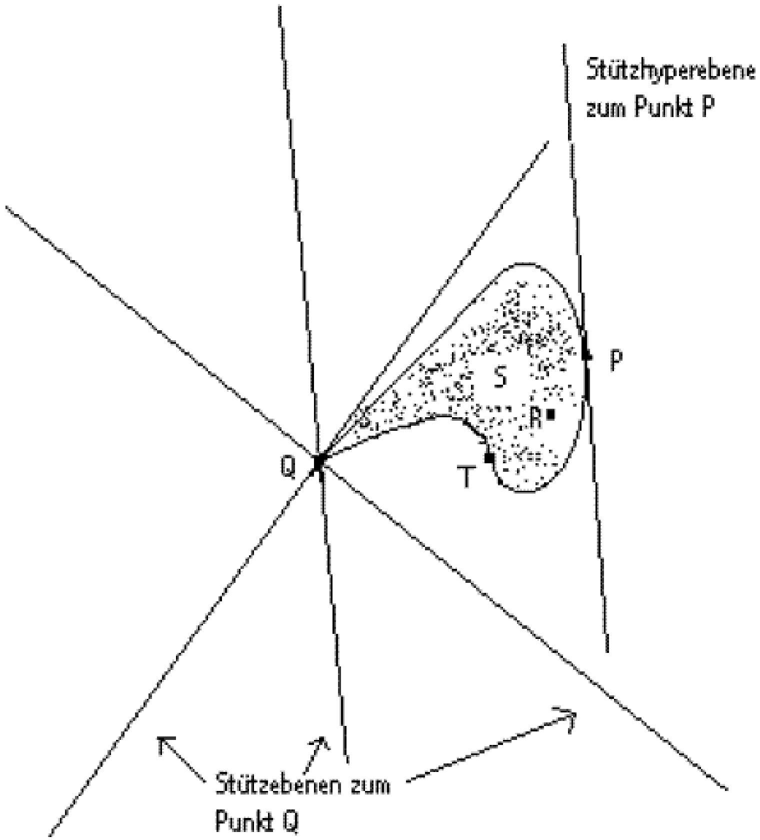
Sätze zur Klausur

1. Klausur am Montag 16.06.
2. Während der Klausur werden Sie eine Aussage aus der Liste beweisen (oder eine Teilaussage aus dem Beweis der Aussage).

- Mengenlehre
  - Satz 2 (Wann sind zwei Menge gleichmächtig)
  - Satz 4 $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$
- Jordan-Form
  - Satz 5 (Normalform für die Endomorphismen, die über $\mathbb{C}$ diagonalisierber sind.)
  - Satz 11 (Zerlegung in Produkt von verallgemeinerten Eigenräumen)
  - Lemma 4 (Zerlegunslemma)
  - Satz 13 (Jordan-Normalform)
- Affine und konvexe Geometrie
  - Satz 20 (Stralensatz)
  - Satz 22 (Fundamentalsatz der affinen Geometrie)
  - Satz 23 (Konvexe Hülle)

Stützende Hyperebenen

Def. 28 Eine Hyperebene $\mathcal{H}$ stützt eine Menge $S \in \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $x \in S$, wenn $x \in \mathcal{H}$ und $\mathcal{H}$ die Menge S beschränkt, d.h. S liegt ganz auf einer Seite von $\mathcal{H}$ (d.h. für $\mathcal{H} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, y \rangle = c\}$ gilt dann $\langle l, y \rangle \geq c$ für alle $y \in S$, oder $\langle l, y \rangle \leq c$ für alle $y \in S$.) $\mathcal{H}$ heißt Stützhyperebene.



Der Punkt Q besitzt mehrere Stützebenen, der Punkt P genau eine, die Tangente. Die Punkte T und R besitzen gar keine Stützebenen.

Def. (Analysis-Vorlesung) Die Menge $Rand(S) := S \setminus int(S)$ heißt die Randmenge von S.

Satz 29. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Es gilt: Ist x ein Randpunkt von S, so existiert mindestens eine Hyperebene, die S in x stützt.

Beweis. Ist $dim(aff(S)) < n$, so ist jede Hyperebene, die S enthält, eine stützende Hyperebene von S in jedem Punkt $x \in S$ nach Definition.
Ist $dim(aff(S)) = n$, so ist $int(S) \neq \varnothing$. In der Tat, falls $x_0, ..., x_n \in S$ affin unabhängig sind, dann liegt das ganze Simplex $conv(\{x_0, ..., x_n\})$ auch in S, und es hat innere Punkte.
Sei x Randpunkt von S. Wir haben:

$$\left.\begin{array}{c} int(S) \text{ ist offen und } \neq \varnothing \\ x \notin int(S) \text{ ist ein} \\ \text{0-dim affiner Raum} \end{array}\right\} \overset{\text{Folg. aus Satz 27}}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{array}{l} \exists \text{ eine Hyperebene } \mathcal{H} \text{ durch } x, \\ \text{die } int(S) \text{ nicht schneidet.} \end{array}}$$

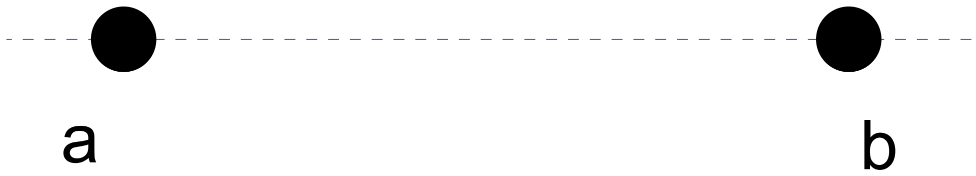
Die Hypereben $\mathcal{H}$ sei gegeben durch $\mathcal{H} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle l, y \rangle = c\}$. Wir zeigen, dass die Hyperebene $int(S)$ beschränkt. In der Tat, nach Konstruktion für jeden $y \in int(S)$ gilt: $\langle l, y \rangle \neq c$. Dann ist entweder $\langle l, y \rangle > c$ für aller $y \in int(S)$, oder $\langle l, y \rangle < c$ für aller $y \in int(S)$ (Wir benutzen, dass $int(S)$ nach Folg. aus Lemma 18 auch konvex ist. Falls es $y_1, y_2 \in S$ mit $\langle l, y_1 \rangle < c$ und $\langle l, y_2 \rangle > c$ gibt, dann gibt es einen Punkt auf der Verbindungsstrecke $y_1 y_2 = \{ty_1 + (1-t)y_2 | t \in [0, 1]\}$ mit $\langle l, ty_1 + (1-t)y_2 \rangle = c$(Zwischenwertsatz), was Vorauusetzungen widerspricht.)

Also, beschränkt $\mathcal{H}$ die Menge $int(S)$. OBdA können wir annehmen, dass $\langle l, y \rangle > c$ für aller $y \in int(S)$. Wir zeigen, dass $\langle l, y \rangle \geq c$ für aller $y \in S$. Man nehme einen $z \in rand(S)$ und betrachte die Verbindungsstrecke zy, wobei y ein innerer Punkt ist. Nach Lemma 18 sind alle Punkte von $zy \setminus \{z\}$ innere Punkte von S, also $\langle l, * \rangle > c$ für alle diese Punkte. Da die Funktion $\langle l, (1-t)z + ty \rangle$ stetig (als Funktion der Variable t) ist, ist dann $\langle l, z \rangle \geq c$. Dann beschränkt die Hyperebene $\mathcal{H}$ die Menge S. Da $x \in \mathcal{H}$, stützt $\mathcal{H}$ die Menge S in x, $\square$

Umkehrung von Satz 29

Satz 30. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $int(S) \neq \varnothing$. Es gilt: Wenn durch jeden Randpunkt von S eine Hyperebene durchgeht, die S stützt, dann ist S konvex.

Bemerkung. Dies ist nur eine partielle Umkehrung von Satz 29, da nun zusätzlich gefordert wird, dass $int(S) \neq \varnothing$. Dass diese zusätzliche Bedingung notwendig ist, zeigt dieses Beispiel in $\mathbb{R}^1$:



Sei $S = \{a, b\}$ mit $a \neq b$. Dann ist S abgeschlossen (ein Punkt ist abgeschlossen, ebenso die endliche Vereingung) und die Stützhyperebenen, die in diesem Fall null-dimensional sind, sind die beiden Punkte selber. Also geht durch jeden Randpunkt von S eine Stützebene. Trotzdem ist S sicherlich nicht konvex.

Satz 30. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $int(S) \neq \varnothing$. Es gilt: Wenn durch jeden Randpunkt von S eine Hyperebene durchgeht, die S stützt, dann ist S konvex.

Beweis für $n = 1$. Sei $S \in \mathbb{R}$ abgeschlossen und $int(S) \neq \varnothing$. Ist $S = \mathbb{R}$, so ist S konvex. Wir nehmen an, dass $S \neq \mathbb{R}$ nicht konvex ist (obwohl durch jeden Randpunkt von S eine Stützhyperebene durchgeht), und bekommen ein Widerspruch.
Da nach Voraussetzung $int(S) \neq \varnothing$ ist ,gibt es ein $u \in int(S)$. Sei I ein abgeschlossenes Intervall, $I \subseteq S$, wobei $I = [a, b]$ mit

$$a := inf\{x \in S \mid [x, u] \subseteq S\} \quad \text{und} \quad b := sup\{y \in S \mid [u, y] \subseteq S\}.$$

Da S nach unserer Annahme nicht konvex ist, gilt $[a, b] \not\supseteq S$. Dies bedeutet jedoch, dass

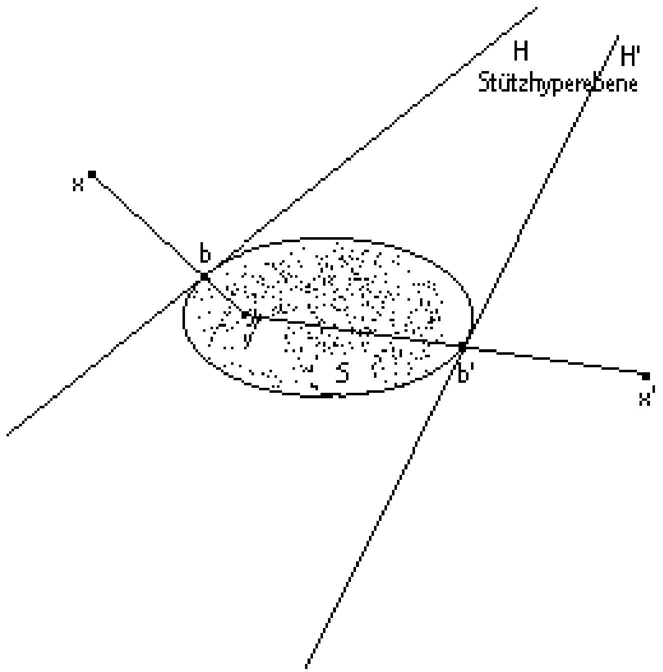
Fall 1. $\exists y_0 \in S$, $y_0 > b$. Dann ist aber $b \in S$ ein Randpunkt, durch den keine Stützebene geht – Widerspruch.

Fall 2. $\exists x_0 \in S$ $x_0 < a$. Dann ist aber $a \in S$ ein Randpunkt, durch den keine Stützebene geht – Widerspruch.

Also, Satz 30 ist in dimension 1 bewiesen.

Satz 30. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $int(S) \neq \emptyset$. Es gilt: Wenn durch jeden Randpunkt von S eine Hyperebene durchgeht, die S stützt, dann ist S konvex.

Beweis für $n \geq 2$. Sei wieder $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $int(S) \neq \emptyset$. Ist $S = \mathbb{R}^n$, so ist S konvex. Wir nehmen an, dass $S \neq \mathbb{R}^n$. Wir nehmen einen Punkt $x \notin S$. Außerdem gibt es, da $int(S) \neq \emptyset$, ein $y \in int(S)$ und einen Randpunkt b von S, mit $b \in relint(xy)$.



Die nach Voraussetzung existierende stützende Hyperebene $\mathcal{H}$ von S durch b enthält nicht x (denn würde sie b und x enthalten, so enthielte sie auch die Strecke bx und damit auch die Strecke xy, was im Widerspruch dazu steht, dass y ein innerer Punkt ist). Folglich gilt für den abgeschlossenen Halbraum, der von $\mathcal{H}$ begrenzt wird und y enthält, dass er S einschließt, aber nicht x enthält.

Da x ein beliebiger Punkt nicht in S ist, kann man dieses Verfahren für alle $x \notin S$ anwenden und so schließen, dass S gleich dem Schnitt aller so entstandenen Halbräume, welche S enthalten, ist. Also ist S ein Schnitt von konvexen Mengen und selbst konvex, □

Sätze 29, 30 in Worten

Die Sätze 29 und 30 kombiniert ergeben die folgende Charakterisierung von abgeschlossenen konvexen Mengen mit nicht leerem Inneren:

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $int(S) \neq \varnothing$. Dann gilt:

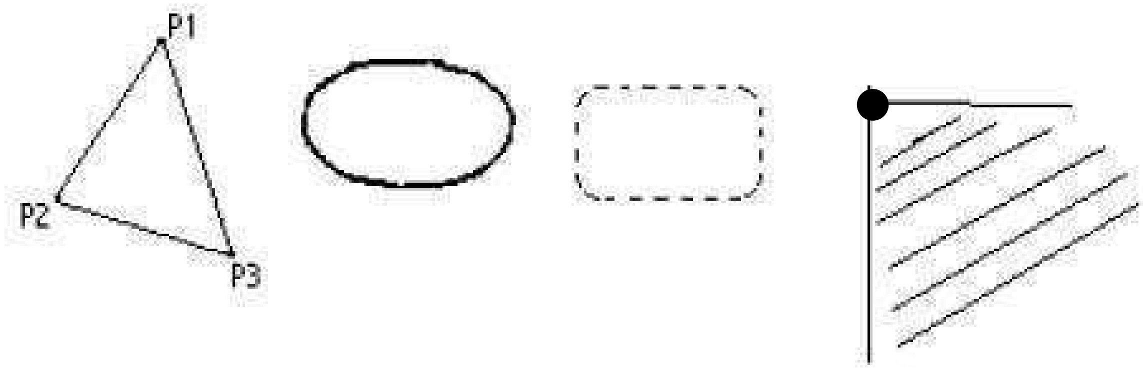
S ist konvex genau dann, wenn durch jeden Randpunkt von S eine die Menge S stützende Hyperebene geht.

$\Longrightarrow$ Gilt nach Satz 29

$\Longleftarrow$ Gilt nach Satz 30

Bemerkung. Das interessante an diesem wichtigen Satz ist, dass er die globale paarweise Definition von Konvexität (Die Strecke zweier beliebiger Punkte muß ganz in S liegen) mit einer Eigenschaft von einigen einzelnen Punkten (jeder Randpunkt muss in einer Stützebene liegen) gleichsetzt.

Def. 29 Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Ein Punkt $x \in S$ heißt Extrempunkt von S, wenn es kein Intervall ganz in S liegend gibt, die x in ihrem relativen Inneren enthält. Die Menge aller Extrempunkte von S heißt Profil von S.



Das Profil eines Dreiecks sind seine drei Eckpunkte, das Profil einer Ellipse ist der ganze Rand. Offene Mengen haben kein Profil, genauso wenig der ganze Raum und Halbräume. Viertelräume hingegen haben einen Eckpunkt als Profil.

Wiederholung – Vorl. Analysis. Eine abgeschlossene beschränkte Menge in $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

Satz 31. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte und konvexe Menge. Es gilt: S ist die konvexe Hülle ihres Profils P.

In anderen Worten, Jedes $x \in S$ ist Konvexkombination von Elementen des Profils S.

Zuerst eine Hilfsaussage:

Lemma 20 Sei $S \in \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Sei $\mathcal{H}$ eine Stützhyperebene von S in einem Punkt $x \in S$. Es gilt: Ist x ein Extrempunkt von $\mathcal{H} \cap S$, so ist x ein Extrempunkt von S.

Beweis. Sei $\mathcal{H} := \{y \mid \langle l, y\rangle = c\}$. Sei x aus dem Profil von $S \cap \mathcal{H}$. Dann gilt $\langle l, x\rangle = c$. OBdA ist $\langle l, z\rangle \leq c$ für alle $z \in S$.

Wir nehmen an, dass x nicht aus dem Profil von S ist. Das heißt, x liegt im Inneren eines Intervals, also $x = \lambda \cdot u + (1-\lambda) \cdot v$ mit $\lambda \in (0,1)$,$u, v \in S$ und entweder $u \notin S \cap \mathcal{H}$ oder $v \neq S \cap \mathcal{H}$ (sonst wäre x kein Extrempunkt in $S \cap \mathcal{H}$.) Folglich gilt $\langle l, u\rangle < c$ oder $\langle l, u\rangle > c$. OBdA können wir annehemen, dass $\langle l, u\rangle < c$.

Dann gilt $c = \langle l, x\rangle = \langle l, \lambda \cdot u + (1-\lambda) \cdot v\rangle \overset{\text{Linearität}}{=}$ $\lambda \cdot \langle l, u\rangle + (1-\lambda) \cdot \langle l, v\rangle < \lambda \cdot c + (1-\lambda) \cdot c < c$. Widerspruch zeigt, dass $x \in P$, $\square$

Satz 31. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte und konvexe Menge. Es gilt: S ist die konvexe Hülle ihres Profils P.

Induktionsbeweis nach $k := dim(aff(S))$.
InduktionsAnfang: Ist $k = 0$, so ist S nur ein Punkt. Da dieser Punkt trivialerweise auch das Profil P von S ist, gilt $conv(P) = S$.

InduktionsVoraussetzung: Gelte der Satz für jede kompakte, konvexe Menge der Dimension höchstens $k - 1$.

Satz 31. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakte und konvexe Menge. Es gilt: S ist die konvexe Hülle ihres Profils P.

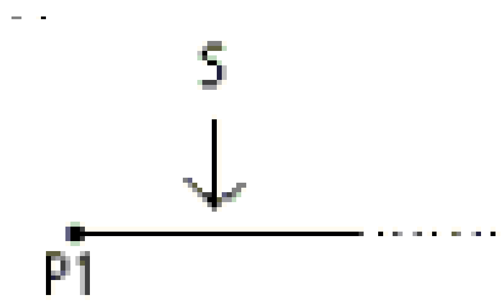
InduktionsSchritt: Sei $dim(aff(S)) = k$, $x \in S$. Die affine Hülle $aff(S)$ ist zu $\mathbb{R}^k$ isomorph. Offensichtlich ist S kompakte und konvexe als Teilmenge von $aff(S) \cong \mathbb{R}^k$. Ferner gilt: Profil P von S (in $\mathbb{R}^n$) und die konvexe Hülle $conv(P)$ (auch in $\mathbb{R}^n$) fällt mit dem Profil P von S (in $aff(S) \cong \mathbb{R}^k$) und der konvexen Hülle $conv(P)$ (auch in $aff(S) \cong \mathbb{R}^k$) zusammen. Also, oBdA können wir annehmen, dass $k = n$ ist.
Ist x im Rand von S, so gibt es nach Satz 29 eine $k-1$ dimensionale Hyperebene, die S in x stützt. Die Menge $S \cap \mathcal{H}$ ist kompakt und konvex, wobei $dim(aff(S \cap \mathcal{H})) \leq k-1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann, dass x eine Konvexkombination der Extrempunkte von $S \cap \mathcal{H}$ ist. Nach dem Lemma 20 folgt, dass x eine Konvexkombination der Extrempunkte von S ist. Wir haben deswegen $Rand(S) \subseteq conv(P)$ bewiesen.

Wir zeigen jetzt $int(S) \subseteq conv(P)$. Sei $x \in int(S)$. Sei $\mathcal{G}$ eine Gerade in der affinen Hülle von S durch x. Dann ist $\mathcal{G} \cap S$ ein Interval mit Endpunkten y und z, wobei $y, z \in Rand(S) \subseteq conv(P)$. Dann liegt das ganze Intervall in $conv(P)$, folglich $int(S) \subseteq conv(P)$.
Insgesammt haben wir gezeigt:$S \subseteq conv(P)$.Da S konvex ist, ist $conv(P) \subseteq S$ nach Satz 23. Also,$conv(P) = S$, $\square$

Folgerung. Jede kompakte, konvexe Menge S besitzt mindestens einen Extrempunkt.

Beweis. Weil S nach Satz 31 mit der konvexe Hülle von Extrempunkte übereinstimmt, $\square$

Beispiele, die zeigen, dass die Annahmen wichtig sind:



Links: S ist eine Halbgerade, d.h. S ist konvex aber unbegrenzt und somit nicht kompakt. Das Profil von S ist der Punkt P_1. Es gilt hier: $conv(P) \neq S$.

Rechts: S ist ein halboffener, halbgeschlossener Kreis, d.h. S ist konvex und beschränkt, aber nicht abgeschlossen, also nicht kompakt. Das Profil von S ist der linke Halbkreis. Folglich gilt $conv(P) \neq S$.

Es gibt Ähnlichkeiten zwischen dem Profil einer kompakten, pkonvexen Menge und einer Basis eines linearen Untervektorraums bzw. Koordinatensystem eines affiner Unterraums:

- Eine Basis B eines linearen Unterraums U ist eine linear unabhängige Teilmenge von U, welche den Unterraum aufspannt, in dem Sinn, dass jedes Element von U eine Linearkombination der Elemente in B ist. Jeder Unterraum des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine Basis, und obwohl die Basis nicht eindeutig ist, hat sie immer die gleiche Anzahl an Elementen.
- Eine Teilmenge F des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine affin unabhängige Teilmenge A von F mit einer endlichen Anzahl von Elementen, so dass die affine Hülle von A gleich affine Hülle von F ist. Obwohl diese Teilmenge nicht eindeutig ist, hat sie immer die gleiche Anzahl an Elementen.
- Wenn wir eine Menge als konvex unabhängig definieren, das heißt, dass kein Element der Menge eine Konvexkombination der anderen Elemente ist, dann ist das Profil P von S eine konvex unabhängige Teilmenge von S, wobei S wieder kompakt und konvex, so dass die konvexe Hülle von P gleich S ist. In der Analogie gesprochen heißt das, dass P die Menge S konvex aufspannt. Unglücklicherweise, obwohl das Profil eindeutig ist, kann es unendlich viele Elemente haben.

Wie die Beispiele oben zeigen, falls die Menge S nicht kompakt ist, bricht diese Analogie leider völlig zusammen.

Satz 32. Sei $f \in \mathbb{R}^{n*}$ ein lineare Form, sei $S \in \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Es gilt: Es existieren Extrempunkte $\bar{x}$ und $\bar{y} \in S$ so dass $f(\bar{x}) = \max_{x \in S} f(x)$ und $f(\bar{y}) = \min_{y \in S} f(x)$.

Wiederholung (Vorl. 17 LAAG I; Def. 39 dort.) Dualraum $\mathbb{R}^{n*}$ ist die Menge der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^1$. Die Elemente des Dualraums heißen die Linearformen. Die Menge aller Lineareformen ist ein Vektorraum der gleichen Dimension bzgl. natürlichen Operationen. In Koordinaten, kann man jede Linearform in der Form $f(x) = l_1 x_1 + ... + l_n x_n$ darstellen; also in der Form $f(x) = \langle l, x \rangle$.

Bemerkung. Linearform ist offensichtlich eine stetige Abbildung. Dann nimmt sie (Analysis-Vorlesung) auf kompakten Mengen ihr Minimum (z.B, im Punkt $\bar{y}$) und Maximum z.B, (im Punkt $\bar{x}$) an. Also, wir müssen nur zeigen, dass diese Punkte Extrempunkte sind.

Satz 32. Sei $f \in \mathbb{R}^{n*}$ ein lineare Form, sei $S \in \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Es gilt: Es existieren Extrempunkte $\bar{x}$ und $\bar{y} \in S$ so dass $f(\bar{x}) = \max_{x \in S} f(x)$ und $f(\bar{y}) = \min_{y \in S} f(x)$.

Beweis. Sei $\gamma := \max_{x \in S} f(x)$.

Nach Satz 31 ist $conv(P) = S$; deswegen gibt es Extrempunkte $x_1, ..., x_k \in P \subseteq S$ und nicht negative $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ so dass $\bar{x} = \sum_i \lambda_i x_i$.
Dann ist

$$f(\bar{x}) = f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k) = \lambda_1 \underbrace{f(x_1)}_{\leq \gamma} + ... + \lambda_k \underbrace{f(x_k)}_{\leq \gamma} \leq \gamma \text{ und ist}$$

$= \gamma$ nur wenn alle $\lambda_i f(x_i) = \lambda_i \gamma$ sind. Da ein von λ nicht 0 ist, impliziert dies, dass ein $f(x_i) = \gamma$, also die Linearform nimmt den maximalen Wert im Extrempunkt x_i an, $\square$