Nachtrag zu separierten Hyperebenen

Def. 27 – Wiederholung Zwei Mengen A, B werden von der Hyperebene $\langle l, x\rangle = c$ streng separiert , falls für alle $a \in A$, $b \in B$ gilt: $\langle l, a\rangle < c$ und $\langle l, b\rangle > c$ bzw. $\langle l, a\rangle < c$ und $\langle l, b\rangle > c$.

Satz 33. Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Zudem sei A kompakt und B abgeschlossen. Die Mengen A und B werden genau dann von einer Hyperebene $\mathcal{H}$ streng separiert, wenn $A \cap B = \varnothing$ ist.

Beweis. „$\Longrightarrow$“ Offensichtlich (zu zeigen wäre: $\mathcal{H}$ separiert A und B streng $\Longrightarrow A \cap B = \varnothing$).

Beweis in „$\Longleftarrow$“ wird noch ein Hilfsaussage benötigen.

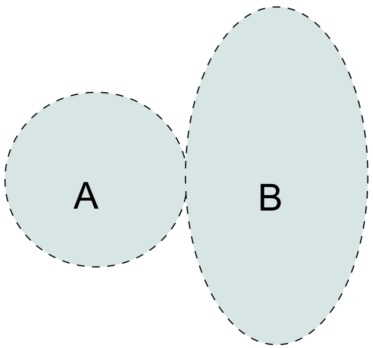
Def. 30 Unter dem Abstand der Mengen A und B versteht man:

$$d(A,B) := inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\},$$

wobei $d(a,b) := |b-a| := \sqrt{\langle b-a, b-a\rangle}$.

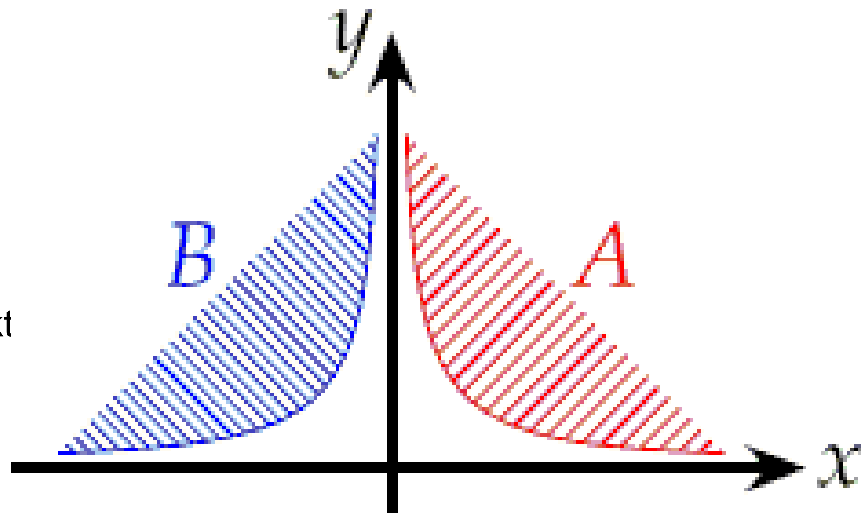
Lemma 21. Sei A kompakt und B abgeschlossen. Dann gilt:
$d(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$.

Bsp: Kompaktheit und abgeschlossenheit sind wichtig:



d(A,B)=0, obwohl

die Mengen disunkt sind



Unter dem Abstand der Mengen A und B versteht man:

$$d(A, B) := inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

wobei $d(a, b) := |b - a| := \sqrt{\langle b - a, b - a \rangle}$.

Lemma 21. Sei A kompakt und B abgeschlossen. Dann gilt:
$d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \varnothing$.

Beweis. „$\Longleftarrow$" ist offensichtlich. Wir zeigen „$\Longrightarrow$". Angenommen $d(A, B) = 0$. Dann gibt es Folgen a_k , $k \in \mathbb{N}$ in A und b_k , $k \in \mathbb{N}$ in B mit $0 \leq d(a_k, b_k) < \frac{1}{k}$. Da A kompakt ist, hat die Folge a_k eine konvergente Teilfolge. OBdA können wir annehmen, dass
$a_k \overset{\text{konvergiert}}{\longrightarrow} a \in A$.

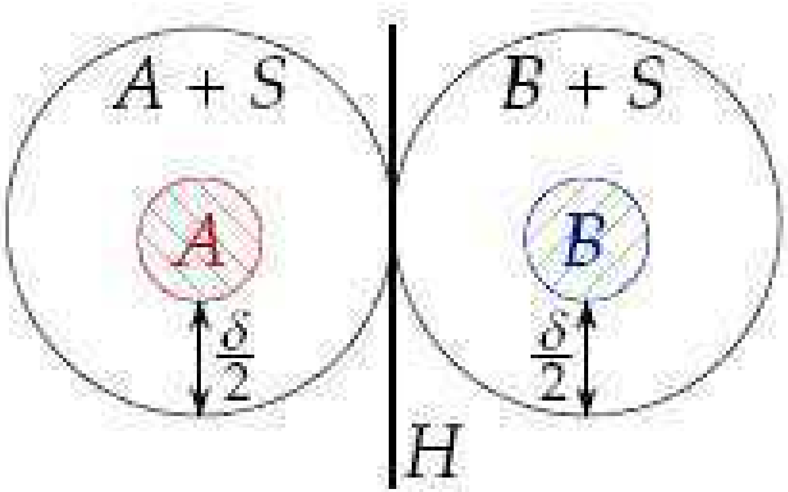
Weil $d : A \times B \to \mathbb{R}$ stetig ist, folgt:
$0 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \geq \lim_{k\to\infty} d(a_k, b_k) \overset{\text{weil } d \text{ stetig}}{=} \lim_{k\to\infty} d(a, b_k) \geq 0$.
Daraus folgt:

- $\lim_{k\to\infty} d(a, b_k) = 0$, und
- dass die Folge b_k beschränkt ist.

Dann hat sie eine konvergente Teilfolge. OBdA können wir annehmen, dass $b_k \overset{\text{konvergiert}}{\longrightarrow} b \in B$. Dann ist $\lim_{k\to\infty} d(a, b_k) \overset{\text{weil } d \text{ stetig}}{=} d(a, b)$.
Also, $d(a, b) = 0$, deswegen $a = b$, deswegen $A \cap B \neq \varnothing$. $\square$

Satz 33. Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Zudem sei A kompakt und B abgeschlossen. Die Mengen A und B werden genau dann von einer Hyperebene $\mathcal{H}$ streng separiert, wenn $A \cap B = \varnothing$ ist.

Beweis „$\Longrightarrow$“. Sei $\delta := d(A, B) \overset{\text{Lemma 21}}{>} 0$.

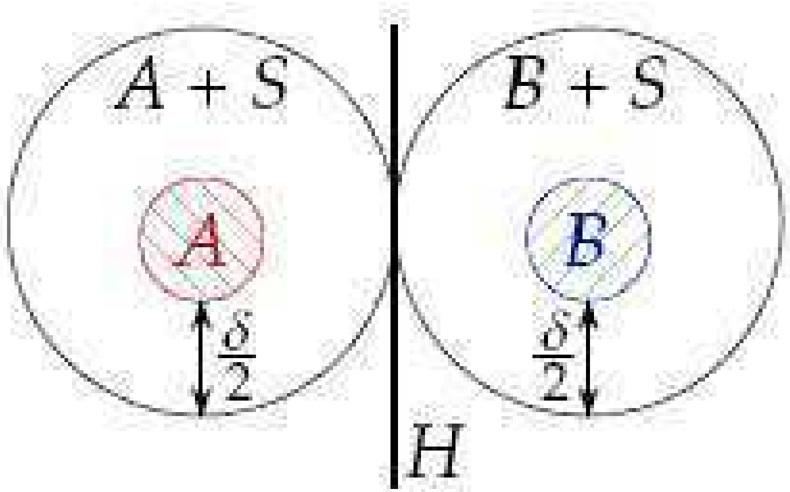


Sei $S := B\left(\vec{0}, \frac{\delta}{2}\right)$ die offene Kugel um $\vec{0}$ mit Radius $\frac{\delta}{2}$. Dann sind $A + S,\ B + S \subseteq \mathbb{R}^n$

- disjunkt, weil
  $a + s_1 = b + s_2 \Longrightarrow$
  $a - b = s_2 - s_1 \Longrightarrow$
  $\underbrace{|a - b|}_{\geq \delta} = \underbrace{|s_2 - s_1|}_{< \delta}$
  Widerspruch!

- offen, weil $A + S$, Vereinigung von der offenen Mengen der Form $a + S$ ist,

- und konvex nach Lemma 17.



Nach Satz 28 existiert eine

Hyperebene $\mathcal{H} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, y \rangle = c\}$, die $A + S$ und $B + S$ (schwach) separiert, insbesonderes gilt oBdA:

$$\langle l, a + s \rangle \geq c \quad \text{(und auch} \quad \langle l, b + t \rangle \leq c) \qquad (*)$$

für alle $a \in A$, $b \in B$, $s, t \in S$. Insbesonderes gilt dass $\mathcal{H}$ auch A und B (schwach) separiert.
Wir zeigen jetzt, dass $\mathcal{H}$ auch A und B streng separiert; wir müssen zeigen, dass $A \cap \mathcal{H}$ leer ist (analog zeigt man, dass $B \cap \mathcal{H} = \varnothing$ ist.)

Gäbe es nun $a \in A \cap \mathcal{H}$, also $a \in A$ mit $\langle l, a \rangle = c$. Wir nehmen $s \in S$ sodass $\langle l, s \rangle < 0$. Dann ist $\langle l, a + s \rangle < c$, was $(*)$ widerspricht. Daher werden A und B durch $\mathcal{H}$ streng separiert, $\square$

Satz 33. Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Zudem sei A kompakt und B abgeschlossen. Die Mengen A und B werden genau dann von einer Hyperebene $\mathcal{H}$ streng separiert, wenn $A \cap B = \varnothing$ ist.

Folgerung. Seien $A, \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex, und abgeschlossen. Dann gilt für jeden Punkt $b \in \mathbb{R} \setminus A$: A und $\{b\}$ werden von einer Hyperebene streng separiert.

Konvexe Polytope

Wiederholung. Eine Teilmenge $S \in \mathbb{R}^n$ heißt (konvexes) Polytop, falls $P = \{x_1, x_2, ..., x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so daß $S = conv(P)$.
Bemerkung. Konvexes Polytop ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.
Def. 31 Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und abgeschlossen. Sei $F \subseteq K$, und sei $k \in \{0, 1, ..., dim(aff(K))\}$. F heißt $k-$Seite von K, falls $dim(aff(F)) = k$ und eine Stützhyperebene $\mathcal{H}$ an K existiert, so daß $F = K \cap \mathcal{H}$.

Triv. Bsp. K ist $n-$Seiten von K. Man nimmt oft an, dass $\varnothing$ auch eine Seite von K ist (obwohl nach Definition dies falsch ist – stutzende Hyperebene haben immer nichtleeren Durschnitt mit der Menge.)

Def. 31 – Vortsetzung. K (und $\varnothing$, falls wir $\varnothing$ künstlich als eine Seite definieren) heißen uneigentliche Seiten von K, alle übrigen heißen eigentliche Seiten von K. Jede $dim(K) - 1$ dimensionale Seite von K heißt Facette, jede $1-$Seite von K Kante und jede $0-$Seite Ecke.

Wir wissen bereits, daß jede kompakte konvexe Menge durch ihr Profil erzeugt wird Satz 32. Im Folgenden werden wir sehen, daß das Profil eines Polytopes gleich der Menge der Ecken von S ist. Desweiteren ist diese Menge die im Sinne der folgenden Definition eindeutig bestimmte minimale Darstellung des Polytopes P.

Def. 32 Die Menge $S := \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ist eine minimale Darstellung des Polytopes P, wenn $P = conv(\{x_1, x_2, ..., x_k\})$ und $\forall i \in \{1, 2, ..., k\}$ gilt: $x_i \notin conv(S \setminus \{x_i\})$.

Bemerkung. Jedes Polytopes $P = conv(S)$ mit $S = x_1, x_2, ..., x_k$ besitzt eine minimale Darstellung. Falls nämlich $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ nicht minimal ist, existiert $x_i \in S$ mit $x_i \notin conv(\{x_j \in S \mid j \neq i\})$. Es folgt $P = conv(\{x_j \in S \mid j \neq i\})$.

Auf diese Weise kann man stets eine echt kleinere Erzeugermenge des Polytopes finden, bis die Erzeugermenge minimal ist.

Satz 34. Sei $M := \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ eine minimale Darstellung des Polytopes P. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $x \in M$.

(ii) x ist Ecke von P.

(iii) x ist Extrempunkt von P.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $x \in M$. Man betrachte $conv(M \setminus \{x\})$. Wegen M minimal und $x \in M$ folgt $x \notin conv(M \setminus \{x\}) =: Q$.

Da $\{x\}$ und Q kompakt und konvex sind, folgt aus Satz 33 die Existenz einer Hyperebene $\mathcal{H}_0 = \{y \mid \langle l, y \rangle = c_o\}$ die $\{x\}$ und Q streng trennt. OBdA sei $\langle l, q \rangle > c_o$ für alle $q \in Q$, und $\langle l, x \rangle < c_o$. Sei $c = \langle l, x \rangle$.

Wir zeigen, dass $\mathcal{H} = \{y \mid \langle l, y \rangle = c\}$ wie in Definition von Ecke ist, d.h., $\mathcal{H}$ eine Stützhyperebene an P im Punkt x ist, und $P \cap \mathcal{H} = \{x\}$. Wir benutzen:

$$\langle l, q \rangle > c_o > \langle l, x \rangle \qquad (**)$$

Für jedes $y \in P$, $y \neq x$ gilt:

$$y = \lambda x + \sum_i \lambda_i x_i \ \ \text{mit} \quad 0 \leq \lambda < 1, \ \lambda + \sum_i \lambda = 1, \ x_i \in Q.$$

Dann gilt

$$\langle l, y \rangle = \lambda \langle l, x \rangle + \sum_i \lambda_i \langle l, x_i \rangle \ \ \text{mit} \quad 0 \leq \lambda < 1, \ \lambda + \sum_i \lambda = 1, \ x_i \in Q.$$

Wegen $0 \leq \lambda < 1$ und $\lambda + \sum_i \lambda = 1$ existiert ein $i \in \{1, 2, ..., n\}$ mit $\lambda_i \neq 0$. Es folgt mit $(**)$:

$$\langle l, y \rangle > \lambda \langle l, x \rangle + \sum_i \lambda_i \langle l, x \rangle = \langle l, x \rangle.$$

Wir sehen, dass alle $y \in P$ von einer Seite von $\mathcal{H}$ liegen, und $P \cap \mathcal{H} = \{x\}$. Der Punkt x ist also Ecke von P.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii):

(ii) x ist Ecke von P.

(iii) x ist Extrempunkt von P.

Im Folgenden genügt die Eigenschaft, daß P kompakt und konvex ist. **Widerspruchsbeweis.** Sei x eine Ecke von P. Angenommen x ist kein Extrempunkt von P. Dann gilt: $\exists$ eine Strecke $yz \in P$ mit $x \in relint(yz)$. Da x Ecke von P ist, $\exists$ eine Hyperebene $\mathcal{H}$ sodass $\mathcal{H} \cap P = \{x\}$ Sei $\mathcal{H} = \{\langle l, y \rangle = c\}$ und $P \subseteq \{\langle l, y \rangle \geq c\}$. Wegen $yz \not\subseteq \mathcal{H}$ folgt $\exists \tilde{x} \in yz \subseteq P$ sodass $\langle l, \tilde{x} \rangle > c$. Daraus folgt $\langle l, \tilde{x} - x \rangle > 0$. Da $x \in relint(yz)$, kann λ so gewählt werden, daß $x - \lambda(\tilde{x} - x) \in yz \subseteq P$. Deswegen $\langle l, x - \lambda(\tilde{x} - x) \rangle = \langle l, x \rangle - \lambda \langle l, \tilde{x} - x \rangle < \langle l, x \rangle = c$. Widerspruch zu $\langle l, P \rangle \geq c$, $\square$

(iii) $\Longrightarrow$ (i):

(iii) x ist Extrempunkt von P.

(i) $x \in M$.

Sei x ein Extrempunkt von P und M minimale Darstellung von P. Dann ist $P \setminus \{x\}$ konvex. Wäre $x \notin M$, folgte $conv(M \setminus \{x\}) \subseteq P \setminus \{x\}$, $\square$

Folgerung. Jedes Polytop P hat genau eine minimale Darstellung.

Beweis. Nach Satz 34 besteht die Minimaldarstellung genau aus der Ecken. $\square$

Folgerung. Sei $P = conv(\{x_1, x_2, ..., x_{k+1}\})$ ein k-dimensionales Simplex (die Punkte $x_1, ..., x_{k+1}$ sind affin unabhängig.)
Dann sind $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ die Ecken von P.

Beweis. Dies ist die minimale Darstellung, da

$dim(aff(conv(\{x_1, x_2, ..., x_r\}))) := dim(aff(\{x_1, x_2, ..., x_r\})) < r \leq k$

, $\square$

Satz 35. Sei $P \in \mathbb{R}^n$ ein konvexes Polytop. Dann ist jede Seite von P selbst ein Polytop, und es gibt nur endlich viele Seiten.

Beweis. Sei $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ die minimale Darstellung von P und sei $F \subseteq P$ eine echte Seite von P. Sei $\mathcal{H} := \{y \mid \langle l, y\rangle = c\}$ eine stützende Hyperebene von P mit $\mathcal{H} \cap P = F$.
OBdA sei $\{x_1, x_2, ..., x_r\} \subseteq \mathcal{H}$ und $\langle l, x_i\rangle = c + \varepsilon_i$ mit $\varepsilon_i > 0$ für $i \in \{r+1, ..., k\}$. Da $P \cap \mathcal{H} \neq \varnothing$, folgt $r > 0$. Sei nun $x \in P$. D.h.
$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \sum_i \lambda_i = 1$
$\Longrightarrow \langle l, x\rangle = \sum_{i=0}^r \lambda_i \langle l, x_i\rangle + \sum_{i=r+1}^k \lambda_i \langle l, x_i\rangle =$
$\sum_{i=0}^r \lambda_i c + \sum_{i=r+1}^k \lambda_i (c + \varepsilon_i) = \sum_{i=0}^k \lambda_i c + \sum_{i=r+1}^k \lambda_i \varepsilon_i.$
Daraus folgt:
$x \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \lambda_i = 0 \quad \text{für} \quad i \in \{r+1, ..., k\} \Longleftrightarrow x \in conv(\{x_{r+1}, ..., x_k\}).$
D.h. F ist ein Polytop. Wegen $\#\{x_1, x_2, ..., x_k\} = 2^k < \infty$ hat P nur endliche viele verschiedene Seiten.

Satz 36. Seien $F_1, ..., F_m$ Seiten einer kompakten, konvexen Menge $S \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $F := F_1 \cap ... \cap F_m$ eine Seite von S.

Beweis. OBdA sei $F \neq \varnothing$, sei $\vec{0} \in F$ und sei F_i echte Seite von S für alle $i \in \{1, 2, ..., m\}$.
Nach Voraussetzung existieren Stützhyperenbenen $\mathcal{H}_i := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle l_i, y \rangle = 0\}$, so daß $F_i \subseteq \mathcal{H}_i$ und oBdA $\langle l_i, S \rangle \geq 0$. Wir definieren $l = l_1 + ... + l_m$ und betrachten $\mathcal{H} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, y \rangle = 0\}$.
Wir zeigen: $F = \mathcal{H} \cap S$.
Wegen $\langle l_i, S \rangle \geq 0$ gelten folgende Äquivalenzen:
$x \in F \cap S \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^m F_i \cap S \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^m \mathcal{H}_i \cap S \Longleftrightarrow x \in \mathcal{H} \cap S$.
Außerdem gilt $\vec{0} \in \mathcal{H} \cap S$ und $\langle l_i, S \rangle \geq 0$, d.h., F eine Seite von S ist, $\square$