Satz 26 (von Helly). Seien $A_1, ..., A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen. Haben je $n+1$ dieser Mengen nichtleeren Durchschnitt, so haben alle dieser Mengen nichtleeren Durchschnitt.

Induktionsbeweis. Für $k < n+1$ ist nichts zu zeigen, und für $k = n+1$ ist die Behauptung trivial – Induktionsanfang.
Sei $k \geq n+2$, und sei die Behauptung bewiesen für $k-1$ konvexe Mengen. Für jedes $i \in \{1, ..., k\}$ gibt es dann einen Punkt

$$x_i \in A_1 \cap ... \cap \check{A}_i \cap ... \cap A_k,$$

wobei $\check{A}_i$ bedeutet, dass die Menge A_i weggelassen wird. Die $k \geq n+2$ Punkte $x_1, ..., x_k$ sind affin abhängig. Nach Satz 25 (von Radon) können wir daher nach geeigneter Umnumerierung annehmen, dass es einen Punkt

$$x \in conv(\{x_1, ..., x_j\}) \cap conv(\{x_{j+1}, ..., x_k\})$$

gibt, wo $j \in \{1, ..., k-1\}$ geeignet gewählt ist. Wegen
$x_1, ..., x_j \in A_{j+1}, ..., A_k$ gilt

$$x \in conv(\{x_1, ..., x_j\}) \subseteq A_{j+1}, ..., A_k \quad \text{und analog}$$

$$x \in conv(\{x_{j+1}, ..., x_k\}) \subseteq A_1, ..., A_j,$$

also $x \in A_1 \cap ... \cap A_k$,

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir definieren
$\alpha A + \beta B := \{\alpha x + \beta y \mid x \in A,\ y \in B\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
(die Menge $\alpha A + \beta B$ hängt von der Wahl von $\vec{0}$ ab); falls wir den Punkt $\vec{0}$ verschieben, wird auch $\alpha A + \beta B$ verschoben.
Die Menge $\alpha A + \beta B$ heißt eine Linearkombination von Mengen A und B; die Operation „+" heißt Vector-Addition.
Spezialfälle haben auch besondere Namen:

$A + B$	die Summe
$A + \{v\}$	ein Translat von A
αA	eine Vielfachheit von A
$-A := (-1)A$	Spiegelung von A
$A - B := A + (-B)$	Difference von A und B

Lemma 17. Ist A und B konvex, so ist $\alpha A + \beta B$ auch konvex.
Beweis. Wir nehmen $\alpha \underbrace{a_i}_{\in A} + \beta \underbrace{b_i}_{\in B} \in \alpha A + \beta B$, $i = 1, 2$. Dann ist die Verbindungsstrecke

$$\{(1-t)(\alpha a_1 + \beta b_1) + t(\alpha a_2 + \beta b_2) \mid t \in [0,1]\} =$$

$$= \left\{ \alpha(\underbrace{(1-t)a_1 + ta_2}_{\in A}) + \beta(\underbrace{(1-t)b_1 + tb_2}_{\in B}) \mid t \in [0,1] \right\} \subseteq \alpha A + \beta B.$$

Aus dem Satz von Helly kann man mehrere Aussagen der kombinatorischen Geometrie herleiten; hierfür ein kleines Beispiel. Wir sagen, dass die Mengen $A_1, \ldots, A_m$ von K getroffen werden, wenn $A_i \cap K \neq \varnothing$ für $i = 1, \ldots, m$ gilt.

Folgerung. Sei M eine endliche Familie konvexer Mengen im $\mathbb{R}^n$, sei $K \in \mathbb{R}^n$ konvex. Werden je $n+1$ Elemente von M von einem Translat von K getroffen, so werden alle Elemente von M von einem Translat von K getroffen.

Wiederholung. Translat von K ist die Menge $K + \{v\} = \{x + v \mid x \in K\}$.

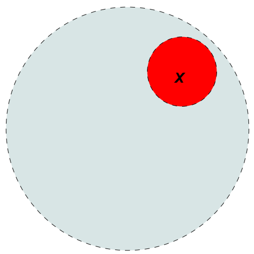
Beweis. Sei $M = \{A_1, \ldots, A_k\}$. Zu je $n+1$ der Zahlen $\{1, \ldots, k\}$, etwa zu $1, \ldots, n+1$, gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$ und Punkte $a_i \in A_i \cap (K + \{v\})$. Es ist also $a_i = k_i + v$ mit $a_i \in A$ und $k_i \in K$. Es folgt $v = a_i - k_i \in A_i - K$ für $i = 1, \ldots, n+1$. Also haben je $n+1$ Elemente der Familie $\{A_1 - K, \ldots, A_k - K\}$ nichtleeren Durchschnitt. Da $A_i - K$ konvex ist ($i = 1, \ldots, k$), haben nach dem Satz von Helly alle Elemente dieser Familie nichtleeren Durchschnitt. Es gibt also ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \in A_i - K$, also $A_i \cap (K + v) \neq \varnothing$ für $i = 1, \ldots, k$, $\square$

Topologische Begriffe in der Konvexe Geometrie

Wiederholung. Offener Ball vom Radius $r \geq 0$ um x_0
$B(r, x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$.
Def. 26 (Analysis- Vorlesung) Sei A eine Teilmenge $A \in \mathbb{R}^n$. Das Innere von A (Bezeichung: $int(A)$) ist die Vereinigung von aller offene Bälle, die ganz in A enthalten sind.

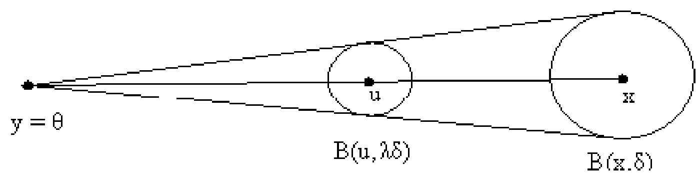
Eine Menge ist offen, falls $A = int(A)$.

Das relative Innere einer Menge A (Bezeichung: $relint(A)$) ist das Innere in $aff(A)$.
Bsp. Ein offener Ball ist offen.
$relint(\{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}) = \{(1-t)x + ty \mid t \in (0, 1)\}$.



Lemma 18. Sei A eine konvexe Menge. Falls $x \in int(A)$ und $y \in A$, dann ist $relint(xy) \subseteq int(A)$, wobei xy die Verbindungsstrecke ist.

Beweis. Sei $y \in A$ und o.B.d.A. sei $y = \vec{0}$ der Ursprung. Sei $x \in int(A)$ $\overset{\text{Def. 26}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ eine offene Kugel $B(x, \delta) \subseteq A$. Für beliebiges $u \in relint(xy)$ existiert ein λ , $(0 < \lambda < 1)$, so dass $u = \lambda x$. Es gilt:
$B(\lambda\delta, \lambda x) = \lambda B(\delta, x)$



Weil A konvex ist und $\vec{0} \in A$, gilt: $\lambda B(\delta, x) \subseteq A \Longrightarrow$
$B(\lambda\delta, \lambda x) = B(\lambda\delta, u) \subseteq A$.
Da die Kugel um u mit Radius $\lambda\delta$ in A enthalten ist, folgt daraus, dass $u \in int(A)$, □

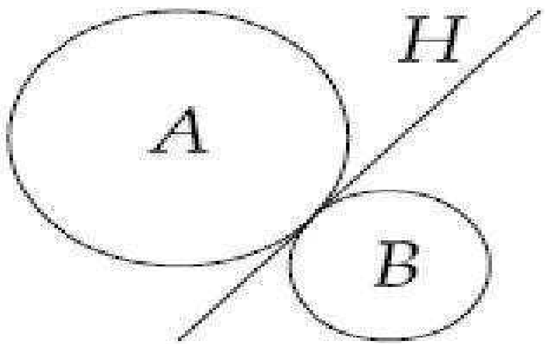
Folgerung. Falls A konvex ist, dann ist das Innere $int(A)$ konvex.

Beweis. Seien $x, y \in int(A)$. Nach Lemma 17 gilt: $relint(xy) \subseteq int(A)$. Nun ist aber $xy = relint(xy) \cup \{x, y\}$, daher ist $xy \subseteq int(A)$. Damit gilt, daß $int(A)$ konvex ist, □

Separierende Hyperebenen

Hyperebenen $=$ affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$.
Nach Satz 19 ist jede Hyperebene die Lösunsgmenge einer linearen Gleichung $\underbrace{l_1x_1 + \ldots + l_nx_n}_{\langle l,x\rangle} = c$.

Def. 27 Zwei Mengen A, B werden von der Hyperebene $\langle l, x\rangle = c$ separiert (man sagt auch: schwach separiert), falls für alle $a \in A$, $b \in B$ gilt: $\langle l, a\rangle \leq c$ und $\langle l, b\rangle \geq c$ bzw. $\langle l, a\rangle \geq c$ und $\langle l, b\rangle \leq c$.
Zwei Mengen A, B werden von der Hyperebene $\langle l, x\rangle = b$ streng separiert, falls für alle $a \in A$, $b \in B$ gilt: $\langle l, a\rangle < c$ und $\langle l, b\rangle > c$ bzw. $\langle l, a\rangle < c$ und $\langle l, b\rangle > c$.

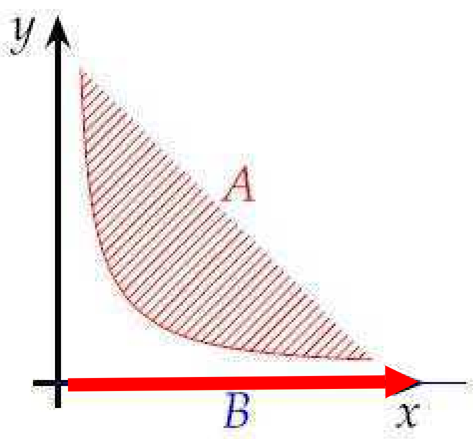


Aufgrund dieser Defnitionen können zwei Mengen über- haupt nur dann streng separiert werden, wenn sie disjunkt sind.
Trotzdem ist die Bedingung, daß zwei Mengen streng separierbar sind, wenn sie disjunkt sind, lediglich notwendig und nicht hinreichend. Dies gilt insbesondere für abgeschlossene konvexe Mengen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Die Mengen

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0, y \geq \tfrac{1}{x}\right\}$$
$$B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0, y = 0\right\}$$

sind disjunkte, abgeschlossene konvexe Mengen. Es existiert aber keine Hyperebene (Gerade im $\mathbb{R}^2$), die diese Mengen streng separiert, da die Menge B auf der Geraden liegt, die waagerechte Asymptote an den Rand der Menge A ist.



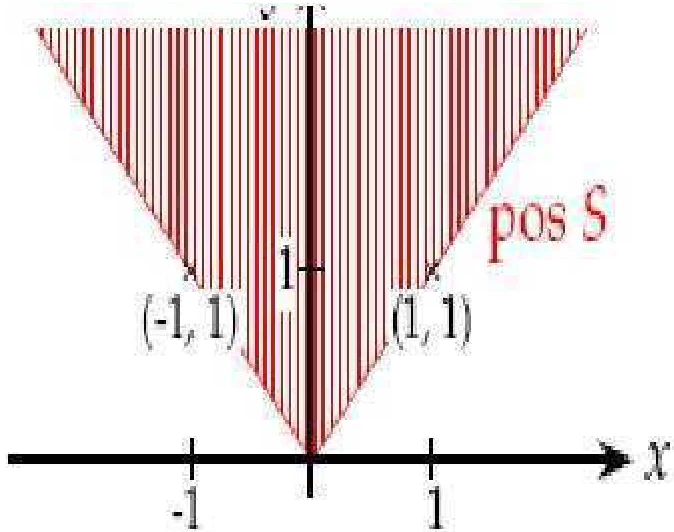
Def. 27 Der Punkt $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$, , $\lambda_i \geq 0$, $x_i \in A$ heißt positive Kombination von Elemente von A. Positive Hülle von A $pos(A)$ ist die Menge aller konvexen Kombinationen der Elemente von A.

① Die Menge

$$S := \{(-1,1),(1,1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

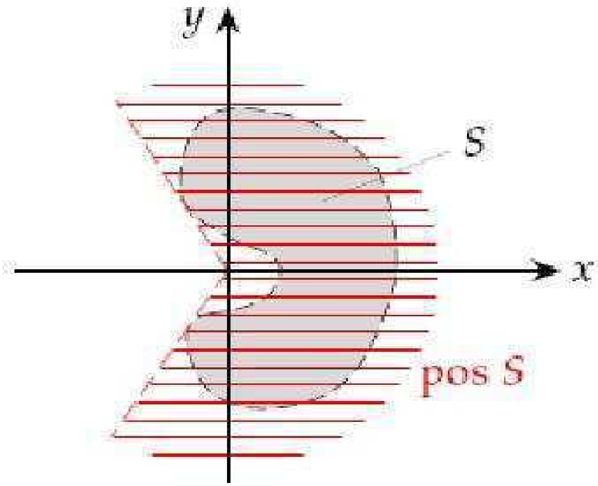
besitzt die positive Hülle

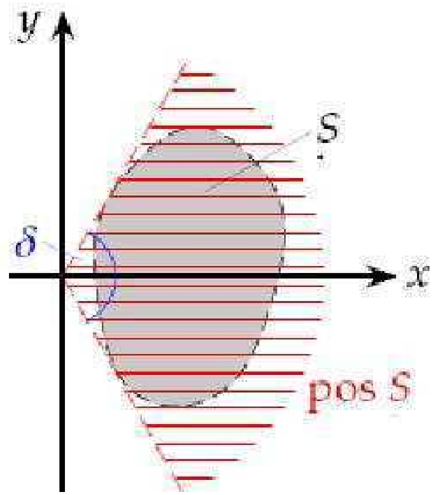
$$\operatorname{pos} S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x|\}.$$



Lemma 19. Sei $S \subset \mathbb{R}^2$, $S \neq \mathbb{R}^2$, offen und konvex. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^2 \setminus S$: Es existiert eine Gerade $\mathcal{G}$ mit $x \in \mathcal{G}$ und $\mathcal{G} \cup S = \varnothing$.

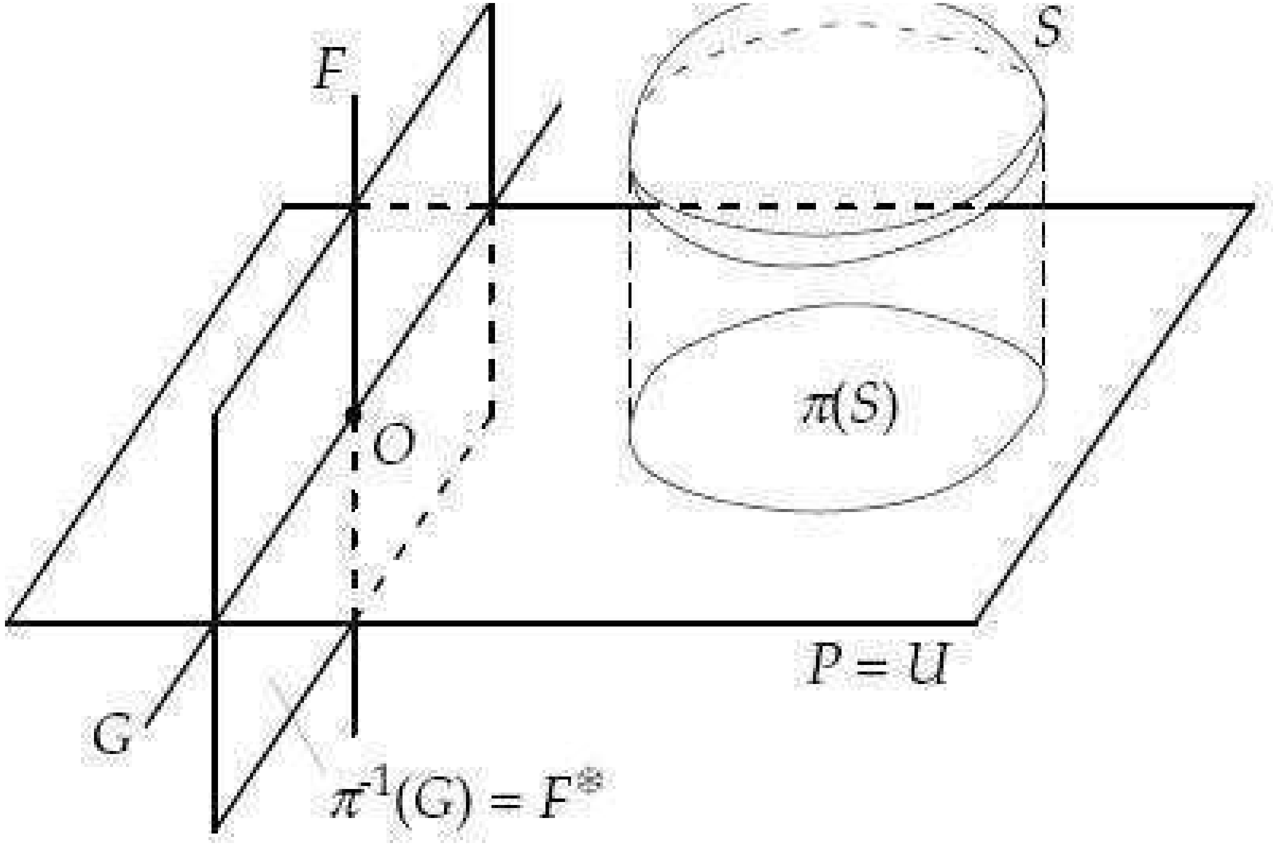
Beweis. O.B.d. A. sei $0 \notin S$,d.h. $x := \vec{0} \in \mathbb{R}^2 \setminus S$. Da die Menge S offen und konvex ist, bildet die positive Hülle $pos(S)$ von S einen offenen Sektor mit Eckpunkt $\vec{0}$ und Winkel $\delta \leq \pi$.





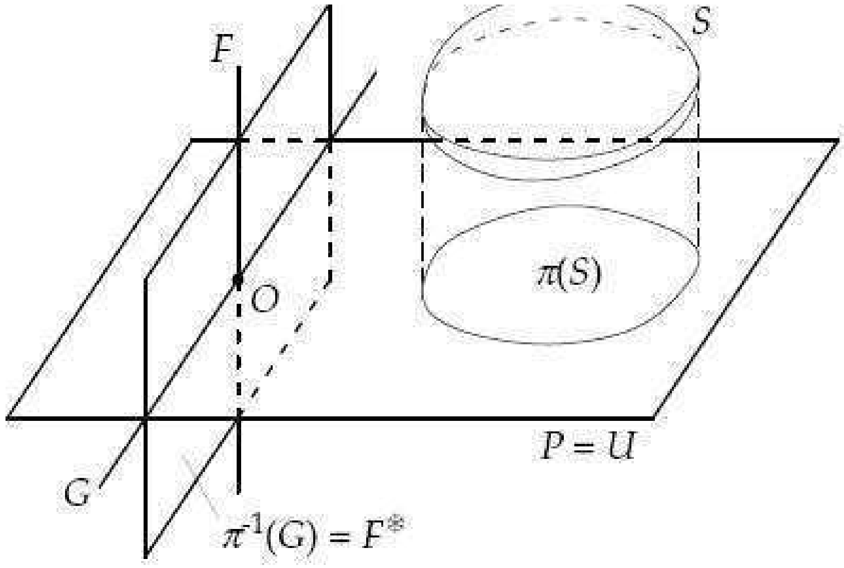
Eine Ursprungsgerade $\mathcal{G}$ (d. h. $x = \vec{0} \in \mathcal{G}$), die eine Seite des Sektors enthält, erfüllt nun obige Bedingung $\mathcal{G} \cap S = \varnothing$, da der Sektor offen ist, □

Satz 27. Sei $\mathcal{F}$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ mit $dim(\mathcal{F}) = k$. Sei $S \in \mathbb{R}^n$ offen und konvex, so daß $\mathcal{F} \cap S = \varnothing$.
Falls $0 \leq k \leq n-2$ ist, existiert ein $(k+1)-$dimensionaler affiner Unterraum $\mathcal{F}^*$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ und $\mathcal{F}^* \cap S = \varnothing$.



Beweis. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. OBdA ist $\vec{0} \in \mathcal{F}$. Für $0 < k \leq n-2$ sei $\mathcal{F} = aff(\{\vec{0}, e_1, \ldots, e_k\})$ und $\mathcal{U} = aff(\{\vec{0}, e_{k+1}, \ldots, e_n\})$.
Sei $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{U}$,
$\pi(a_1, \ldots, a_n) := (0, \ldots, 0, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. Da π offensichtlich eine affine Abbildung ist, ist $Bild_\pi(S)$ konvexe Teilmenge von $\mathcal{U}$.

Wir betrachten die Ebene $\mathcal{P} := aff(\{\vec{0}, e_n, e_{n-1}\})$. Die Schnittmenge $Bild_\pi(S) \cap \mathcal{P}$ auch eine konvexe Menge ist; sie ist offen als Teilmenge von $\mathcal{P}$.



Wegen $\mathcal{F} \cap S = \varnothing$ gilt: $\vec{0} \notin Bild_\pi(S)$, deswegen $\vec{0} \notin Bild_\pi(S) \cap \mathcal{P}$. Deswegen existiert nach Lemma 19 eine Gerade $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}$ mit $x := 0 \in \mathcal{G}$ und $\mathcal{G} \cap Bild_\pi(S) = \varnothing$.

Für $\mathcal{F}^* := Urbild_\pi \mathcal{F} = \mathcal{F} + \mathcal{G}$ gilt: $dim(\mathcal{F}^*) = dim(\mathcal{F}) + 1$ und $\mathcal{F}^* \cap S = \varnothing$, $\square$

Folgerung. Sei $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum mit $dim(\mathcal{F}) = k$. Sei $S \in \mathbb{R}^n$ offen und konvex, so daß $\mathcal{F} \cap S = \varnothing$. Falls $0 \leq k < n$ ist, existiert eine Hyperebene $\mathcal{H}$, mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$ und $\mathcal{H} \cap S = \varnothing$.

Beweis. $((n-1)-k)$-maliges Anwenden von Satz 27 liefert die Behauptung, da die Dimension des affinen Raumes jeweils um 1 wächst, bis der Raum eine Hyperebene ist, $\square$

Satz 28 Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex,so daß $int(A) \neq \varnothing$ und $B \cap int(A) = \varnothing$ ist. Dann existiert eine Hyperebene $\mathcal{H}$, die die Mengen A und B schwach separiert.

Beweis. Sei A zunächst zusätzlich offen. Es gilt nach Lemma 17: $A - B$ ist offen und konvex. Da A offen ist, ist $int(A) = A$, weshalb wegen $B \cap A = B \cap int(A) = \varnothing$ gilt: $\vec{0} \notin A - B$. Damit gibt es nach Folgerung oben eine Hyperebene $\mathcal{H}_0 := \{\langle l, x \rangle = 0\}$ durch $\vec{0}$ mit $\mathcal{H}_0 \cap (A - B) = \varnothing$. Da $A - B$ konvex ist , können wir oBdA annehmen, dass $\langle l, x \rangle > 0$ für alle $x \in (A - B)$. Sonst existieren $x, y \in (A - B)$ so dass $\langle l, x \rangle > 0$ und $\langle l, y \rangle < 0$. Dann gibt es ein $t \in [0, 1]$ so dass $\langle l, (1 - t)x + ty \rangle = 0$, weil die Funktion $f(t) := \langle l, (1 - t)x + ty \rangle$ stetig ist. Dies widerspricht $\mathcal{H}_0 \cap (A - B) = \varnothing$. Dann gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$:
$0 < \langle l, a - b \rangle = \langle l, a \rangle - \langle l, b \rangle \Longrightarrow \langle l, a \rangle > \langle l, b \rangle$.

Folglich ist die Menge $\{\langle l, a\rangle \mid a \in A\}$ nach unten beschränkt. Deswegen existiert $\alpha := inf\{\langle l, a\rangle \mid a \in A\}$. Daher werden A und B von der Hyperebene $\mathcal{H} := \{\langle l, x\rangle = \alpha\}$ separiert.
Ist A nicht offen, existiert gemäß der vorangegangenen Argumentation für die offene Menge $int(A)$ eine Hyperebene $\mathcal{H} := \{\langle l, x\rangle = \alpha\}$, die $int(A)$ und $int(B)$ separiert:
$\langle l, x\rangle \leq \alpha$ für $\forall x \in int(A)$ und $\langle l, x\rangle \geq \alpha$ für $x \in int(B)$. Da $f(x) = \langle l, x\rangle$ stetig ist (als Abbildung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), folgt aus Lemma 18:
$\langle l, x\rangle \leq \alpha$ für $\forall x \in int(A)$, weshalb die Hyperebene $\mathcal{H} := \{\langle l, x\rangle = \alpha\}$ auch A und B separiert, $\square$