der endlichen Menge verwenden.

* Für Mengen von nichtleeren Teilmengen der natürlichen Zahlen ist es ebenfalls problemlos möglich:Man wählt von jeder Teilmenge das kleinste Element aus. Ähnlich kann man für eine Menge von abgeschlossenen Teilmengen der reellen Zahlen eine explizite Auswahlfunktion (ohne Verwendung des Auswahlaxioms) angeben, indem man etwa aus jeder Menge das (wenn möglich positive) Element mit kleinstem Absolutbetrag wählt.

Beispiele

* Selbst für Mengen von Intervallen reeller Zahlen ist eine Auswahlfunktion definierbar: Man wählt von jedem Intervall den Mittelpunkt aus.

* Für Mengen von beliebigen nichtleeren Teilmengen der reellen Zahlen gibt es jedoch keine offensichtliche Definition einer Auswahlfunktion. In diesem Fall ist das Auswahlaxiom relevant. Es postuliert die Existenz einer Auswahlfunktion, ohne sie anzugeben. Man kann sogar beweisen, dass man sie nicht für allen Mengen von beliebigen nichtleeren Teilmengen der reellen Zahlen konstruieren kann. Beweisidea: Es gibt nut abzählbare viel ($= |\mathbb{N}|$) Sätze (in einer Sprache), und deswegen nur abzählbare viel Punkten beschreiben werden kann.

Wir (eigentlich, Sie, das waren Hausaufgaben) haben das Auswahlaxiom bereits zweimal benutzt

Einmal im Beweis von Lemma 2 in LAAG I:

Lemma 2 *$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $A \neq \varnothing$. Dann gilt:*

(1) *f ist injektiv $\iff$ f hat eine Linksinverse.*

(2) *f ist surjektiv $\iff$ f hat eine Rechtsinverse.*

Wiederholung. Eine Rechtsinverse Abbildung (zu $f : A \to B$) ist eine Abbildung $g : B \to A$ mit $f \circ g = Id_B$

Beweis von (1), und von der Richtung $\Longleftarrow$ von (2) war sauber.

Beweis: *f ist surjektiv $\Longrightarrow$ f hat eine Rechtsinverse.*

Wiederholung. Eine rechtsinverse Abbildung (zu $f : A \to B$) ist eine Abbildung $g : B \to A$ mit $f \circ g = Id_B$

Beweis: f sei surjektiv vorausgesetzt. Sei $x \in B$. Die gesuchte rechtsinverse Abbildung $g : A \to B$ wird nun definiert durch $g(x) := y$,wobei y irgendwelcher Punkt aus der Urbildmenge $Urbild_f(y)$.

Definition ist nur dann korrekt, wenn wir aus der Menge $Urbild_f(y)$ einen Punkt auswähelen können; z.B. falls wir Auswahlaxiom akseptieren.

Dann gilt für $\forall x \in B$: $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(y) \overset{\text{Def. von } y}{=} x$.

Bemerkung. Das Auswahlaxiom ist zur Existenz von der rechtinversen Abbildung zu eine beliebige Abbildung äquivalent.

Wir (eigentlich, Sie, das waren Hausaufgaben) haben das Auswahlaxiom bereits zweimal benutzt

Zweites Mal in der Hausaufagabe 1a, Blatt 1: eine Menge M ist genau dann unendlich ist, wenn sie zu einer ihrer echten Teilmengen ($\neq M$) gleichmächtig ist.
Lösung der Hausaufgabe in $\Longrightarrow$ Richtung. Wir beweisen, das eine disjunkte Folge $x_1, ..., x_k, ... \in M$ existiert, und dann definieren die Abbildung

$$f : M \to M \setminus \{x_1\}\ , \quad \begin{cases} f(x) = x & \text{für } x \neq x_i,\ i \in \mathbb{N} \\ f(x_i) = x_{i+1} & \text{für } x_i \text{ aus der Folge} \end{cases}$$

Dann gilt:

f ist injektiv; die Bildmenge $Bild_f$ ist $M \setminus \{x_1\}$	$\Longrightarrow$	gilt $f : M \to M \setminus \{x_1\}$ biektiv und die Mengen M und $M \setminus \{x_1\}$ sind gleichmächtig.

Um eine solche Folge zu kosnstruieren, braucht man aber die Auswahlaxiome: die folgende „Konstruktion“ war vorgeplannt:
wir nehmen einen Punkt $x_1 \in M$. Da M unendlich ist, ist $M \setminus \{x_1\} \neq \varnothing$; nehmen wir $x_2 \in M \setminus \{x_1\}$; dann $x_3 \in M \setminus \{x_1, x_2\}$ u.s.w.

Es ist gefährlich, mit Mengen naiv umzugehen: Man bekommt sofort Widerspruch, wenn man sich zuviel erlaubt:

RUSSELL–ZERMELOsches Paradoxon (I)

Sei $R := \{X \mid X \text{ ist Menge und } X \notin X\}$ die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.

Dann gilt für eine beliebige Menge Y:

$$Y \in R \quad \Leftrightarrow \quad Y \notin Y$$

Insbesondere gilt dann für $Y = R$:

$$R \in R \quad \Leftrightarrow \quad R \notin R$$

Widerspruch !!!

Halbordnong/Ordnung auf der Menge

Wiederholung. Eine Relation auf einer Menge M ist eine Teilmgenge $R \subseteq M \times M$. (Statt $(x, y) \in R$ schreibt man $x\ R\ y$.)
Def. 36 Eine Relation „$\leq$" heißt Halbordnung , falls sie (für alle $a, b \in M$)

transitivit ist: aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$, und

reflexiv ist: $a \leq a$.

antisymmetrisch ist: aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$.

Bsp. Die übliche „$\leq$" ist eine Halbordnung auf $\mathbb{R}$:
Bsp. Die übliche „$\leq$" ist eine Halbordnung auf $\mathbb{C}$: sie besteht aus allen Paaren (x, y) wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Z.B. ist weder $(1 + i, i)$ noch $(i, 1 + i)$ in der Relation „$\leq$"

Exkurs: Kardinalzahlen

Wir betrachten die Äquivalenzrelation „gleichmächtig“ auf (der Menge von) allen Mengen, siehe Vorl. 1, 2. Die Äquivalenzklassen bzgl. diese Relation heißen Kardinalzahlen.

Falls die Menge endlich ist, kann man deren Kardinalzahl mit Anzahl von Elemente identifizieren: die endlcihe Mengen sind genau dann gleichmächtig, falls sie aus gleichen Anzahl von Elementen bestehen.
Die Kardinalzahl $\aleph_0$ ist die Äquivalentklasse von $\mathbb{N}$. In Vorl. 1 haben wir bewiesen, dass $\mathbb{Q} \in \aleph_0$. (Man schreibt auch $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.)
Die Kardinalzahl $\aleph_1$ ist die Äquivalentklasse von $\mathbb{R}$. In Vorl. 2 haben wir bewiesen, dass $2^{\mathbb{Q}} \in \aleph_1$ (oder, man schreibt $|2^{\mathbb{Q}}| = \aleph_1$.)

Bsp. Die Relation „höchstens gleichmächtig“ ist eine Halbordnung auf der Menge von Kardinalzahlen. In der Tat, sie ist
transitiv: gibt es Injektionen
$\phi : A \to B$ und $\psi : B \to C$, so ist die Verkettung $\psi \circ \phi : A \to C$ eine Injektion.
Also, aus $\aleph_A \leq \aleph_B$ und $\aleph_B \leq \aleph_C$ folgt $\aleph_A \leq \aleph_C$.

reflexiv: $|A| = |A|$,

antisymmetrisch: gibt es Injektionen $\phi : A \to B$ und $\psi : B \to A$, dann ist $|A| = |B|$ nach Def. 2

Def. 36 – Vorsetztung Eine Halbordnung „$\leq$“ heißt eine Ordnung , falls zusätzlich für jede $a, b \in M$ gilt $a \leq b$, oder $b \leq a$.
Bsp. Die übliche „$\leq$“ ist nicht nur eine Halbordnung, sondern auch eine Ordnung auf $\mathbb{R}$.

Bsp. Die Halbordnung „$\leq$“ ist keine Ordnung auf $\mathbb{C}$. (weil weder $i \leq i+1$ noch $i+1 \geq i$).

Wir sagen, dass eine Teilmenge $T \subseteq M$ eine total geordnete Menge bzg. einer Halbordnung „$\leq$“ ist, falls der Halbordnung „$\leq$“ beschränkt auf T eine Ordnung ist: für jedes Paar $(x, y) \in T \times T$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Bsp. In der Halbgeordnete Menge $(\mathbb{C}, \leq)$ ist $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ total geordnet.

Def. 36 – Vorsetzung

Wir sagen, dass eine Teilmenge $T \subseteq M$ eine obere Schranke hat, falls es ein $m \in M$ gibt, so dass $x \leq m$ für alle $x \in T$.

Wir sagen, dass ein Element $m \in T$ maximal ist, wenn es kein $a \in T$ gibt mit $m \leq a$.

Ein Element o von M heißt kleinstes Element, wenn für alle $m \in M$ gilt: $o \leq m$.

Bsp. Ein offenes Interval auf $\mathbb{R}$ hat kein maximales Element, hat aber eine obere Schranke. Ein abgeschlossenes Interval hat immer ein maximales Element.

Bemerkung. Ein maximales Element muss keine obere Schranke von M sein. Das wäre ein größtes Element. Z.B., falls die Relation R leer ist, ist jedes Element ein maximales Element, weil weder $a\ R\ b$ noch $b\ R\ a$ gilt. Also, maximales Element und kleinstes Element sind keine Antonimen.

Def. 36 – Vorsetzung Eine obere Schranke m heißt eine kleinste obere Schranke von $S \subseteq M$, wenn für alle oberen Schranken $\tilde{m}$ von S gilt: $m \leq \tilde{m}$. Wenn eine kleinste obere Schranke existiert, dann ist sie eindeutig bestimmt.

Wenn für jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke existiert, dann heißt M induktiv geordnet. Wenn sogar jeweils eine kleinste obere Schranke existiert, dann heißt M strikt induktiv geordnet.

Bsp. Sei $M \subseteq 2^A$. Wir betrachten die folgende Relation (Inklusionsrelation) auf M:

$X \leq Y \iff X \subseteq Y$. Eine total geordnete Teilmenge ist eine Familie $T \subseteq 2^A$ von Teilmengen von A, sodass für je zwei verschiedene Elemente $B, C \in T$ entweder $B \subseteq C$ oder $C \subseteq B$ gilt. Wenn nun die Vereinigung aller Mengen aus T auch in M liegt (das ist nicht selbstverständlich!), dann hat man eine (und sogar die kleinste) obere Schranke gefunden.

Satz 42 (Fixpunktsatz) Es sei $(M, \leq)$ eine nichtleere geordnete Menge mit einem kleinsten Element o. In M habe jede total geordnete Menge T eine kleinste obere Schranke. Sei $F : M \to M$ eine Abbildung mit der Eigenschaft
$\forall m \in M : m \ \leq \ F(m)$. Dann gibt es ein $m \in M$ mit $F(m) = m$.

Beweis. Wie nennen eine Teilmenge S von M zulässig, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten: $o \in S$, $Bild_F(S) \subseteq S$ und für jede total geordnete Teilmenge $T \subseteq S$ liegt auch die kleinste obere Schranke $\bar{T}$ (von T) in S. Zum Beispiel ist M selbst zulässig.

Nun sei S_0 der Durchschnitt aller zulässigen Teilmengen von M. S_0 ist auch zulässig: $o \in S_0$;

$$Bild_F(S_0) = Bild_F\left(\bigcap_{S \text{ zulässig}} S\right) = \bigcap_{S \text{ zulässig}} Bild_F(S) \subseteq \bigcap_{S \text{ zulässig}} S = S_0,$$

und wenn T in allen S liegt, dann liegt auch $\bar{T}$ in allen S, schließlich auch in S_0.

Bemerkung. Wir haben dieselbe Idea früher, insbes. in Vorl. 12 mehrmals benutzt, siehe Def. von lineare, Hülle, konvexe Hüllen.

Also, S_0 ist selbst zulässig und damit die kleinste aller zulässigen Teilmengen von M.

Wir zeigen, dass S_0 total geordnet ist; daraus folgt für die kleinste obere Schranke $\bar{S}_0$ einerseits,
(a) dass $\bar{S}_0$ das größte Element von S_0 ist.
(b) Andererseits gilt aber wegen der Zulässigkeit $F(\bar{S}_0) \leq \bar{S}_0$.

Wir bekommen insgesamt $\bar{S}_0 \overset{(a)}{\leq} F(\bar{S}_0) \overset{(b)}{\leq} \bar{S}_0$, und damit die gewünschte Gleichheit.

Noch zu zeigen ist also die folgende Behauptung

Behauptung: S_0 ist total geordnet.

Behauptung: S_0 ist total geordnet.

Beweis der Behauptung. Wir nennen $e \in S_0$ ein extremales Element, wenn für alle $s \in S_0$ mit $\underbrace{s \leq e, s \neq e}_{s<e}$ gilt, dass $F(s) \leq e$. Zum Beispiel ist das kleinste Element o extremal. Für ein extremales e setzen wir

$S_e := \{s \in S_0 \mid s \leq e \text{ oder } F(e) \leq s\}$.

Dann ist für jedes extremale e die Menge S_e zulässig:

• o liegt in S_e .

• Für jedes Element $s \in S_e$ folgt aus $s < e$ sofort $F(s) \leq e$ nach Def. von extremalem Element,

aus $s = e$ folgt $F(s) = F(e) \leq e$ (nach Voraussetzungen),
und aus $s \not\leq e$ folgt $F(e) \leq s \leq F(s)$.

Also gilt insgesamt $Bild_F(S_e) \subseteq S_e$.

• Es sei T eine total geordnete Teilmenge von S_e. Wenn dann für alle $t \in T$ die Ungleichung $t \leq e$ gilt,dann gilt auch die kleinste obere Schranke $\bar{T} = e$. Wenn es aber mindestens ein t gibt, sodass die Ungleichung $t \leq e$ nicht gilt, dann ist $e \leq F(t) \leq F(\bar{T})$. Wir sehen aus diesen beiden Fällen: $\bar{T} \in S_e$.

Da aber S_0 die kleinste zulässige Teilmenge von M ist, muss also für alle extremalen e gelten: $S_e = S_0$.

Nun müssen wir noch zeigen, dass jedes $e \in S_0$ extremal ist. Dann folgt nämlich für $s \in S_0$:

$$s \in S_e \text{ also } s \leq e \text{ oder } e \leq F(e) \leq s.$$

Das sagt dann, dass S_0 total geordnet ist.
Um zu beweisen, dass jedes $e \in S_0$ extremal ist, betrachten wir $E := \{e \in S_0 \mid e \text{ ist extremal } \}$.
Nun weisen wir nach, dass E zulässig ist, und damit gleich S_0.
$o \in E$: klar.
Abgeschlossenheit von E unter F:
$\forall e \in E,\ \forall s \in S_0 = S_e, s < F(e)$ gilt: $F(s) \leq F(e)$.
Diese letzte Ungleichung gilt, da $F(e) \not\leq s$ und damit $s \leq e$. Nun greift die Extremalität von e zu.
Nun sei noch $T \subseteq E$ total geordnet, und seine kleinste obere Schranke sei $\bar{T}$. Zu zeigen ist $\bar{T} \in E$. Sei dazu $s \in S_0$, $s < \bar{T}$. Wenn für jedes $t \in T$ die Relation $F(t) \leq s$ gelten würde, dann wäre $\bar{T}$ als obere Schranke von extremalen Elementen selbst $\leq s$ – Widerspruch.
Also gibt es ein extremales $e \in T$ mit $F(e) \neq s$, und da $S_0 = S_e$ gilt folgt daraus zwangsweise $s \leq e$. Aber $s \neq e$ impliziert dann $F(s) \leq e \leq \bar{T}$, und aus $s = e$ folgt $F(s) = F(e) \in E$, denn E ist unter F abgeschlossen.
Also ist auch in diesem Fall $F(s) \leq \bar{T}$. Damit folgt insgesamt, dass $\bar{T}$ extremal ist.

Satz 43 (Lemma von Zorn) Jede nichtleere halbgeordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element (falls das Auswahlaxiom gilt).

Beweis. (a) Wir behandeln zuerst den Fall einer strikt induktiv geordneten Menge. (**Wiederhol.** – wenn für jede total geordnete Teilmenge von M eine kleinste obere Schranke existiert, dann heißt M strikt induktiv geordnet.)

Da es eben langt, ein maximales Element zu finden, das $\leq x$ für ein willkürlich gewähltes x ist, dürfen wir uns auf den Fall beschränken, dass M ein kleinstes Element enthält. Dann nehmen wir an, es gebe kein maximales Element. Wir finden also für jedes $m \in M$ ein größeres Element $F(m)$ und definieren damit eine Funktion $F : M \to M$, für die gilt:

$\forall m \in M : m < F(m)$.

Bemerkung. Wir brauchen dafür das Auswahlaxiom. Die Funktion F ist wie im Satz 42, deswegen muss F einen Fixpunkt haben: Widerspruch.

Nun sei M induktiv geordnet und H die Menge aller total geordneten Teilmengen von M. Dann ist H bezüglich der Inklusion geordnet, und zwar strikt induktiv, denn die Vereinigung einer total geordneten Familie von total geordneten Teilmengen ist wieder eine total geordnete Teilmenge und offensichtlich die kleinste obere Schranke der Familie (bezüglich Inklusion). Insbesondere besitzt H nach (a) ein maximales Element T (das ist eine total geordnete Teilmenge von M). Es sei O eine obere Schranke von T. Dann muss O schon zu T gehören, da $T \cup O$ eine total geordnete Menge ist, die T enthält, aber T ist schon maximal. Dieses Element O ist dann ein maximales Element in M, denn für jedes $m \in M$ folgt aus $O \leq m$, dass m eine obere Schranke von T ist und somit ebenfalls zu T gehören muss, also insbesondere $m \leq O$ und damit $m = O$.