**Wiederholung — Def. 29** Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Ein Punkt $x \in S$ heißt Extrempunkt von $S$, wenn es kein Intervall ganz in $S$ liegend gibt, die $x$ in ihrem relativen Inneren enthält.
**Wiederholung—Satz 32.** Sei $f \in \mathbb{R}^{n*}$ ein lineare Form, sei $S \in \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Es gilt: Es existieren Extrempunkte $\bar{x}$ und $\bar{y} \in S$ so dass $f(\bar{x}) = \max_{x \in S} f(x)$ und $f(\bar{y}) = \min_{y \in S} f(x)$.

**Wiederholung — Def. 32** Die Menge $S := \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ist eine minimale Darstellung des Polytopes $P$, wenn $P = conv(\{x_1, x_2, ..., x_k\})$ und $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$ gilt: $x_i \notin conv(S \setminus \{x_i\})$.

**Wiederholung — Satz 34.** Sei $M := \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ eine minimale Darstellung des Polytopes $P$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $x \in M$.

(ii) $x$ ist Ecke von $P$.

(iii) $x$ ist Extrempunkt von $P$.

Der folgende Satz beschreibt, inwiefern beim übergang zu Polarkörpern Durchschnitte und Vereinigungen vertauscht werden.

**Satz 41.** Seine $K_1, K_2$ konvexe Körper mit und $\vec{0} \in int(K_i)$ $(i = 1, 2)$. Dann gilt:
$(K_1 \cap K_2)^* = conv(K_1^* \cup K_2^*)$,
$conv(K_1 \cup K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$.
Ist außerdem $K_1 \cup K_2$ konvex, so ist $K_1^* \cup K_2^*$ auch konvex, also gilt
$(K_1 \cap K_2)^* = K_1^* \cup K_2^*$,
$(K_1 \cup K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$.

**Beweis.** Aus $K_1 \cap K_2 \subseteq K_i$ folgt $K_i^* \subseteq (K_1 \cap K_2)^*$, also $conv(K_1^* \cup K_2^*) \subseteq (K_1 \cap K_2)^*$. Aus $K_i \subseteq conv(K_1 \cup K_2)$ folgt $conv(K_1 \cup K_2)^* \subseteq K_i^*$ , also $conv(K_1 \cup K_2)^* \subseteq K_1^* \cap K_2^*$. Wendet man beide Inklusionen auf $K_i^*$ statt $K_i$ an und benutzt $K^{**} = K$, so erhält man die ersten beiden Gleichungen des Satzes.

Sei jetzt $K_1 \cup K_2$ konvex. Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus (K_1^* \cup K_2^*)$. Nach Satz 33 gibt es $l_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ mit $\langle l_i, x\rangle > a_i$ und $\langle l_i, y\rangle \leq a_i$ für alle $y \in K_i^*$ (also ist $a_i > 0$), woraus $l_i/a_i \in K_i^{**} = K_i$ folgt $(i = 1, 2)$. Da $K_1 \cup K_2$ konvex ist, gibt es eine Konvexe Kombination $z := t * l_1/a_1 + (1-t)l_2/a_2 \in K_1 \cup K_2$. Wegen $\langle l_i, x\rangle > a_i$ gilt $\langle z, x\rangle > 1$ und somit $x \notin (K_1 \cap K_2)^*$. Damit ist $(K_1 \cap K_2)^* \subseteq K_1^* \cup K_2^*$ gezeigt. Da die entgegengesetzte Inklusion trivial ist, folgt $(K_1 \cup K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$ und damit die Konvexität von $K_1^* \cup K_2^*$, $\square$

# Anwendung: lineare Optimierungsproblem (Simplex-Verfahren, George Dantzig 1947) .

Seien $A \in Mat(m, n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, und $c \in \mathbb{R}^{n*}$ gegeben.
Eine zulässige Lösung ist ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, der die linearen Bedingungen

$$
\begin{array}{llll}
a_{11}x_1 & + \dots & +a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
a_{21}x_1 & + \dots & +a_{2n}x_n & \leq b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + \dots & +a_{mn}x_n & \leq b_m
\end{array}
$$

erfüllt. Ziel ist es, unter allen zulässigen Vektoren $x$ einen zu finden, der die Linearform

$$c(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

maximiert. Dieses Optimierungsproblem in der sogenannten Standardform wird oft abkürzend als

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, \}$$

geschrieben, wobei die Bedingungen $Ax \leq b$ komponentenweise zu verstehen sind.

Darüber hinaus gibt es noch weitere äquivalente Formulierungen, die sich durch einfache Operationen in diese Standardform bringen lassen:
* Minimierungsproblem statt Maximierungsproblem: Multiplikation des Zielsform $c$ mit (-1)
* Größer-gleich- statt Kleiner-gleich-Bedingungen: Multiplikation der entsprechenden Ungleichungen mit (-1)
* Gleichheitsbedingungen statt Ungleichheitsbedingungen: Ersetzung von $a_i x = b_i$ durch $a_i x \leq b_i$ und $-a_i x \leq -b_i$

(Eine ähnliche Aufgabe ist Hausaufgabe.)
Eine Firma stellt zwei verschiedene Produkte her, für deren Fertigung drei Maschinen $A, B, C$ zur Verfügung stehen. Diese Maschinen haben eine maximale monatliche Laufzeit (Kapazität) von 170 Stunden (A), 150 Stunden (B) bzw. 180 Stunden (C). Eine Mengeneinheit (ME) von Produkt 1 liefert einen Deckungsbeitrag von 300 Euro, eine ME von Produkt 2 dagegen 500 Euro. Fertigt man eine ME von Produkt 1, dann benötigt man dafür eine Stunde die Maschine A und eine Stunde die Maschine B. Eine Einheit von Produkt 2 belegt zwei Stunden lang Maschine A, eine Stunde Maschine B und drei Stunden Maschine C. Ziel ist es, Produktionsmengen zu bestimmen, die den Deckungsbeitrag der Firma maximieren, ohne die Maschinenkapazitäten zu überschreiten.

**Auf mathemtische Sprache umformulieren:** Angenommen, der Betrieb fertigt pro Monat $x_1$ ME von Produkt 1 und $x_2$ ME von Produkt 2. Dann beträgt der Gesamtdeckungsbeitrag $G(x_1, x_2) = 300x_1 + 500x_2$.

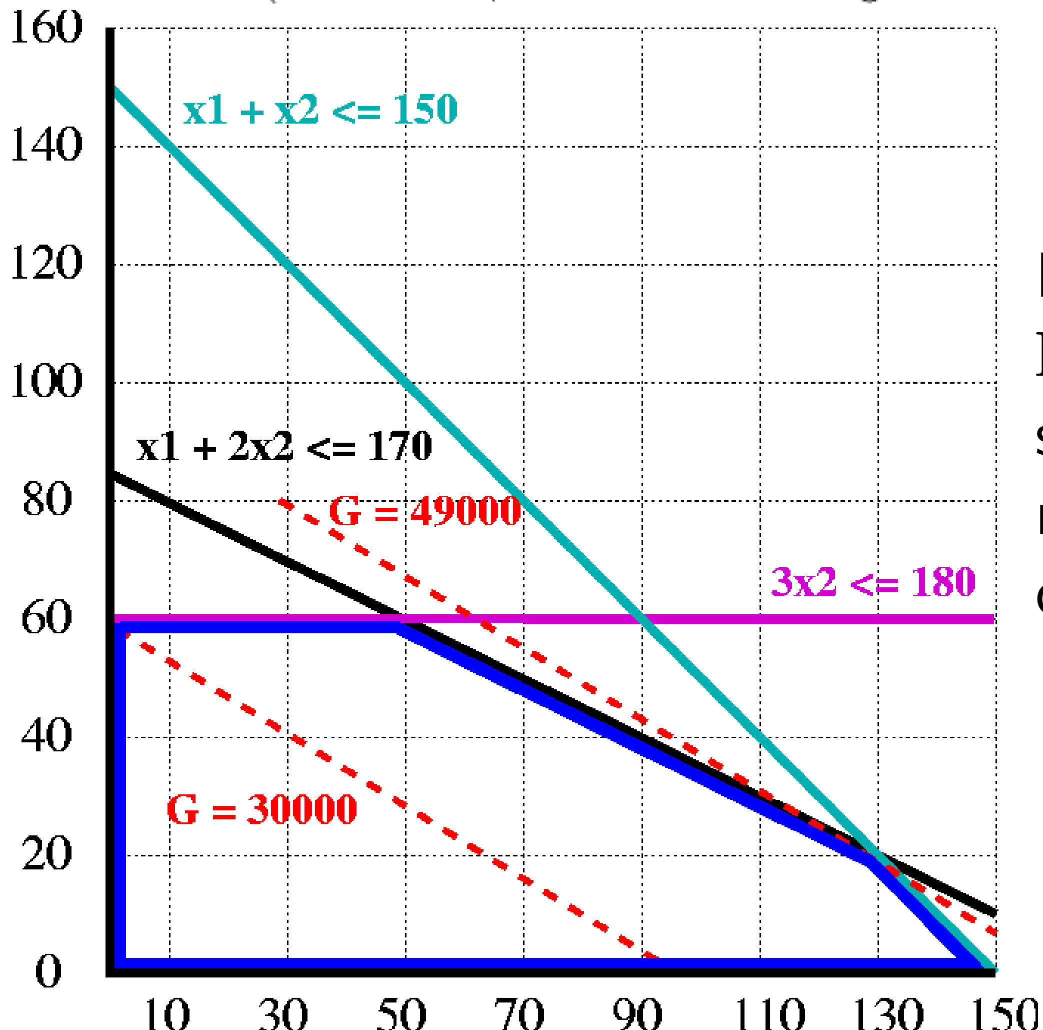
Diesen Wert möchte die Firma maximieren. Da die Maschinenkapazitäten eingehalten werden müssen, ergeben sich die Nebenbedingungen:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 170 \\ x_1 + x_2 &\leq 150 \\ 3x_2 &\leq 180 \end{aligned}}$$

Da außerdem keine negativen Produktionsmengen möglich sind, muss $x_1, x_2 \geq 0$ gelten (Nichtnegativitätsbedingung).

## Wenn die Dimensionen $n$ klein ist (z.B., $n = 2$), kann man solche Aufgeben graphisch lösen: wir minimieren $G(x_1, x_2) = 300x_1 + 500x_2$ mit

$$x_1 + 2x_2 \leq 170 \text{ (Maschine A, rechts in schwarz eingezeichnet)}$$
$$x_1 + x_2 \leq 150 \text{ (Maschine B, rechts in tuerkis eingezeichnet)}$$
$$3x_2 \leq 180 \text{ (Maschine C, rechts in violett eingezeichnet)}$$




Die Geraden $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x_1, x_2) = a\}$ sind rot auf dem Bild; wir müssen solche Gerade finden, sodass $a$ maximal ist.

# Umformulierung auf der Sprache der Konvexgeometrie:

Gegeben ist eine polyedrische Menge ( $=$ die Menge von zulässigen Lösungen $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$) und ein $f \in \mathbb{R}$ (oben: $f(x_1, ..., x_n) = c_1 x_1 + ... + c_n x_n$). Man soll den Punkt $\bar{x} \in P$ finden, sodass $f(\bar{x}) = \sup_{x \in P} f(x)$.

**Bemerkung.** Die Lösung analytisch zu finden ist nicht möglich. Man ist mit einem Algorithmus zufrieden, das die Lösung in Vernünftige Zeit algorithmisch findet. Gegenstand der lineare Optimierung.

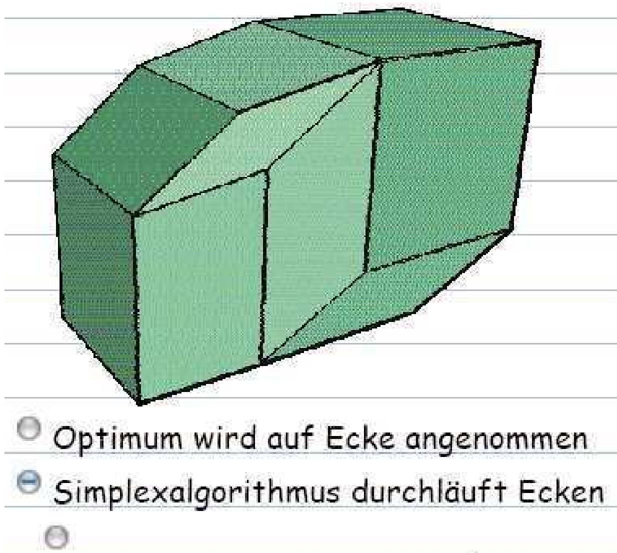
Fallunterscheidung:

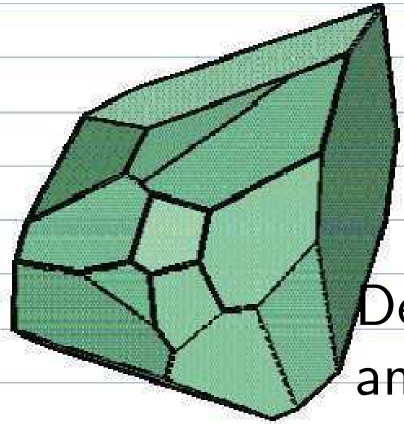
1. $f$ sei nach oben beschränkt, $P$ enthälte keine Gerade. In dem Fall gibt es einen EXTREMPUNKT $\bar{x}$, so dass $f(\bar{x}) = \sup_{x \in P} f(x)$ (Satz 38). Man muss den Extrempunkt finden.
2. Es könnte sein, dass die Linearform $f$ nach oben nicht beschränkt ist. Dann gibt es keine Lösung. (es wäre nicht schlecht, zu verstehn, ob der Fall tatsächlich zutrifft.)
3. Es könnte sein, dass die Menge $P$ eine Gerade enthält. Man soll verstehen, dass der Fall tatsächlich zutrifft, und was man weiter machen kann

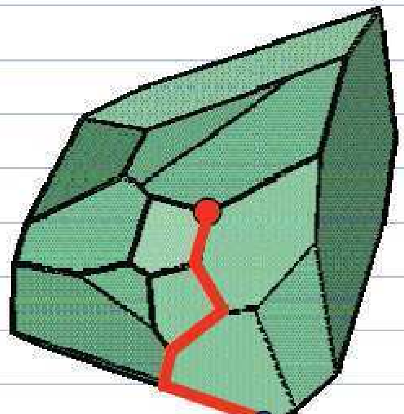
**Bemerkung.** Falls die polyedrische Menge $P$ beschränkt ist (was öfter in praktikbezogenen Aufgaben der Fall ist), dann ist die polyedrische Menge $P$ ein Polytop (Satz 37), und es gibt einen EXTREMPUNKT=ECKE $\bar{x}$, so dass $f(\bar{x}) = \sup_{x \in P} f(x)$ (Satz 32).

## Fall 1. Simplex-Algorithmus (besonders einfach, falls $P$ beschränkt ist)

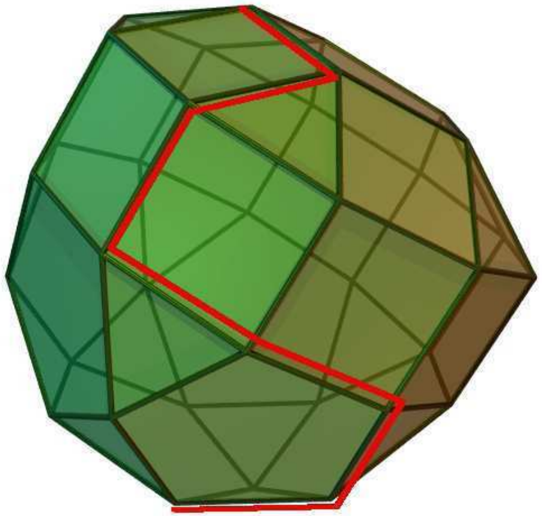
Die Idee des Simplexalgorithmus ist es, an einer Ecke zu starten und den Zielfunktionswert mit den Zielfunktionswerten alle benachbarten Ecken zu vergleichen. Wird eine Ecke gefunden die einen höheren Zielfunktionswert aufweist, so wird die Prozedur wiederholt.





Der Simplexalgorithmus läuft dabei an den Kanten des Polyeders entlang bis er eine optimale Lösung gefunden hat. Der Vorteil liegt auf der Hand. Der Simplexalgorithmus braucht im optimalen Fall nur wenige Ecken zu evaluieren, bis er eine Lösung findet.



1. Bestimme einen beliebigen Ecke $v$ von $P$.
2. Falls es keine verbessernde Kante (1-Seite) inzident zu $v$ gibt, stopp. $v$ ist optimal.
3. Folge einer beliebigen verbessernden Kante $e$ von $v$. Falls $e$ unbeschränkt ist, d.h. keinen anderen Endpunkt hat, stopp. Die Linearform $f$ ist ebenfalls auf $P$ unbeschränkt.
4. Sei $u$ der andere Endpunkt von $e$. Setze $v = u$. Gehe zurück zu Schritt 2.

Um das algorithmisch zu machen, braucht man:
1. Methode, eine Ecke zu finden
(Theoretisch Einfach: Man betrachten eine Gerade, läuft entlang der Geraden bis zum Rand. Weil Rand aus polyedren Mengen der kleinerer Dimension besteht, wiederholt man das Prozedur, bis zum Man in einer Ecke kommt)
2. Methode, alle Kanten aus der gegebenen Ecke $v$ zu finden:
(Theoretisch Einfach: Man betrachtet alle Hyperebenen, $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i$ die den Punkt $v$ enthalten. Dann untersucht man, ob Schnittmenge von irgendwelchen $n-1$ (unabhändigen) dafon mit $P$ nicht leer ist)
3. Methode, um zu entscheiden, ob eine von Kanten verbessernde Kante ist: Alle Kanten auszuprobieren

# Die Menge von zulässigen Lösungen enthält eine Gerade.

**Folgerung** Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein nichtleere polyedrsiche Menge.
Dann sind äquivalent:
1. $P$ hat mindestens einen Eckpunkt.
2. $P$ enthalt keine Gerade.
3. $rang(A) = n$.

**Beweis.** (1) $\iff$ (2) haben wir in Bemerkung nach Satz 38 bewiesen.
Wir zeigen (3) $\implies$ (2) durch Widerspruch.
Falls $P$ eine Gerade enthält, dann enthält jeder Halbraum $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \leq b_i$ eine Gerade (z.B. $\mathcal{G}_{x,\vec{v}}$); dann muss diese Gerade nach Lemma 10 parallel zur Hyperebene $\{a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i\}$ sein; also muss $a_{i1}v_1 + ... + a_{in}v_n = 0$ sein. Weil dass für alle $i$ erfüllt ist, liegt $\vec{v}$ in $Kern(A)$, und $Rank(A) < n$.

Wir zeigen (2) $\implies$ (3). Angenommen, $P$ enthält keine Gerade. Dann ist $Kern(A) = \{\vec{0}\}$ nach Satz 27 (a) LAAG 1 (weil ein Punkt von $P$ plus alle Vektoren aus Kern wieder in $P$ liegen soll.) Dann ist
$rk(A) \overset{LAAGI}{=} dim(Bild_A) = n - dim(Kern(A)) = n.$

# Die Menge von zulässigen Lösungen enthält eine Gerade

Wir haben in Beweis der Folgerung oben gezeigt, dass dann der Richtungsvektor (z.B., $\vec{v}$) der Gerade in $Kern(A)$ liegt. Falls wir die Basis wählen sodass $\vec{v}$ der erste Basisvektor ist, ist die erste Spalte von $A$ (nach der Basistransforamtion) in dieser Basis gleich $\vec{0}$, und wir können über der ersten Variablen „vergessen“.

# Das dritte Hilbertsche Problem

**David Hilbert**

- 23.1.1862 (Königsberg)
  – 14.2.1943 (Göttingen)
- Gründungsmitglied der DMV (1890)

Hat in 1900 eine Liste aus 23 wichtigste Probleme der Mathematik veröffentlicht.

# Das dritte Hilbertsche Problem (1900) und dessen Motivation.

Erstes gelöstes Problem:

**3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe.**

. . . , zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in congruente Tetraeder zerlegen lassen und die sich auch durch Hinzufügung congruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in congruente Tetraeder möglich ist.

**Man kann das Problem auch wie folgt umformulieren:** Sind je zwei Polyeder mit gleichem Volumen zerlegungsgleich, das heißt kann man immer ein Polyeder in polyedrische Teile schneiden und das andere Polyeder aus diesen Teilen zusammensetzen?

**Motivation.**

- In dim 2 ist hat das Problem keine Lösung (Elementare Geometrie; Gauß).
- Falls die Problem keine Lösung hat, kann man viel einfacher den Begriff „Volum“ in dim 3 definieren.

Dieses Problem wurde von Max Dehn im selben Jahr 1900 gelöst. Der Beweis von Dehn war sehr kompliziert. Später stellter es sich heraus, dass man eine einfachere Lösung mittels Lineare Algebra konstruieren kann. Wir machen dies in der nächste Woche. Dazu brauchen wir **Das Auswahlaxiom**