Neues Thema: Konvexe Geometrie

Konvexität ist ein Begriff, der in verschiedenen Zusammenhängen eine Rolle spielt und sich als nützlich erwiesen hat.

Wir werden im n-dimensionalen reellen affinen Raum arbeiten; nach Hauptsatz der affiner Geometrie kann man annehmen, dass wir in $\mathbb{R}^n$ (über $(\mathbb{R}^n, +, \bullet)$) arbeiten.
In dem Fall gilt

$$\vec{xy} = \underbrace{y - x}_{\text{als Elemente von } (\mathbb{R}^n, +, \bullet)} .$$

Manchmal werden wir auch annehmen, dass der Vektorraum $(\mathbb{R}^n, +, \bullet)$ Euklidisch ist, d.h., wir auf $(\mathbb{R}^n, +, \bullet)$ ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ gewählt haben.

Affine Hülle

Wiederholung. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine lineare Kombination der Vektoren $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, wenn es Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ gibt mit $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$.

Def. 21 Gibt es solche Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, so ist der Punkt x eine affine Kombination der Punkte $x_1, \ldots, x_k$..

Bemerkung. Dies ist äquivalent zu „$\overrightarrow{x_1 x}$ ist lineare Kombination der Vektoren $\overrightarrow{x_1 x_2} = x_2 - x_1, \overrightarrow{x_1 x_3} = x_3 - x_1, \ldots, \overrightarrow{x_1 x_k} = x_k - x_1$.“
Tatsächlich, in diesem Fall ist $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \ldots - \lambda_k$, und

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k \\ &= x_1 + (-\lambda_2 - \ldots - \lambda_k) x_1 + \lambda_2 x_2 \ldots + \lambda_k x_k \\ &= x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) + \lambda_3(x_3 - x_1) + \ldots + \lambda_k(x_k - x_1) \end{aligned}$$

Wiederholung. Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die lineare Hülle $Span(A)$ die Menge aller linearen Kombinationen von Elementen von A. $Span(A)$ ist zugleich der kleinste lineare Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, der A enthält, und die Schnittmenge von allen linearen Untervektorräumen von $\mathbb{R}^n$, die A enthalten.

Def. 22 Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die affine Hülle $aff(A)$ die Menge aller affinen Kombinationen von Elementen von A.

Lemma 14 $\mathit{aff}(A)$ ist der kleinste affine Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der A enthält (d.h., gilt $A \subseteq \mathcal{U}$ für einen affinen Unterraum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, so gilt $\mathit{aff}(A) \subseteq \mathcal{U}$).

Bemerkung. Daraus folgt insbesondere, dass der kleinste affine Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der A enthält, existiert. Sie haben es auch in Hausaufgabe 2 bewiesen: Man nehme Schnitt aller affinen Räumen, die A enthalten. Wie in Lemma 7 kann man beweisen, dass der Schnitt ein affiner Raum ist; nach Konstruktion enthält er alle Punkte von A, und ist in jedem affinen Raum, der A enthält, enthalten.

Lemma 14 *aff*(A) ist der kleinste affine Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der A enthält (d.h., gilt $A \subseteq \mathcal{U}$ für einen affinen Unterraum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, so gilt *aff*$(A) \subseteq \mathcal{U}$).

Beweis. Z.z.: (i) *aff*$(A) \subseteq \mathcal{U}$ und (ii) *aff*(A) ist ein affiner Raum.
(i): Liegt $x \in$ *aff*(A), so ist $\overrightarrow{x_1 x}$ nach Bemerkung nach der Def. 21 lineare Kombination der Vektoren
$\overrightarrow{x_1 x_2} = x_2 - x_1, \overrightarrow{x_1 x_3} = x_3 - x_1, \ldots, \overrightarrow{x_k x_1} = x_k - x_1$. Da diese Vektoren in $V_{\mathcal{U}}$ liegen, liegt auch deren Linearkombination in $V_{\mathcal{U}}$, folglich auch $x_1 + \overrightarrow{x_1 x} = x$ in $\mathcal{U}$.

Lemma 14 *aff*(A) ist der kleinste affine Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der A enthält (d.h., gilt $A \subseteq \mathcal{U}$ für einen affinen Unterraum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, so gilt *aff*$(A) \subseteq \mathcal{U}$).

Beweis von (ii): *aff*(A) ist ein affiner Raum.

Wir zeigen, dass *aff*(A) affine abgeschlossen ist; dann muß es nach Satz 21 ein affiner Raum sein.
Angenommen $x, y \in aff(A)$. Dann sind $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$ und $y = \mu_1 x_1 + \ldots + \mu_k x_k$ für irgendwelche $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, $\mu_1 + \ldots + \mu_k = 1$. Wir betrachten die Gerade

$\mathcal{G}x, y = \{x + t \cdot \vec{xy} \mid t \in \mathbb{R}\}$
$= \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k + t \cdot ((\mu_1 - \lambda_1)x_1 + \ldots + (\mu_k - \lambda_k)x_k) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Wir sehen, das jeder Punkt der Geraden das Aussehen

$$\underbrace{(\lambda_1 + t \cdot (\mu_1 - \lambda_1))}_{\eta_1} x_1 + \ldots + \underbrace{(\lambda_k + t \cdot (\mu_k - \lambda_k))}_{\eta_k} x_k$$

hat. Da $\sum \lambda_i = \sum \mu_i (= 1)$ ist, gilt $\sum \eta_i = \sum \lambda_i = 1$, und deswegen liegt jeder Punkt der Geraden in *aff*(A). Dann ist *aff*(A) affin abgeschlossen, $\square$

Affin-unabhängige Punktenmenge

Def. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt affin abhängig, falls es $k \in \mathbb{N}$ und $x_0, x_1, ..., x_k \in A$ sodass $\{\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_0x_1}, ..., \overrightarrow{x_0x_k}\}$ linear unabhängig ist.

Nach Bemerkung nach Def. 21 die Menge ist genau dann affin abhänging, wenn es Zahlen $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ und die Punkte $x_1, ..., x_k \in A$ gibt, so dass $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \vec{0}$ und $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ gilt.

Anzahl von Elemente in einer affin unabhängigen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist gleich $dim(aff(A)) + 1$ und ist höchstens $n + 1$.

Konvexe Mengen

Def. 23 Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn sie mit je zwei Punkten x, y auch stets deren Verbindungsstrecke $\{x + t \cdot \overrightarrow{xy} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ enthält.

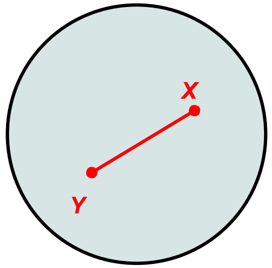
Bemerkung. Da $\overrightarrow{xy} = y - x$, gilt $x + t \cdot \overrightarrow{xy} = (1-t)x + ty$.
Die Menge A ist also genau dann konvex, wenn

$$\forall x, y \in A \quad \forall t \in [0,1] \text{ gilt } (1-t)x + ty \in A.$$

Bsp. Jeder Punkt, jede Strecke, jeder affine Unterraum ist eine konvexe Menge.

Bemerkung. $\varnothing$ ist auch eine konvexe Menge.

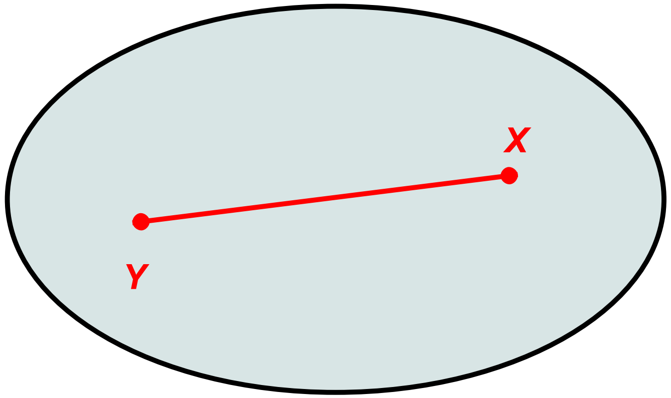
Bsp. Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf $(\mathbb{R}^n, +, \bullet)$. Dann ist der Ball vom Radius $r \geq 0$ um x_0 $\quad B(r, x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq r\}$ eine konvexe Menge.



Beweis. OBdA ist $x_0 = \vec{0}$. Seien $x, y \in B(\vec{0}, r)$. Dann ist $|x|^2 := \langle x, x\rangle \leq r^2$, $|y|^2 := \langle y, y\rangle \leq r^2$. Sei $t \in [0, 1]$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|(1-t)x + ty|^2 &= \langle (1-t)x + ty, (1-t)x + ty\rangle \\
&= (1-t)^2|x|^2 + 2\underbrace{t(1-t)}_{\geq 0}\underbrace{\langle x, y\rangle}_{\substack{\leq |x||y| \\ \text{Lem. 37} \\ \text{Vorl. 23} \\ \text{LAAG I}}} + t^2|y|^2 \\
&\leq (1-t)^2|x|^2 + 2t(1-t)|x||y| + t^2|y|^2 \\
&= ((1-t)\underbrace{|x|}_{\leq r} + t\underbrace{|y|}_{\leq r})^2 \leq r^2.
\end{aligned}$$

Eigenschaft, „konvexe Menge zu sein“, ist eine affine Eigenschaft (weil Eigenschaft, „Strecke zu sein“, ist eine affine Eigenschaft). Deswegen ist Bild jedes Balls unter einem affinen Isomorphismu, also innere Punkte eines Ellipsoids, auch eine Konvexe Menge.



Lemma 15. Der Durchschnitt beliebig (auch unendlich) vieler konvexer Mengen ist konvex.

Beweis. Liegt die Strecke die x und y verbindet, in jeder Menge, so liegt sie auch im Durchschnitt, $\square$

Konvexe Hülle (von $A \subseteq \mathbb{R}^n$)

Def. 24(a) Die konvexe Hülle von A ist die Menge $conv(A) := \{\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k \mid \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1\ , \lambda_i \geq 0, x_i \in A\}$.

(Der Punkt $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k$, wobei $\sum_i \lambda_i = 1\ ,\ \lambda_i \geq 0$ heißt konvexe Kombination. Konvexe Hülle von A ist die Menge aller konvexen Kombinationen der Elemente von A.)

Def. 24(b) Die konvexe Hülle von A ist die kleinste konvexe Menge $conv(A)$, die A enthält. (d.h., gilt $A \subseteq C$ für eine konvexe Menge C, so gilt $conv(A) \subseteq C$)

Def. 24(c) Die konvexe Hülle von A ist der Durchschnitt von allen konvexen Mengen, die A enthalten:

$$conv(A) = \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ C \text{ ist konvex}}} C.$$

Satz 23. Die Definitionen 24(a), (b), (c) sind äquivalent: ist eine Menge konvexe Hülle nach einer Definition, so ist sie auch die konvexe Hülle nach andere Definition.

Schema des Beweises: Zuerst $(c) \iff (b)$ und dann $(a) \iff (b)$.

$(c) \Longleftrightarrow (b)$

Sei $conv_{(c)}(A)$ die konvexe Hülle in Sinne der Definition 24 (c), d.h., der Durchschnitt von allen konvexen Mengen, die A enthalten. Da liegt sie in jeder konvexen Menge C, die A enthält.

$(a) \iff (b)$

Lemma 16. Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$, für alle $x_1, ..., x_k \in A$ und für alle $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ gilt:

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k \in A \qquad (*)$$

Beweis $\Longleftarrow$: Angenommen die Punkte $x_1, x_2 \in A$. Wir nehmen $k = 2$ und $\lambda_1 = (1 - t)$, $\lambda_2 = t$. Dann sind (für $t \in [0, 1]$) $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ genau die Punkte der Strecke, die x_1 und x_2 verbindet. Falls $(*)$ erfüllt ist, liegen sie in A, und die Menge ist konvex.

Lemma 16. Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann konvex, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$, für alle $x_1, ..., x_k \in A$ und für alle $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ gilt:

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k \in A \qquad (*)$$

Beweis $\Longrightarrow$: Angenommen A ist konvex.
Zuert bemerken wir, dass $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k$ genau der Schwerpunkt von Punkte $x_1, ..., x_k$ mit Massen $\lambda_1, ..., \lambda_k$ ist (weil $\sum_i \lambda_i = 1$). Falls wir alle Massen mit einer Konstante multiplizieren, ändern wir den Schwerpunkt nicht, weil diese Konstante in der Formel

$$S := \vec{0} + \sum_i \frac{m_i}{\sum_j m_j} x_i$$

in Zähler und in Nenner erschient. Also, wir müssen beweisen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle Massen $m_1, ..., m_k$ der Schwerpunkt von $x_1, ..., x_k \in A$ mit Massen $m_1, ..., m_k$ wieder in A liegt.
Induktion nach k. Induktionsanfang für $k = 2$ ist offensichtlich: in dem Fall fällt die Verbindungsstrecke xy mit der Menge $\{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$ zusammen.

Induktionsschritt $k-1 \mapsto k$. Es seien $x_1, ..., x_k \in A$ und $m_1, ..., m_k \geq 0$ mit $k > 2$, $m_i \geq 0$, $\sum_i m_i > 0$.
Sei S Schwerpunkt von $\{x_1, ..., x_{k-1}\}$ mit Massen $m_1, ..., m_{k-1}$. Nach Induktionsvorausetzung ist $S \in A$.
Nach Lemma 13 ist Schwerpunkt von $\{x_1, ..., x_k\}$ (mit Massen $m_1, ..., m_k$) der Schwerpunkt von $S \in A$, $x_k \in A$ mit Massen jeweils $m_1 + ... + m_{k-1}$ und m_k.
Nach Induktionsvoraussetzung liegt Schwerpunkt dann in A, $\square$

$(a) \iff (b)$

Nach Definition 24(b) ist $conv_{(b)}(A)$ konvex. Dann liegen nach Lemma 16 alle Punkte der Form $\sum_i \lambda_i x_i$ (wobei $\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1,\ x_i \in A$) in $conv_{(b)}(A)$. Also $conv_{(a)}(A) \subseteq conv_{(b)}(A)$. Also, bleibt uns nur zu zeigen, dass $conv_{(a)}(A)$ konvex ist.
Angenommen die Punkte x und y sind konvexe Kombinationen von Punkten $x_1, ..., x_k \in A$ (OBdA können wir denken, dass die Punkte in der Linearkombination für $x$und y gleich sind, weil wir die fehlende mit Koeffizient $\lambda = 0$ nehmen können.)

$$x = \sum_i \lambda_i x_i \quad y = \sum_i \mu_i x_i.$$

Dann besteht die Verbindungsstrecke xy aus der Punkten der Form (wobei $t \in [0,1]$) $(1-t)\sum_i \lambda_i x_i + t \sum_i \mu_i x_i = \sum_i \underbrace{((1-t)\lambda_i + t\mu_i)}_{\eta_i} x_i$.

Die Koeffizienten η_i erfüllen $\eta_i \geq 0$ und $\sum_i \eta_i = \sum_i ((1-t)\lambda_i + t\mu_i) = (1-t) + t = 1$. Deswegen liegt nach Lemma 16 jeder Punkt die Verbindungsstrecke xy in A, $\square$

Satz 24 (von Carathéodory). Ist $A \in \mathbb{R}^n$ und $x \in conv(A)$, so ist x konvexe Kombination von affin unabhängigen Punkten von A. Insbesondere ist x konvexe Kombination von $n+1$ oder weniger Punkten von A.

Beweis. Der Punkt $x \in conv(A)$ hat nach Satz 23 eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ mit $x_i \in A$, $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, mit einem $k \in \mathbb{N}$, und wir können ODdA annehmen, dass hierbei k minimal gewählt ist. Angenommen, $x_1, ..., x_k$ wären affin abhängig. Dann gibt es Zahlen $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$, die nicht alle Null sind, so dass $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \vec{0}$ und $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ gilt. Wir können eine Zahl m wählen derart, dass $\frac{\lambda_m}{\alpha_m}$ positiv und dabei so klein wie möglich ist (denn alle λ_i sind positiv, und wenigstens ein α_i ist positiv). In der affinen Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \alpha_i \right) x_i$$

sind alle Koeffizienten nichtnegativ (trivialerweise, wenn $\alpha_i \leq 0$ ist, und andernfalls wegen der Wahl von m), und wenigstens ein Koeffizient ist Null. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von k. Also sind $x_1, ..., x_k$ affin unabhängig, woraus insbesondere $k \leq n+1$ folgt.

Def. 25 Die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten wird als Polytop bezeichnet. Ein k-Simplex ist die konvexe Hülle von $k+1$ affin unabhängigen Punkten, und diese Punkte heißen dann die Ecken des Simplex.

Man kann den Satz von Carathéodory also auch so formulieren, dass $conv(A)$ die Vereinigung aller Simplizes mit Ecken in A ist.

Satz 25 (von Radon). Jede nichtleere Menge von affin abhängigen Punkten (insbesondere also jede Menge von mindestens $n+2$ Punkten) im $\mathbb{R}^n$ kann zerlegt werden in zwei Mengen, deren konvexe Hüllen nichtleeren Durchschnitt haben.

Beweis. Seien $x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}^n$ affin abhängig. Dann gibt es Zahlen $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$, die nicht alle Null sind, so dass

$$\sum_i \alpha_i = 0 \quad \text{und} \qquad \sum_i \alpha_i x_i = \vec{0}$$

gilt. Nach eventueller Umnumerierung können wir annehmen, dass $\alpha_i > 0$ genau für $i = 1, ..., j$ gilt; dann ist $1 \leq j < k$ (denn wenigstens ein α_i ist > 0, aber nicht alle α_i sind > 0). Mit $\alpha := \alpha_1 + ... + \alpha_j = -(\alpha_{j+1} + ... + \alpha_k) > 0$ gilt

$$x := \sum_{i=1}^{j} \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i = \sum_{i=j+1}^{k} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha}\right) x_i$$

und daher $x \in conv(\{x_1, ..., x_j\}) \cup conv(\{x_{j+1}, ..., x_k\})$. Daraus folgt die Behauptung.