Organisatorisches

- Probeklausur findet (voraussichtig) am 16.06 von 8–10 Uhr in in HS1, HS4 Abbeanum statt.
- Alle sind zugelassen; keine Anmeldung. Die Teilnahme ist freiwillig. Bis zum 20% von Hausaufgabenpukte. Die Erfahrung von letzten Jahren zeigt, dass es sich lohnt, teilzunehmen.
- Etwa 5 Aufgeben; davon 3 theoretische; eine davon wird bestehen, einen wichtigen Satz aus der Vorlesung zu beweisen (die Liste von „wichtigen Sätze“ wird eine Woche vor der Klausur bekannt gegeben.)
- Keine Hilfsmittel zugelassen; Papier wird gegeben.
- Am Dienstag 17.06 werden die Lösungen besprochen.
- Sie bekommen Ihre Lösungen wieder, nachdem wir sie korrigieren.

Ziel: Fundamentalsatz der reellen affinen Geometrie

Satz 22 (Fundamentalsatz der affinen Geometrie (über $\mathbb{R}$)) Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$ affine Räume über den $\mathbb{R}$-Vektorräumen V, V_0. Sei $dim(\mathcal{A}) \geq 2$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_0$ eine Bijektion, die Geraden auf Geraden abbildet. Dann ist F eine Affinität.

Um den Fundamentalsatz 22 zu beweisen, wählen wir einen festen Punkt $a_0 \in \mathcal{A}$, setzen $a_0' := F(a_0) \in \mathcal{A}_0$, und definieren $G : V \to V_0$ durch: Für alle $v \in V$ gelte

$$F(a_0 + v) = a_0' + G(v)$$

(oder, was dasselbe ist:

$$G(\overrightarrow{a_0 a}) := \overrightarrow{a_0' F(a)}).$$

Ziel: Wir werden beweisen, dass G eine lineare Abbildung ist; d.h., dass $G(v + w) = G(v) + G(w)$. Den Fall v und w sind linear unabhängig haben wir gestern gemacht (HilfsLemma 3), und $v = \lambda w$ (HilfsLemma 4).

und $G(\lambda v) = \lambda G(v)$.
Dann wird F eine affine Abbildung nach Def. 13

HilfsLemma 4. Für alle $v \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt: $G(\lambda v) + G(\mu v) = G((\lambda + \mu)v)$.

Beweis. Wegen Injektivität von F gilt $G(\vec{0}) = \vec{0}$; deswegen genügt es, die Fälle zu betrachten, in denen $v \neq \vec{0}$, $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ gilt. Aufgrund unserer Voraussetzung $dim(\mathcal{A}) \geq 2$ existiert ein zu v linear unabhängiger Vektor $w \in V$.

1. Fall: $\lambda + \mu \neq 0$

Dann sind w und $(\lambda+\mu)v$ linear unabhängig und HilfsLemma 3 impliziert

$$G(w + (\lambda+\mu)v) = G(w) + G((\lambda+\mu)v).$$

Da $w+\lambda v$ und μv linear unabhängig sind, gilt nach HilfsLemma 3

$$G(w+(\lambda+\mu)v) = G(w+\lambda v) + G(\mu v) \overset{\text{analog}}{=} G(w) + G(\lambda v) + G(\mu v).$$

Dann gilt

$$G(w) + G((\lambda+\mu)v) = G(w) + G(\lambda v) + G(\mu v).$$

Die letzte Gleichung impliziert die Gleichung
$G(\lambda v) + G(\mu v) = G((\lambda+\mu)v)$.

Bemerkung. Wir haben Voraussetzung $dim(\mathcal{A}) \geq 2$ benutzt. Ohne diese Voraussetzung ist der Satz falsch – Hausaufgabe.

2. Fall: $\lambda = -\mu$

Da $\lambda v + w$ und $-\lambda v + w$ linear unabhängig sind, folgt aus HilfsLemma 3

$$\begin{aligned} G(2w) = G((\lambda v + w) + (-\lambda v + w)) &= G(\lambda v + w) + G(-\lambda v + w) \\ &= G(\lambda v) + G(w) + G(-\lambda v) + G(w) \\ &= 2G(w) + G(\lambda v) + G(-\lambda v). \end{aligned}$$

Nach dem 1. Fall für $\lambda = \mu := 1$ gilt $G(2w) = 2G(w)$; daraus folgt die Behauptung $G(\lambda v) + G(-\lambda v) = 0$.

Ziel: $G(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot G(v)$

HilfsLemma 5. Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $G(\lambda v) = f(\lambda)G(v)$.

Beweis. Wegen $G(\vec{0}) = \vec{0}$ ist die Gleichung für $v = \vec{0}$ stets erfüllt, und sie ist für $\lambda = 0$ und alle $v \in V$ erfüllt, wenn wir $f(0) = 0$ setzen. Wir werden von jetzt $v \neq \vec{0}$ und $\lambda \neq 0$ annehmen.

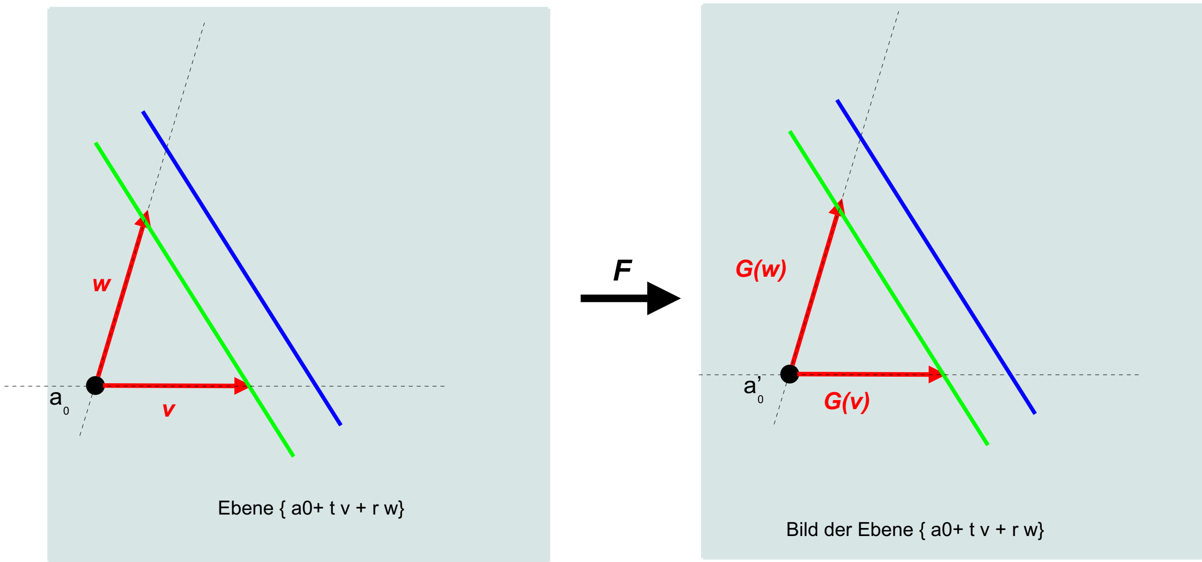
Da F injektiv ist, gilt $F(a_0 + v) = a_0' + G(v) \neq a_0'$. Nach Voraussetzungen liegt $F(a_0 + \lambda v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ auf der Geraden $\mathcal{G}_{a_0', a_0' + G(v)}$. Also existiert (genau ein) $f(\lambda, v) \in \mathbb{R}$, so daß $F(a_0 + \lambda v) = a_0' + f(\lambda, v)G(v)$ gilt.

Wir bemerken, daß $TV(a_0', F(a_0 + \lambda v), F(a_0 + v)) = \frac{1}{f(\lambda, v)}$ gilt. Um HilfsLemma 5 zu beweisen, müssen wir zeigen, daß $f(\lambda, v)$ unabhängig von v ist, d.h., daß für alle $\lambda \neq 0, v \neq \vec{0}, w \neq \vec{0}$ gilt:

$$f(\lambda, v) = f(\lambda, w).$$

1. Fall: v und w sind linear unabhängig.

Dann betrachten wir die Geraden $\mathcal{H} := \{a_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{J} := \{a_0 + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$ durch a_0



und die Geraden $\mathcal{G}_1 := \mathcal{G}_{a_0+v,a_0+w}$, $\mathcal{G}_2 := \mathcal{G}_{a_0+\lambda v,a_0+\lambda w}$, die nach Strahlensatz 20 parallel sind. Nach HilfsLemma 2 sind dann $Bild_F(\mathcal{G}_1)$ und $Bild_F(\mathcal{G}_2)$ auch parallel. Die andere Richtung des Stralensatzes impliziert nun, dass

$$TV(a_0', F(a_0 + \lambda v), F(a_0 + v)) = TV(a_0', F(a_0 + \lambda w), F(a_0 + w))$$

gilt. Daraus folgt $\frac{1}{1f(\lambda,v)} = \frac{1}{f(\lambda,w)}$. Dann gitl $f(\lambda, v) = f(\lambda, w)$.

2. Fall: $w = \mu v$.

In dem Fall wählen wir ein von v linear unabhängiges $z \in V$. Dann gilt mit zweitfaches Anwendung des 1. Falls:
$f(\lambda, v) = f(\lambda, z) = f(\lambda, w)$.

HilfsLemma 5 ist bewiesen.

Folgerung. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein Körperautomorphismus, d.h., es gilt

(i) $f(1) = 1$, und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(ii) $f(\lambda) + f(\mu) = f(\lambda + \mu)$,

(iii) $f(\lambda \cdot \mu) = f(\lambda) \cdot f(\mu)$.

Beweis. Wähle $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$. Da F injektiv ist, folgt
$G(v) = \overrightarrow{F(a_0)F(a_0 + v)} \neq 0$.

(i) $G(v) = G(1 \cdot v) = f(1) \cdot G(v) \Longrightarrow (f(1) - 1)G(v) = \vec{0} \Longrightarrow f(1) = 1.$

(ii) $G((\lambda + \mu)v) = f(\lambda + \mu)G(v)$
$G((\lambda + \mu)v) = G(\lambda v + \mu v) \overset{HL\ 4}{=} G(\lambda v) + G(\mu v) = (f(\lambda) + f(\mu))G(v).$
Diese Gleichungen beweisen $f(\lambda + \mu) = f(\lambda) + f(\mu)$.

(iii) $G((\lambda\mu)v) = f(\lambda\mu)G(v)$
$G((\lambda\mu)v) = G(\lambda(\mu v)) = f(\lambda)G(\mu v) = f(\lambda)f(\mu)G(v).$
Diese Gleichungen beweisen $f(\lambda \cdot \mu) = f(\lambda) \cdot f(\mu)$, $\square$

Bemerkung. Nach dem Beweis von Satz 22 werden wir die Definition von Körperautomorphismus nochmal ansehen.

Bisher wurde noch nicht benutzt, daß $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$ reelle affine Räume sind. (Wir haben nur benutzt, dass $1 + 1 \neq 2$ ist, weil wir den Satz 21 benutzt haben.)
Das folgende Lemma aber wäre etwa für den Körper $\mathbb{C}$ (statt $\mathbb{R}$) nicht wahr – sieh Hausaufgabe 1.

Lemma 11. Die Identität $f = Id$ ist der einzige Körperautomorphismus von $\mathbb{R}$.

Lemma 11. Die Identität $f = Id$ ist der einzige Körperautomorphismus von $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Körperautomorphismus. Die Additivität von f und $f(1) = 1$ zeigen, daß $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$ und – induktiv – daß $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aus
$f(0) + f(0) = f(0+0) = f(0)$ folgt $f(0) = 0$ und aus
$f(n + (-n)) = 0 = f(n) + f(-n) = n + f(-n)$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Ist $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so gilt

$$1 = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = f(n) f\left(\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Longrightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Verwenden wir nochmals die Multiplikativität von f, so erhalten wir
$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Q}$. Weiter gilt $Bild_f(\mathbb{R}_{\geq 0}) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, denn aus
$r \geq 0$ folgt $f(r) = f(\sqrt{r}^2) = f(\sqrt{r})^2 \geq 0$.
Zusammen mit der Additivität von f ergibt das $r \geq s \Longrightarrow f(r) \geq f(s)$, d.h. f ist monoton wachsend. Ist schließlich $r \in \mathbb{R}$ beliebig, so wählen wir $x_i, y_i \in \mathbb{Q}$ mit $\lim x_i = r = \lim y_i$ und $x_i < r < y_i$. Dann $f(r) = r$ aus
$x_i = f(x_i) \leq f(r) \leq f(y_i) = y_i$ und $\lim x_i = r = \lim y_i$, $\square$

Zusammenfassung des Beweises des Satzes 22

Satz 22 Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$ affine Räume über den $\mathbb{R}$-Vektorräumen V, V_0. Sei $dim(\mathcal{A}) \geq 2$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_0$ eine Bijektion, die Geraden auf Geraden abbildet. Dann ist F eine Affinität.

Wir wählen einen festen Punkt $a_0 \in \mathcal{A}$, setzen $a_0' := F(a_0) \in \mathcal{A}_0$, und definieren $G : V \to V_0$ durch: Für alle $v \in V$ gelte

$$F(a_0 + v) = a_0' + G(v)$$

Wir zeigen, dass G eine lineare Abbildung ist:
HL 3,4: $G(v + w) = G(v) + G(w)$.
HL 5: $G(\lambda v) = f(\lambda)G(v)$, wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Körperautomorphismus ist.
Lemma 11: f ist identität (d.h., $G(\lambda v) = \lambda G(v)$.)
Dann ist G linear, und deswegen F ein Affinität.

Körperautomorphismus $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

In der Folgerung aus HilfsLemma 5 haben wir einen Körperautomorphismus durch die folgende Bedienungen definiert:

(i) $f(1) = 1$, und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(ii) $f(\lambda) + f(\mu) = f(\lambda + \mu)$,

(iii) $f(\lambda \cdot \mu) = f(\lambda) \cdot f(\mu)$.

Wir zeigen, dass jedes f mit diesen Eigenschaften ein Körperisomorphismus auf dem Bild von f ist: nach Definition (sieh Vorl. 1) ist f ein Körperisomorphismus , falls $f : \mathbb{K} \to Bild_f(\mathbb{K})$ bijektiv ist, und Verknüpfungen erhält: $f(\lambda) + f(\mu) = f(\lambda + \mu)$, $f(\lambda \cdot \mu) = f(\lambda) \cdot f(\mu)$.

Also, um zu zeigen dass Körperautomorphismus ein Körpeisomorphismus ist, müssen wir nur zeigen, dass f mit Eingenschaften $(i), (ii), (iii)$ bijektiv ist (als Abbildung $f : \mathbb{K} \to Bild_f(\mathbb{K})$)

Wir zeigen zuerst, dass $f(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$.
In der Tat, sonst liefert $1 = f(1) = f(\lambda \cdot \lambda^{-1}) = \underbrace{f(\lambda)}_{=0} \cdot f(\lambda^{-1}) = 0$

ein Widerspruch.
Wir können jetzt beweisen, dass die Abbildung f bijektiv ist.
Injektivität: angenommen, $f(\lambda) = f(\mu)$. Dann ist

$0 = f(\lambda) - f(\mu) \stackrel{(ii)}{=} f(\lambda - \mu)$; dann ist $\lambda - \mu = 0$.
Subjektivität ist automatisch erfüllt, da der Bildmenge von
$f : \mathbb{K} \to Bild_f(\mathbb{K})$ das ganze $Bild_f(\mathbb{K})$ ist.

Schwerpunkt

Sei $x_1, \ldots, x_k$ die Punkte eines affinen Raums $\mathcal{A}$ über $\mathbb{R}$, und $m_1, \ldots, m_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so dass mind. ein $m_i > 0$.

Def. Der Schwerpunkt von $x_1, \ldots, x_k$ mit Massen $m_1, \ldots, m_k$ ist der Punkt $a + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{ax_i}$.

Lemma 12 Schwerpunkt hängt nicht von der Wahl von Punkt a ab.

Beweis.

$$\begin{aligned} b + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{bx_i} &= a + \overrightarrow{ab} + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{bx_i} \\ &= a + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \left(\sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{ab} + \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{bx_i} \right) \\ &= a + \sum_{i=1}^k m_i (\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bx_i}) \\ &= a + \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{ax_i}, \end{aligned}$$

Bemerkung. Eigenschaft „Schwerpunkt zu sein" ist eine affine Eigenschaft: ist $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_0$eine affine Abbildung, dann ist Schwerpunkt von $F(x_1), ..., F(x_k)$ (mit Massen $m_1, ..., m_k$) ist Bild des Schwerpunktes von $x_1, ..., x_k$ (mit denselben Massen $m_1, ..., m_k$)

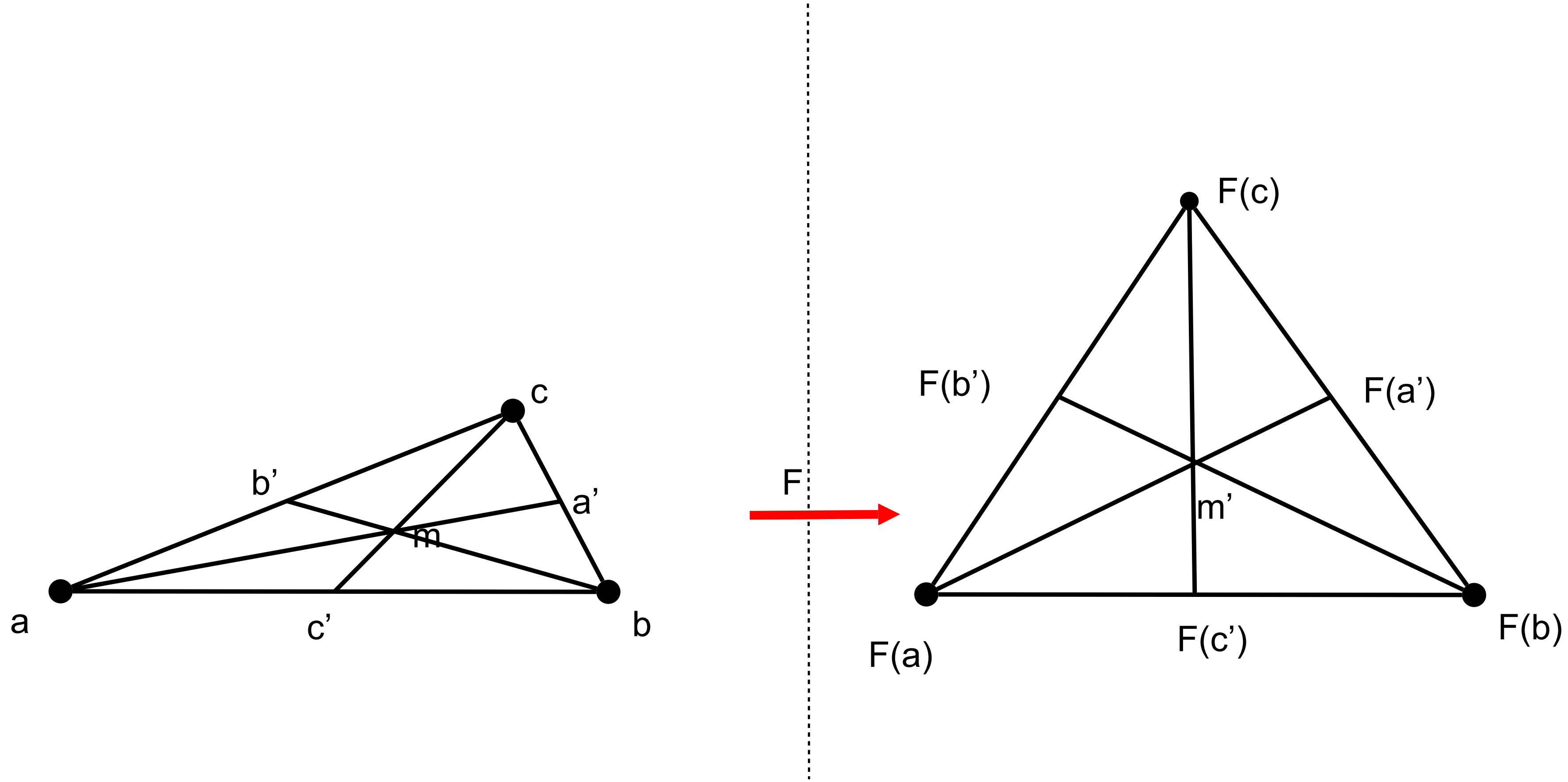
In der Tat, $F(a) + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{F(a)F(x_i)}$
$= F(a) + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i f(\overrightarrow{ax_i})$

$$= F\left(\underbrace{a + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_i} \sum_{i=1}^k m_i \overrightarrow{ax_i}}_{\text{Schwerpunkt von } x_1, ..., x_k}\right)$$

Schwerpunkt eines Dreiecks

Folgerung. Man betrachte die Punkte a, b, c einen Dreiecks mit Massen $m_a = 1,\ m_b = 1,\ m_c = 1$. Dann ist der Schwerpunkt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

Beweis. Man betrachte eine Affinität F , die die Ecke des Dreiecks abc in Ecken eines regelmäßigen Dreiecks überführt



Lemma 13. Seien $x_1, \dots, x_k$ und $y_1, \dots, y_r$ Punkte; m_{x_1}, ..., m_{x_k}, m_{y_1}, ..., m_{y_r} die Massen. Schwerpunkt von $x_1, \dots, x_k$ sei S_x; Schwerpunkt von $y_1, \dots, y_r$ sei S_y. Dann gilt: Schwerpunkt vom Paar von Punkten S_x und S_y mit Massen $\sum_{i=1}^k m_{x_i}$ und $\sum_{i=1}^r m_{y_i}$ ist gleich Schwerpunkt vom $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_r$ mit Massen m_{x_1}, ..., m_{x_k}, m_{y_1}, ..., m_{y_r}.

Beweis. Wir berechnen die beide Schwerpunkte, und stellen fest, dass sie zusammenfallen. Nach Lemma 12 können wir einen beliebigen Punkt als den Punkt a in der Formeln

$$a + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_{x_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j}} \left(\sum_{j=1}^{k} m_{x_i} \overrightarrow{ax_i} + \sum_{j=1}^{r} m_{y_j} \overrightarrow{ay_j} \right) (*)$$

wählen; wir nehmen $a = S_x$. Da S_x Schwerpunkt von $x_1, \dots, x_k$ ist, ist $S_x + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_{x_i}} \sum_{j=1}^k m_{x_i} \overrightarrow{S_x x_i} = S_x$ folglich $\sum_{j=1}^k m_{x_i} \overrightarrow{S_x x_i} = \vec{0}$.
Dann ist $(*)$ gleich

$$S_x + \frac{1}{\sum_{i=1}^k m_{x_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j}} \left(\sum_{j=1}^{r} m_{y_j} \overrightarrow{S_x y_j} \right).$$

Wenn wir Schwerpunkt von $y_1, ..., y_r$ berechnen bekommmen wir

$$S_y = S_x + \frac{1}{\sum_{j=1}^r m_{y_j}} \sum_{j=1}^r m_{y_j} \overrightarrow{S_x y_j}, \quad \text{also} \quad \overrightarrow{S_y S_x} = \frac{1}{\sum_{j=1}^r m_{y_j}} \sum_{j=1}^r m_{y_j} \overrightarrow{S_x y_j},$$

und deswegen

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^k m_{x_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j}} \left(\sum_{j=1}^r m_{y_j} \overrightarrow{S_x y_j} \right) = \frac{\sum_{j=1}^r m_{y_j}}{\sum_{i=1}^k m_{x_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j}} \overrightarrow{S_y S_x}.$$

Dann ist die Formel $(*)$ gleich

$$S_x + \frac{\sum_{i=1}^k m_{x_i}}{\sum_{i=1}^k m_{x_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j}} \vec{0} + \frac{\sum_{j=1}^r m_{y_j}}{\sum_{i=1}^k m_{x_i} + \sum_{j=1}^r m_{y_j}} \overrightarrow{S_y S_x},$$

und dies ist die Formel für den Schwerpunkt von zwei Punkte S_x, S_y mit Massen $\sum_{i=1}^k m_{x_i}$, $\sum_{j=1}^r m_{y_j}$, $\square$