Wiederholung

Affiner Raum über einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist die Menge $\mathcal{A} \neq \emptyset$ mit einer Abbildung $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$, für die gilt

(A_1) $(a + v) + w = a + \underbrace{(v + w)}_{\text{Übliche Addition von Vektoren}}$

(A_2) $\forall a_1, a_2 \in \mathcal{A} \;\; \exists! v \in V$ s.d. $a_2 = a_1 + v$ (Der Vektor v wird $\overrightarrow{a_1 a_2}$) bezeichnet.

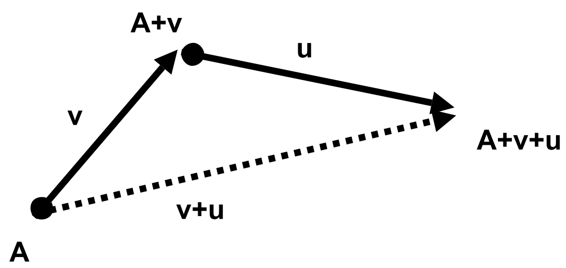


Abbildung: Motivationsbeispiel

StandardBsp. $\mathbb{K}^n$ ist ein affiner Raum über dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$.

Hauptsatz (Satz 17) Jeder $n-$dimensionale affine Raum (über einem $\mathbb{K}$- Vekttoraum) ist zum $\mathbb{K}^n$ der gleichen Dimension affin isomorph.

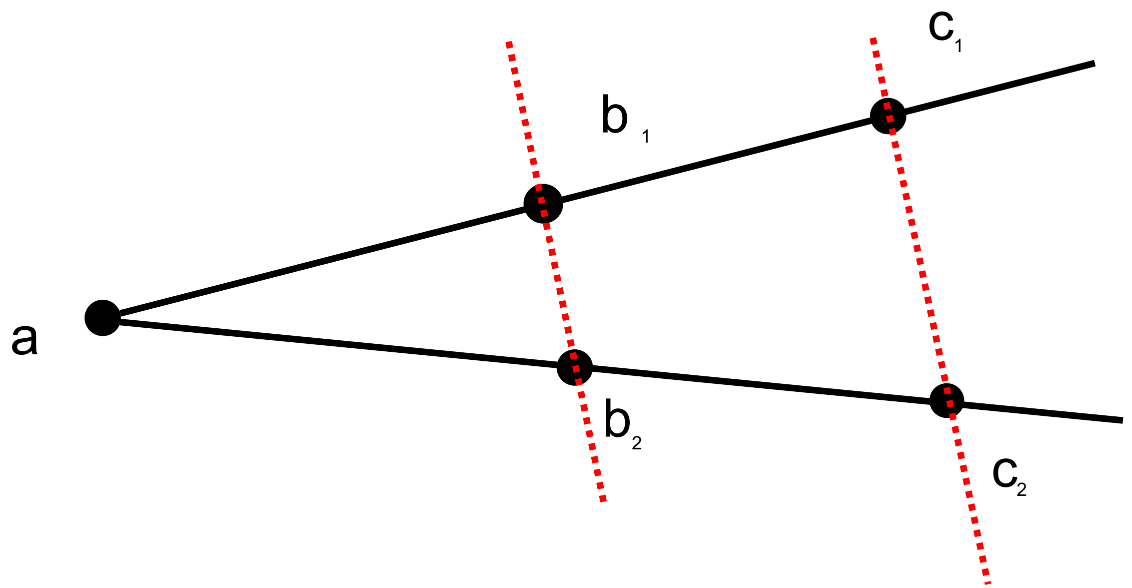
Def. 17 – Wiederholung *Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ Unterräume von $\mathcal{A}$ (man kann es über einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V definieren). Sie heißen parallel zu einem anderen, falls $V_{\mathcal{U}_1} \subseteq V_{\mathcal{U}_2}$ oder $V_{\mathcal{U}_2} \subseteq V_{\mathcal{U}_1}$.*

Lemma 10 – Wiederholung *Sei $\mathcal{A}$ ein $n-$dimensionaler affiner Raum, $\mathcal{U}$ affiner Unterraum und $\mathcal{H}$ affine Hyperebene. Gilt $\mathcal{U} \bigcap \mathcal{H} = \varnothing$, so sind $\mathcal{U}$ und $\mathcal{H}$ parallel.(Körper ist $\mathbb{K}$)*

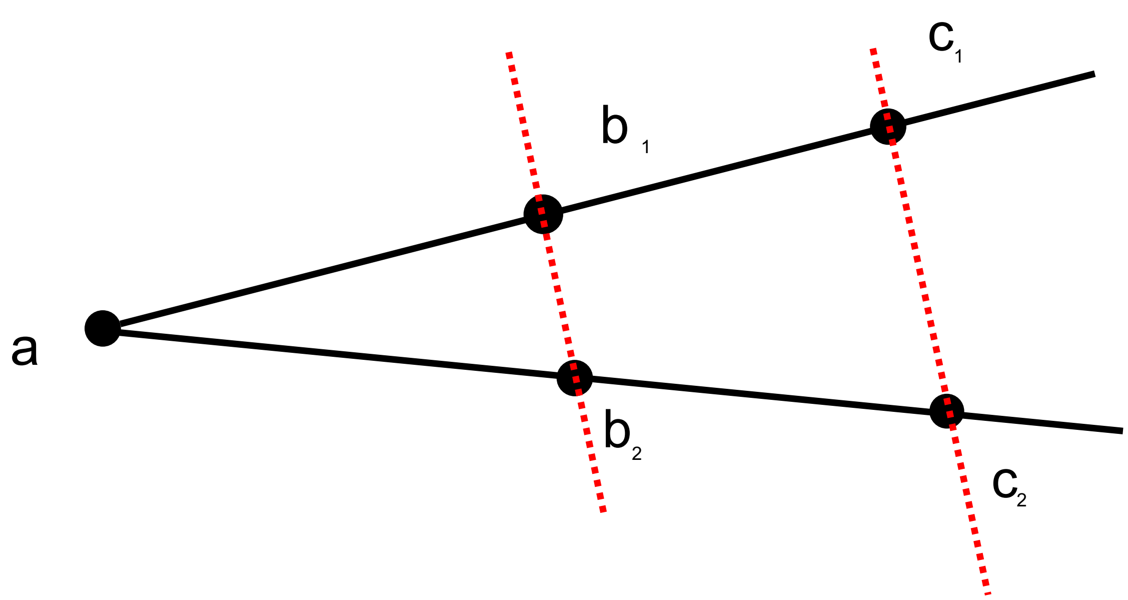
Haben zwei Geraden auf der Ebene
keine Schnittpunkte, dann sind sie parallel

Strahlensatz

Satz 20 (Strahlensatz) *Seien* (a, b_1, c_1) *und* (a, b_2, c_2) *kollineare Punktetripel auf verschiedenen Geraden durch* $a \notin \{b_1, b_2, c_1, c_2\}$. *Dann sind die Geraden* $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ *und* $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ *genau dann parallel, wenn* $TV(a, b_1, c_1) = TV(a, b_2, c_2)$.

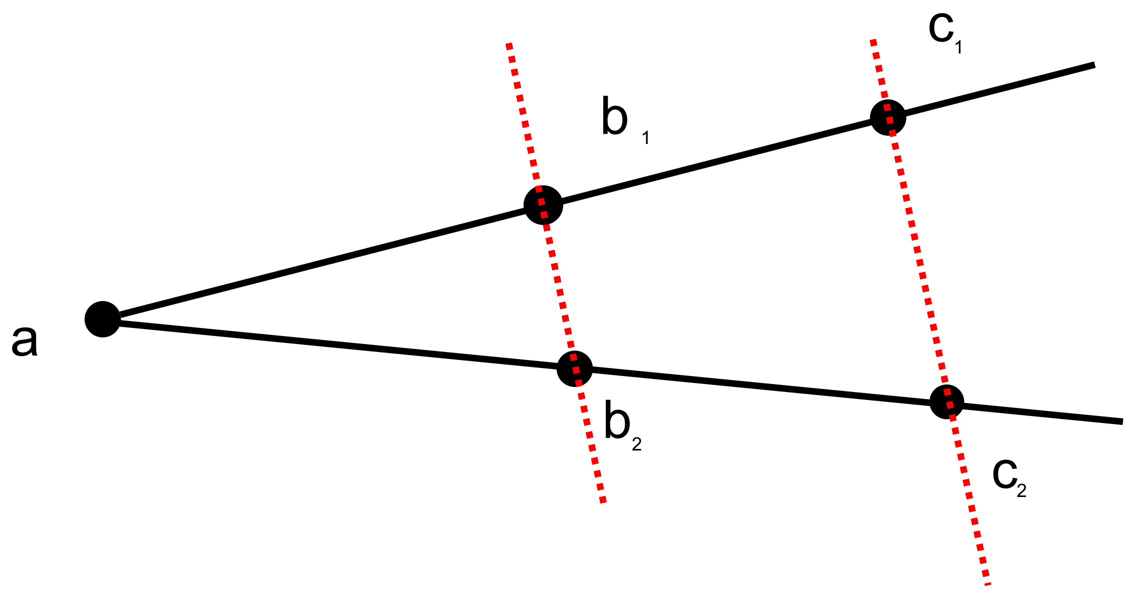


Wiederholung. Ist (a, b, c) ein kollineares Punktetripel und $a \neq b$, so heißt der durch die Gleichung $\overrightarrow{ac} = \lambda\overrightarrow{ab}$ eindeutig bestimmte Skalar λ das Teilverhältnis des kollinearen Punktetripels (a, b, c), bezeichnet durch $TV(a, b, c)$.



Beweis. Nach Def. 18 gilt $\begin{array}{lcl} TV(a,b_1,c_1)=\lambda & \Longleftrightarrow & \overrightarrow{ac_1}=\lambda\overrightarrow{ab_1} \\ TV(a,b_2,c_2)=\mu & \Longleftrightarrow & \overrightarrow{ac_2}=\mu\overrightarrow{ab_2} \end{array}$

Nach Def. 17 die Gerade $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ sind parallel g.d.w. $\overrightarrow{c_1c_2}$ und $\overrightarrow{b_1b_2}$ linear abhängig sind. Aus $\overrightarrow{ac_1}+\overrightarrow{c_1c_2}=\overrightarrow{ac_2}$ folgt $\overrightarrow{c_1c_2}=\overrightarrow{ac_2}-\overrightarrow{ac_1}=\mu\overrightarrow{ab_2}-\lambda\overrightarrow{ab_1}$ und ebenso $\overrightarrow{b_1b_2}=\overrightarrow{ab_2}-\overrightarrow{ab_1}$. Dann $\alpha\overrightarrow{c_1c_2}+\beta\overrightarrow{b_1b_2}=0 \quad\Longleftrightarrow$ $\alpha(\mu\overrightarrow{ab_2}-\lambda\overrightarrow{ab_1})+\beta(\overrightarrow{ab_2}-\overrightarrow{ab_1})=(\alpha\mu+\beta)\overrightarrow{ab_2}-(\alpha\lambda+\beta)\overrightarrow{ab_1}=0$. Da die Vektoren $\overrightarrow{ab_2}$ und $\overrightarrow{ab_1}=0$ linear unabhängig sind, ist dies äquivalent zu dem linearen Gleichungsystem $\begin{cases} \alpha\mu+\beta=0 \\ \alpha\lambda+\beta=0 \end{cases}$ auf Unbekannten α,β.



Das System $\begin{cases} \alpha\mu + \beta = 0 \\ \alpha\lambda + \beta = 0 \end{cases}$ in Matrix Form:

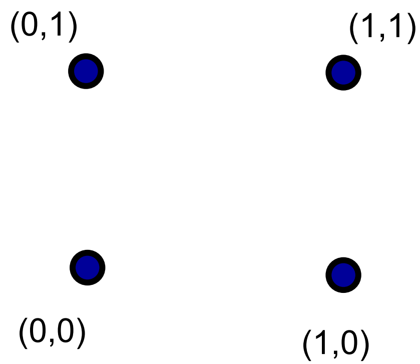
$$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Falls $\lambda \neq \mu$, ist die Matrix nichtausgeartet, weil
$det \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = (\mu - \lambda) \neq 0.$
Also, falls $\lambda \neq \mu$ ist, gibt es nur triviale Lösung, was bedeutet dass $\overrightarrow{c_1 c_2}$ und $\overrightarrow{b_1 b_2}$ linear unabhängig sind und deswegen die Geraden $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ nicht parallel sind. Falls $\lambda = \mu$ ist, dann gibt es auch nichttriviale Lösungen (nach Satz 47(a) LAAG I) z.B. $\alpha = 1$, $\beta = \mu$, und deswegen sind $\overrightarrow{c_1 c_2}$ und $\overrightarrow{b_1 b_2}$ linear abhängig, und die Gerade parallel.

Def. 19 *Sei $M \neq \varnothing$ eine Teilmenge des affinen Raums $\mathcal{A}$. Sie heißt affin abgeschlossen, falls M mit je zwei Punkte $a \neq b$ auch die Gerade $\mathcal{G}_{a,b} := \{a + \lambda\overrightarrow{ab} \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{R}\}$ durch a und b enthält.*

Bsp. Ein affiner Unterraum ist eine affin abgeschlossene Teilmenge.

Bsp. einer affin abgeschlossene Teilmenge, die keinen Unterraum ist:
Man betrachte den $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $(\mathbb{Z}_2)^2$ und einen affinen Raum über $(\mathbb{Z}_2)^2$. Nach Hauptsatz 17 können wir denken, dass der affine Raum auch $(\mathbb{Z}_2)^2$ p, wie in StandardBsp.



Nach Definition 12 bestehet die Gerade, die die Punkte a, b enthält aus aller Punkten der Form $a + \lambda\overrightarrow{ab}$. Da $\lambda \in \{0, 1\}$, besteht die ganze Gerade nur aus 2 Punkte a und b.
Deswegen ist jede Menge in $(\mathbb{Z}_2)^2$ affin abgeslossen.
Aber die Menge $(\mathbb{Z}_2)^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist kein Unterraum (weil die Punkte $(1,0), (1,1), (0,1)$ ein Koordinatensystem bilden; also jeder diesen Punkten enthaltenden Unterraum muss mit $(\mathbb{Z}_2)^2$ zusammenfallen.)

Def. 19 *Sei $M \neq \varnothing$ eine Teilmenge des affinen Raums $\mathcal{A}$. Sie heißt affin abgeschlossen, falls M mit je zwei Punkte $a \neq b$ auch die Gerade $\mathcal{G}_{a,b} := \{a + \lambda\overrightarrow{ab} \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{R}\}$ durch a und b enthält.*

Satz 21 *Angenommen, in der Körper $\mathbb{K}$ gilt: $1 + 1 \neq 0$. Dann gilt: eine affin abgeschlossene Teilmenge M des affinen Raums $\mathcal{A}$ (über $\mathbb{K}$-Vektorraum V) ist ein (affiner) Unterraum.*

Beweis. Angenommen, M ist affin abgeschlossen und $a_0 \in M$.
Z.z.: $U := \{\overrightarrow{a_0a} \text{ wobei } a \in M\}$ ein Unterraum ist. (Weil $M := \{a_0 + u \text{ wobei } u \in U\}$).

Z.z:. (i) Ist $v \in U$, so ist $\lambda v \in U$. (ii) Sind $v, w \in U$, so ist $v + w \in U$.
Wir zeigen (i). Es gilt: $\vec{0} = \overrightarrow{a_0a_0} \in U$. Sei $v \in U$, $v \neq \vec{0}$, d.h. $v = \overrightarrow{a_0a}$ für $a \in M$, $a \neq a_0$. Dann liegen alle Punkte der Geraden $\mathcal{G}_{a_0,a} := \{a_0 + \lambda\overrightarrow{a_0a} \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{R}\}$ in U, also $\lambda\overrightarrow{a_0a} \in U$.
Wir zeigen (ii). Seien $v = \overrightarrow{a_0a} \in U$, $w = \overrightarrow{a_0b} \in U$ mit $a, b \in M$. Gilt $v = w$, so folgt nach (i) $v + w = 2v \in U$. Wir können also annehmen, dass $v \neq w$ und damit $a \neq b$. Nach Voraussetzungen gilt dann $\mathcal{G}_{a,b} \subseteq M$.
Wegen $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{aa_0} + \overrightarrow{a_0b} = -\overrightarrow{a_0a} + \overrightarrow{a_0b} = w - v$ gilt dann $\mathcal{G}_{a,b} = \{a + \lambda(w - v) \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{R}\} = \{a_0 + (1 - \lambda)v + \lambda w \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Für $\lambda = \frac{1}{2}$ erhalten wir $a_0 + (1 - \frac{1}{2})v + \frac{1}{2}w = a_0 + \frac{1}{2}w$ $= a_0 + \frac{1}{2}(v + w) \in M$, also $\frac{1}{2}(v + w) \in U$. Nach (i) folgt $2 \cdot \frac{1}{2}(v + w) \in U$. $\square$

Fundamentalsatz der reellen affinen Geometrie

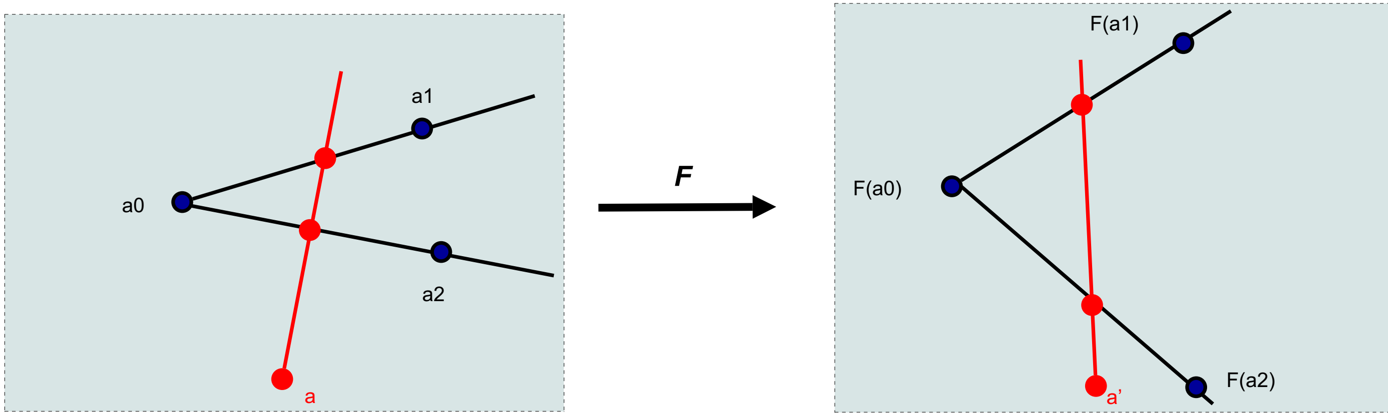
Satz 22 (Fundamentalsatz der affinen Geometrie (über $\mathbb{R}$)) Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$ affine Räume über den $\mathbb{R}$-Vektorräumen V, V_0. Sei $dim(\mathcal{A}) \geq 2$ und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_0$ eine Bijektion, die Geraden auf Geraden abbildet. Dann ist F eine Affinität.

Der nicht ganz einfache Beweis wird durch eine Reihe von Hilfslemmata (1 –5) und einem Lemma (Lemma 11), das auch für Zukunft wichtig wird, erledigt. Wir nehmen stets an, dass F wie im Satz ist, also

- bijektiv ist, und
- bildet Gerade auf Geraden ab .

HilfsLemma 1. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ eine affine Ebene. Dann ist $Bild_F(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}_0$ auch eine affine Ebene.

Beweis. Sei (a_0, a_1, a_2) ein Koordinatensystem für $\mathcal{E}$. Dann ist $\mathcal{G}_{a_0,a_1} \cap \mathcal{G}_{a_0,a_2} = \{a_0\}$.



Da F injektiv ist und $Bild_F(\mathcal{G}_{a_0,a_1}) = \mathcal{G}_{F(a_0),F(a_1)}$, $Bild_F(\mathcal{G}_{a_0,a_2}) = \mathcal{G}_{F(a_0),F(a_2)}$, folgt $\mathcal{G}_{F(a_0),F(a_1)} \cap \mathcal{G}_{F(a_0),F(a_2)} = \{F(a_0)\}$.

Deshalb existiert genau eine Ebene $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{A}_0$, die $\mathcal{G}_{F(a_0),F(a_1)}$ und $\mathcal{G}_{F(a_0),F(a_2)}$ enthält. Wir zeigen: $\mathcal{E}_0 \supseteq Bild_F(\mathcal{E}_0)$.

Ist $a \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{G}_{a_0,a_1} \cap \mathcal{G}_{a_0,a_2}$, so existiert eine Gerade $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$ mit $a \in \mathcal{G}$, die $\mathcal{G}_{a_0,a_1}$ und $\mathcal{G}_{a_0,a_2}$ schneidet.

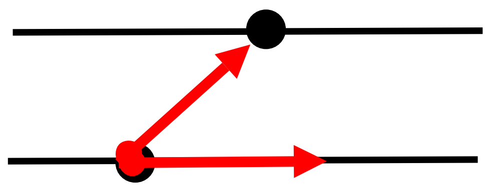
Da F Geraden auf Geraden abbildet, folgt $F(a) \in Bild_F(\mathcal{E}_0)$. Da die Gerade $Bild_F(E)$ zwei Punte der Ebene $\mathcal{E}$ enthält, liegt sie auf der Ebene; deswegen liegt der Punkt $F(a) \in \mathcal{E}_0$.

Damit haben wir $Bild_F(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}_0$ bewiesen. Da die Umkehrabbildung F^{-1} auch eine Bijektion ist, die Gerade auf Geraden abbildet, gilt $\mathcal{E}_0 \subseteq Bild_F(\mathcal{E})$. □

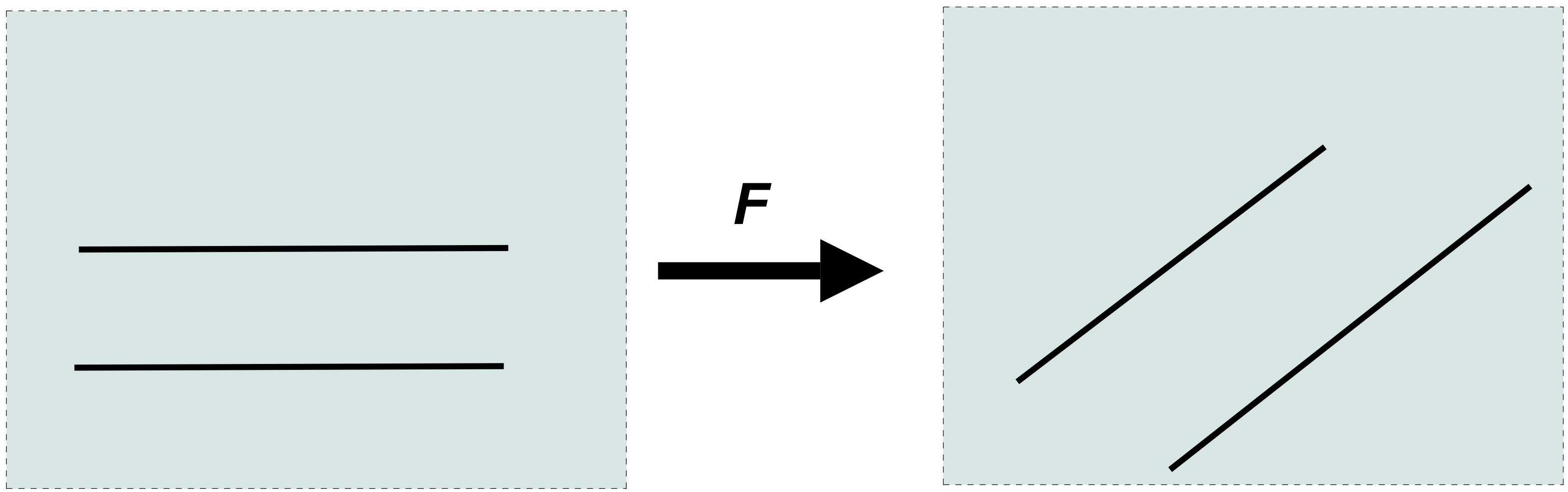
HilfsLemma 2. F bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab.

Im Beweis benutzen wir Lemma 10 : *in jeder Ebene $\mathcal{E}$ sind zwei Geraden ohne Schnittpunkte parallel.*

Beweis. Seien $\mathcal{G}_1 \neq \mathcal{G}_2$ parallele Geraden in $\mathcal{A}$. Dann existiert eine Ebene $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ mit $\mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{E}$.



Nach HilfsLemma 1 ist dann $Bild_F(\mathcal{E})$ auch eine Ebene $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{A}_0$. Da F Gerade auf Geraden überführt, sind die Bilden von $\mathcal{G}_i$ Geraden in $\mathcal{E}_0$.



Da F bijektiv und deswegen injektiv ist, haben sie keine Schnittpunkte und sind deswegen nach Lemma 10 parallel,

Plan des Beweises des Satzes 22

Um den Fundamentalsatz 22 zu beweisen, wählen wir einen festen Punkt $a_0 \in \mathcal{A}$, setzen $a_0' := F(a_0) \in \mathcal{A}_0$, und definieren $G : V \to V_0$ durch: Für alle $v \in V$ gelte

$$F(a_0 + v) = a_0' + G(v)$$

(oder, was dasselbe ist:

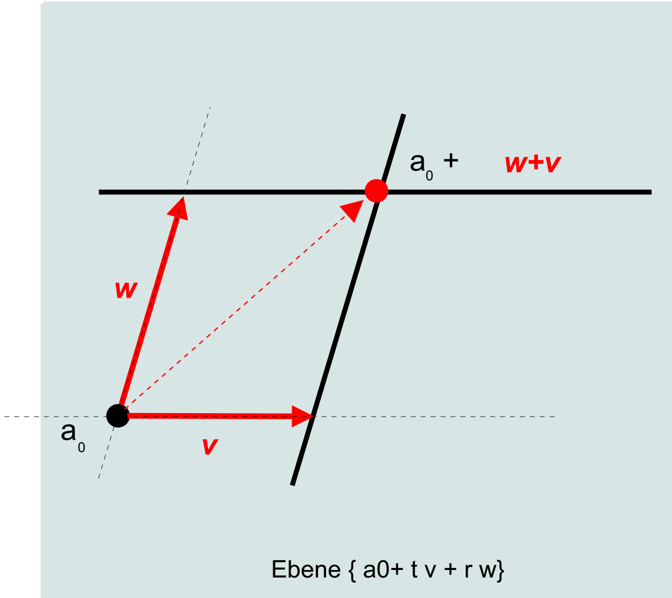
$$G(\overrightarrow{a_0 a}) := \overrightarrow{a_0' F(a)}).$$

Ziel: Wir werden beweisen, dass G eine lineare Abbildung ist; d.h., dass $G(v + w) = G(v) + G(w)$ Wir werden zwei Fälle betrachten: v und w sind linear unabhängig (Hilfslemma 3), und $v = \lambda w$ (HilfslLemma 4).

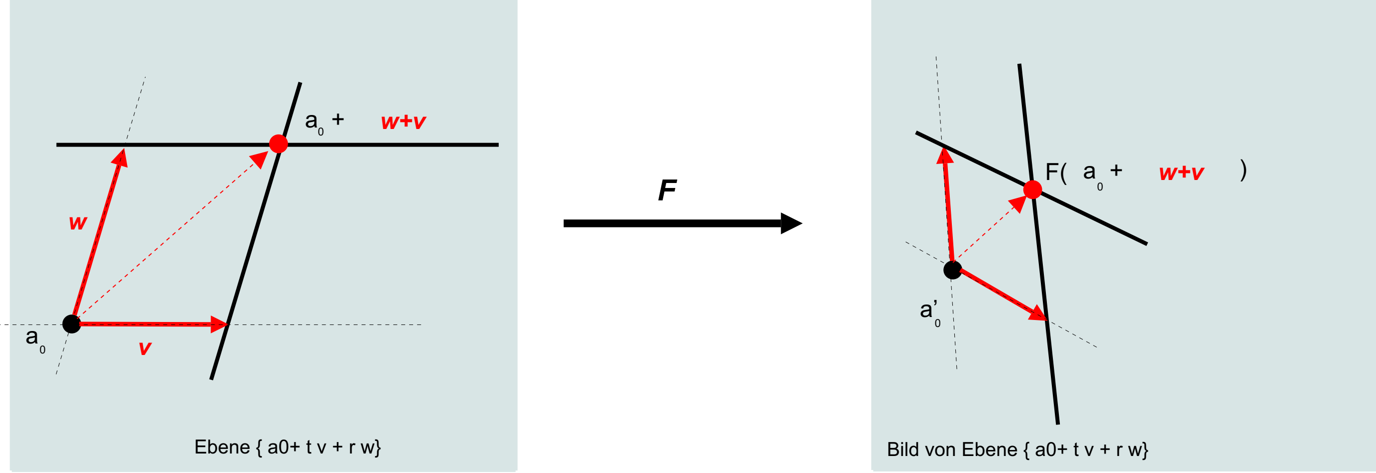
und $G(\lambda v) = \lambda G(v)$.
Dann wird F eine affine Abbildung nach Def. 13

HilfsLemma 3. Seien $v, w \in \mathbb{V}$ linear unabhängig. Dann gilt: $G(v + w) = G(v) + G(w)$

Beweis. Wir betrachten die Geraden



$\mathcal{G}_v = \{a_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$,
$\mathcal{G}_w = \{a_0 + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$,
die einander im Punkt a_0 schneiden, und die Geraden
$\mathcal{G}'_v = \{a_0 + w + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$, und
$\mathcal{G}'_w = \{a_0 + v + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$
die einander im Punkt $a_0 + v + w$ schneiden
Wir werden jetzt die Bilder von Geraden betrachten



Da $\mathcal{G}_v'$ parallel zu $\mathcal{G}_v := \{a_0 + tv | t \in \mathbb{R}\}$ ist, ist nach HilfsLemma 2 auch $Bild_F(\mathcal{G}_v')$ parallel zu $Bild_F(\mathcal{G}_v)$. Wegen
$F(a_0 + w) = a_0' + G(w) \in Bild_F(\mathcal{G}_v')$ und $a_0' \in Bild_F(\mathcal{G}_v)$,
$F(a_0 + v) = a_0' + G(v) \in Bild_F(\mathcal{G}_v)$ gilt
$Bild_F(\mathcal{G}_v') = \{a_0' + G(w) + tG(v) | t \in \mathbb{R}\}$ und analog
$Bild_F(\mathcal{G}_w') = \{a_0' + G(v) + tG(w) | t \in \mathbb{R}\}$
Da F injektiv ist und $\mathcal{G}_v$ und $\mathcal{G}_w$ einander genau in a_0 schneiden, gilt $Bild_F(\mathcal{G}_v') \cap Bild_F(\mathcal{G}_w') = \{a_0'\}$. Deshalb sind $G(v) = \overrightarrow{F(a_0)F(a_0 + v)}$ und $G(w) = \overrightarrow{F(a_0)F(a_0 + w)}$ linear unabhängig. Da $G(v)$ bzw. $G(w)$ Richtungsvektoren von $Bild_F(\mathcal{G}_v')$ bzw. $Bild_F(\mathcal{G}_w')$ sind, schneiden $Bild_F(\mathcal{G}_v')$ und $Bild_F(\mathcal{G}_w')$ einander genau im Punkt $F(a_0 + v + w) = a_0' + G(v + w)$, dem Bild des Schnittpunktes von $\mathcal{G}_v'$ und $\mathcal{G}_w'$. Andererseits zeigen die obigen Formeln für $Bild_F(\mathcal{G}_v')$ und $Bild_F(\mathcal{G}_w')$, daß auch $a_0' + G(v) + G(w) \in Bild_F(\mathcal{G}_v') \cap Bild_F(\mathcal{G}_w')$ ist.
Daraus folgt $G(v + w) = G(v) + G(w)$.