Polytop – Wiederholung.

Wiederholung. Eine Teilmenge $S \in \mathbb{R}^n$ heißt (konvexes) Polytop, falls $P = \{x_1, x_2, ..., x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so daß $S = conv(P)$.

Bemerkung. Konvexes Polytop ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

Def. 31 Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen. Sei $F \subseteq K$, und sei $k \in \{0, 1, ..., dim(aff(K))\}$. F heißt $k-$Seite von K, falls $dim(aff(F)) = k$ und eine Stützhyperebene $\mathcal{H}$ an K existiert, so daß $F = K \cap \mathcal{H}$.

K (und $\varnothing$, falls wir $\varnothing$ künstlich als eine Seite definieren) heißen uneigentliche Seiten von K, alle übrigen heißen eigentliche Seiten von K. Jede $dim(K) - 1$ dimensionale Seite von K heißt Facette, jede $1-$Seite von K Kante und jede $0-$Seite Ecke.

Wir wissen bereits, daß jede konvexe kompakte Menge der Durchschnitt abgeschlossener Halbräume ist (Satz 30). Im Folgenden werden wir feststellen, daß jedes Polytop Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume ist. Polytope lassen sich sogar als genau die beschränkten Mengen beschreiben, die Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume sind.

Def. 33 Eine polyedrische Menge ist Durchschnitt endlicher vieler abgeschlossener Halbräume.

Satz 37. Jedes Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine beschränkte polyedrische Menge.

Satz 37. Jedes Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine beschränkte polyedrische Menge.

Beweis. Sei $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ die minimale Darstellung von P. O.B.d.A. sei P $n-$dimensional. Seien $F_1, ..., F_m$ die Facetten von P, $m > 0$. Die Existenz von Facetten zeigen wir im Folgenden auch. Zu F_i sei $\mathcal{H}_i$ die entsprechende stützende Hyperebene von P und $\mathcal{H}_i^+$ der P enthaltende abgeschlossene Halbraum. Es gilt also:
$F_i = \mathcal{H}_i \cap P$ und $P \subseteq \mathcal{H}_i^+$ für $i \in \{1, ..., m\}$. Wir zeigen, daß $P = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{H}_i^+$. Es gilt: $P \subseteq \bigcap_{i=1}^m \mathcal{H}_i^+$.
Für die andere Inklusion $P \supseteq \bigcap_{i=1}^m \mathcal{H}_i^+$ machen wir ein

Widerspruchbeweis: (für $P \supseteq \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i^+$)Angenommen, es existierte $x \in \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i^+$ mit $x \notin P$. Definiere:

$$D := \bigcup_{\substack{B \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \\ \text{mit } \#b \leq n-1}} \mathit{aff}(\{x\} \cup B).$$

Da $\mathit{dim}(\mathit{aff}(\{x\} \cap B)) \leq n-1$, und D endliche Vereinigung solcher höchstens $n-1-$dimensionalen affinen Unterräume ist, folgt $\mathit{dim}(D) < n = \mathit{dim}(P)$. Da außerdem D und P abgeschlossen sind, folgt $\mathit{int}(P) \not\subseteq D$. Sei $y \in \mathit{int}(P) \setminus D$, und sei $z \in \mathit{relint}(xy)$ mit $z \in \mathit{Rand}(P)$. Da $xy \cap P$ kompakt ist, kann z als dasjenige Element aus $xy \cap P$ definiert werden, das von y maximalen Abstand hat. Es genügt jetzt zu zeigen, daß z auf einer Facette von P liegt und damit $z \in \mathcal{H}_j$ für $j \in \{1, ..., k\}$ gilt. Dann folgt mit $z \in \mathcal{H}_j$ und $y \in \mathit{int}(P) \subseteq \mathcal{H}_j^+$, daß $x \notin \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i^+$. Widerspruch zur Voraussetzung!

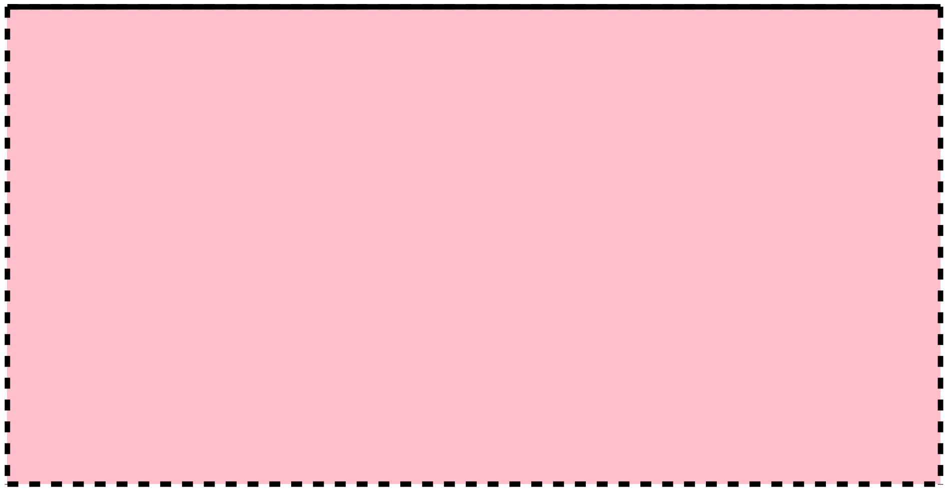
Es bleibt zu zeigen, daß z in einer $n-1-$dimensionalen Seite, einer Facette, von P enthalten ist.Wir verwenden hier die oben konstruierte Menge D. Man beachte, daß dafür nur $dim(P) = n$ und die Existenz eines $x \notin P$ vorausgesetzt werden muß. Mit Satz 29 folgt, daß z als Randpunkt einer kompakten konvexen Menge P mit $int(P) \neq \emptyset$ auf einer stützenden Hyperebene von P liegt. z liegt also auf einer $k-$Seite von P. Wir zeigen, daß $k > n-2$. Angenommen, es wäre $k \leq n-2$. Da jede $k-$Seite von P nach Satz 34 ein von Elementen der minimalen Darstellung erzeugtes Polytop ist und da nach dem Satz 24 (Caratheodory) jedes Element der Seite Konvexkombination von höchstens $(n-2)+1 = n-1$ Elementen der Erzeugermenge ist, folgte $z \in conv(B_0)$ mit $B_0 \subseteq \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ mit $\#B_0 \leq n-1$. Also wäre $z \in D$ und damit auch $y \in D$. Widerspruch! Also $k = n-1$, $\square$

Satz 38. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ eine polyedrische Menge, die keine Geraden enthält. Sei $f \in \mathbb{R}^{n*}$ eine Linearform(d.h. eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), die auf P nach oben beschränkt ist. (D.h. $\sup_{x \in P} f(x) < \infty$.) Dann existiert ein Extrempunkt $\bar{x} \in P$, so daß $f(\bar{x}) = \sup_{x \in P} f(x)$.

Bemerkung. Falls P zusätzlich beschränkt ist (in dem Fall enthält P sicher keine Gerade), ist die Aussage zum **Satz 32** äquivalent:

Sei $f \in \mathbb{R}^{n*}$ ein lineare Form, sei $P \in \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Es gilt: Es existiert einen Extrempunkt $\bar{x} \in S$ so dass $f(\bar{x}) = \sup_{x \in S} f(x)$.

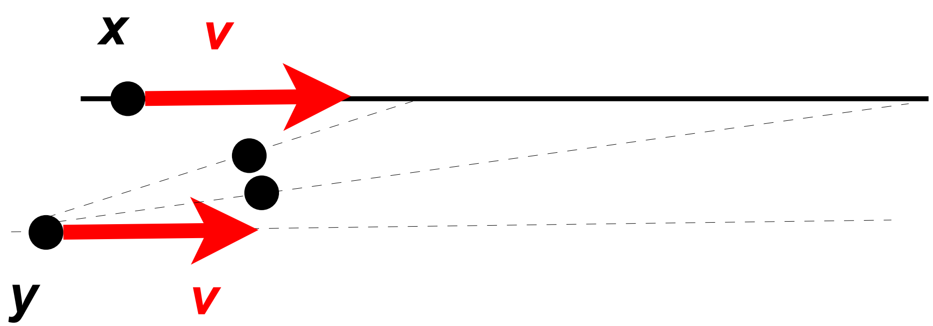
Bemerkung. Die Annahme, dass P keine Gerade enthält, ist wichtig, siehe das Bild



die Linearform f(x,y)=x ist auf Halbebene x<=1 bescränkt, hat aber keine Extrempunkte

Bemerkung. Falls konvexe abgeschlossene Menge P eine Gerade enthält (z.B. $\mathcal{G} = \{x + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$), dann enthält sie mit jedem $y \in P$ die ganze Gerade $\mathcal{G}_{y,\vec{v}} := \{y + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$, die parallel zu $\mathcal{G}$ ist und den Punkt y enthält.

Beweis. Wir zeigen, dass jeder Punkt der Gerade $\mathcal{G}_{y,\vec{v}}$ als Grenzwert einer konvergente Folge der Elemente von P darstellbar ist, und deswegen in P liegen soll, weil P abgeschlossen ist.



Nach Voraussetzungen liegen die Punkte y und $x + s\vec{v} \in \mathcal{G}$ in P. Da P konvex ist, liegt deswegen auch (für jedes $s > t \overset{\text{OBdA}}{\geq} 0$) der Punkt $x_s := \left(1 - \frac{t}{s}\right) y + \frac{t}{s}(x + s\vec{v})$ auch in P. Wir sehen, daß $x_s = y + \underbrace{\frac{t}{s}\overrightarrow{yx}}_{\substack{\text{konvergiert}\\ \text{gegen } \vec{0}}} + t\vec{v} \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} y + t \cdot \vec{v}$. Wir sehen, dass die Folge x_k (wir setzen $s = 1, 2, 3, ..., k, ... \in \mathbb{N}$ ein) in P liegt und gegen den Punkt $y + t\vec{v}$ konvergiert. Da P abgeschlossen ist, gilt $y + t\vec{v} \in P$. Da $t \geq 0$ beliebig war, liegt die ganze Halbgerade $y + t\vec{v}$ in P. Analog zeigt man, dass die andere Hälfte der Geraden auch in P liegt, $\square$

Bemerkung. Insbesondere gilt: enthält eine abgeschlossene konvexe Menge eine Gerade, so hat sie keine Ecken.

Satz 38. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ eine polyedrische Menge, die keine Geraden enthält. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Linearform, die auf P nach oben beschränkt ist. (D.h. $\sup_{x \in P} f(x) < \infty$.) Dann existiert ein Extrempunkt $\bar{x} \in P$, so daß $f(\bar{x}) = \sup_{x \in P} f(x)$.

Beweis. OBdA sei $dim(aff(P)) = n$. Induktion über n:
InduktionsAnfang $n = 1$: Gilt, da P keine Gerade ist.
InduktionsVoraussetzung: Gelte die Behauptung für $P \subseteq \mathbb{R}^k$, $k \leq n - 1$, $n > 0$.
InduktionsSchritt : Da f linear ist, gilt:
$a := \sup_{x \in P} f(x) = \sup_{x \in Rand(P)} f(x)$. Da P polyedrisch, folgt: $Rand(P) = (P \cap \mathcal{H}_1) \cup (P \cup \mathcal{H}_2) \cup ... \cup (P \cup \mathcal{H}_m)$ wobei $\mathcal{H}_1$, ... ,$\mathcal{H}_n$ die P begrenzenden Hyperebenen. Also folgt: $a := sup_{x \in P \cap \mathcal{H}_i} f(x)$ für $i \in \{1, ..., n\}$. Da $P \cap \mathcal{H}_i$ polyedrisch ist und $dim(P \cap \mathcal{H}_i) < n$ und außerdem keine Geraden enthält, folgt mit der Induktionsvoraussetzung, daß ein Extrempunkt $\bar{x} \in P \cup \mathcal{H}_i$ existiert, so daß $a = f(\bar{x})$. Da jeder Extrempunkt von $P \in \mathcal{H}_i$ ein Extrempunkt von P ist, folgt die Behauptung, $\square$

Satz 39. Seien S_2 und S_1 kompakte, konvexe Mengen mit $S_2 \subseteq S_1$. Dann gilt: F Seite von $S_1 \Longrightarrow F \cap S_2$ Seite von S_2.

Beweis. Falls F unechte Seite ist, so auch $F \cap S_2$. Sei also F eine echte Seite von S_1. Dann existiert eine stützenden Hyperebene $\mathcal{H}$ von S_1, so daß $F = \mathcal{H} \cap S_1$. Dann ist $\mathcal{H} \cap S_2 = \mathcal{H} \cap S_1 \cap S_2 = F \cap S_2$ Seite von S.

Dualität

Konvexen Mengen kann man (unter schwachen Zusatzvoraussetzungen) duale (oder polare) konvexe Mengen zuordnen. Diese Dualität ist oft von Nutzen und soll hier untersucht werden.

Def. Konvexe Körper $=$ konvexe kompakte Menge K in $\mathbb{R}^n$ mit $int(K) \neq \varnothing$.

Bsp. Abgechlossener Ball, Polyeder sind konvexe Körper. Polyedrische Menge ist nur dann ein konvexer Körper, wenn sie ein Polyeder ist.

Def. 34 Zunächst sei $K \in \mathbb{R}^n$ eine Menge mit $\vec{0} \in int(K)$. Wir definieren

$$K^* := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ für alle } y \in K\}.$$

K heißt der Polarkörper oder duale Körper von K.

Bemerkung. Um duale Körper zu definieren, braucht man nicht vorauszusetzen, dass die unrsprungliche Menge konvex ist

Frage. Ist Polarkörper konvex? Was ist Polarkörper zu Polärkörper?

Bsp. Für die Kugel $B(\vec{0}, \varepsilon)$ mit Radius $\varepsilon > 0$ gilt $B(\vec{0}, \varepsilon)^* = B(\vec{0}, 1/\varepsilon)$, wie unmittelbar aus der Definition folgt.

Der nachfolgende Satz zeigt, dass (falls K ein konvexer Körper ist) ist K^* wieder ein konvexer Körper ist, und dass in der Tat eine Dualität vorliegt.

Satz 40. Sei $K \in \mathbb{R}^n$ ein konvexer Körper mit $\vec{0} \in int(K)$. Dann gilt K ist konvex, $\vec{0} \in int(K^*)$ und $K^{**} = K$.

Beweis. Zuerst konvexität und kompaktheit. Für $x_1, x_2 \in K^*$ und $t \in [0,1]$ gilt $\langle (1-t)x_1 + tx_2, y\rangle \leq 1$ für alle $y \in K$, also $(1-t)x_1 + tx_2 \in K^*$. Also ist K^* konvex. Trivialerweise ist K^* abgeschlossen (konvergiert eine Folge x_k gegen x, so konvergiert die Folge $\langle x_k, y\rangle$ gegen $\langle x, y\rangle$. Falls alle Elemente $\langle x_k, y\rangle$ der Folge ≤ 1 ist, dann ist der Grenzwert $\langle x, y\rangle$ auch ≤ 1).

Für die Kugel $B(\vec{0}, \varepsilon)$ mit Radius $\varepsilon > 0$ gilt $B(\vec{0}, \varepsilon)^* = B(\vec{0}, 1/\varepsilon)$, siehe Bsp. oben. Aus der Definition ergibt sich, dass aus $K_1 \subseteq K_2$ stets $K_1^* \supseteq K_2^*$ folgt (in der Tat, falls für alle $y \in K_2$ die ungeichung $\langle x, y\rangle \leq 1$ erfüllt ist, dann ist diese Ungleichung auch für alle $y \in K_1$ erfüllt, wenn $K_1 \subseteq K_2$ ist.)

Wir können $\varepsilon, \rho > 0$ wählen mit $B(\vec{0}, \varepsilon) \subseteq K \subseteq B(\vec{0}, \rho)$; dann ist $\underbrace{B(\vec{0}, 1/\rho)}_{B(\vec{0},\rho)^*} \subseteq K^* \subseteq \underbrace{B(\vec{0}, 1/\varepsilon)}_{B(\vec{0},\varepsilon)^*}$, also gilt $\vec{0} \in int(K)$, und K ist beschränkt und daher kompakt.

$K = K^{**}$

Zuerst $K \subseteq K^{**}$:
Sei $y \in K$. Für beliebiges $x \in K^*$ gilt $\langle x, y\rangle \leq 1$, also ist $y \in K^{**}$. Somit gilt $K \subseteq K^{**}$ (übrigens haben wir bis jetzt weder die Konvexiät noch die Abgeschlossenheit von K benutzt).

Jetzt $K \supseteq K^{**}$:
Sei $z \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Wir zeigen, dass $z \notin K^{**}$, was äquivalent zu $K \supseteq K^{**}$ ist.

Da K konvex und abgeschlossen ist, gibt es nach Satz 33 eine streng separierte Hyperebene $\mathcal{H}_{l,a} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, x\rangle = a\}$ mit $K \in \mathcal{H}^-_{l,a} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, x\rangle < a\}$ und $\langle l, z\rangle > a$; wegen $\vec{0} \in int(K)$ ist hier $a > 0$.
Für alle $y \in K$ gilt $\langle l, y\rangle \leq 1$, also ist $l/a \in K^*$. Wegen $\langle \frac{l}{a}, z\rangle > 1$ folgt jetzt $z \notin K^{**}$. Damit ist der Beweis von $K^{**} = K$ erbracht, $\square$