Affine Eigenschaften (stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Def. 15 *Sei M eine Teilmenge eines affinen Raums $\mathcal{A}$ über V (über $\mathbb{K}$). Eine Eigenschaft der Menge M heißt affin, wenn für jede Affinität $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_1$ die Bildmenge $\{F(a) \textit{wobei } a \in M\}$ auch diese Eigenschaft hat.*

Bezeichnung *Die Bildmenge einer Menge M unter der Abbildung F werden wir $Bild_F(M) \;:= \{F(a) \quad \textit{wobei } a \in M\}$ bezeichnen.*

Bsp. Eigenschaft „Unterraum zu sein“ ist eine affine Eigenschaft. Tatsächlich, betrachte ein Unterraum $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$. Ist F ein affiner Isomorphismus, so ist $F(a) = F(a_0) + f(\overrightarrow{a_0 a})$; da $Bild_f(V_{\mathcal{U}})$ ein Untervektorraum ist, ist $Bild_F(\mathcal{U})$ ein Unterraum.

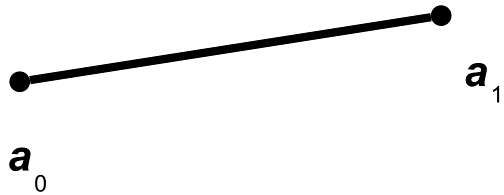
Bsp. Eigenschaften „Gerade , Ebene, oder Hyperebene“ zu sein sind affine Eigenschaften. Tatsächlich, nach Definition 12 ist

Gerade	Unterraum der Dimension 1
Ebene	Unterraum der Dimension 2
Hyperebene	Unterraum der Dimension $n-1$

Da die Isomorphismen die Dimension des Untervektorraums erhalten, ist Bild einer Geraden, Ebenen oder Hyperebenen jeweils eine Gerade, Ebene oder Hyperebene.

Bsp. Eigenschaft aus 3 Punkten zu bestehen ist eine affine Eigenschaft.

Definition 16 *Seien $a_0, a_1 \in \mathcal{A}$. Die* *Strecke* *mit Endpunkten a_0, a_1 ist die Menge $\{a_0 + \lambda\overrightarrow{a_0 a_1} \text{ wobei } 0 \leq \lambda \leq 1.\ \}$. (ist sinnvoll nur wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist)*



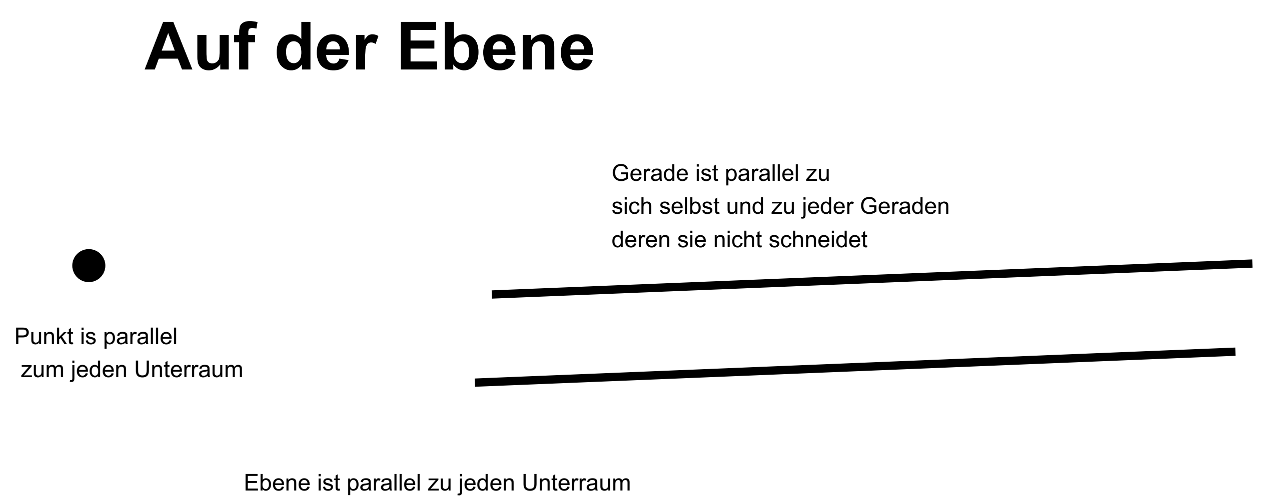
Bsp. Eigenschaft einer Strecke zu sein ist auch eine affine Eigenschaft.

Tatsächlich, für jeden Punkt einer Strecke $\{a_0 + \lambda\overrightarrow{a_0 a_1} \text{ wobei } 0 \leq \lambda \leq 1.\ \}$ gilt

$$F(a_0 + \lambda\overrightarrow{a_0 a_1}) \overset{(**)\text{in Def. 13}}{=} F(a_0) + \underbrace{f(\overrightarrow{a_0 a_1})}_{\overrightarrow{F(a_0)F(a_1)} \text{ nach } (*) \text{ in Def. 13}} .$$

Dann ist die Bildmenge $\{F(a_0) + \lambda\overrightarrow{F(a_0)F(a_1)} \text{ wobei } 0 \leq \lambda \leq 1.\ \}$ auch eine Strecke.

Def. 17 *Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ Unterräume von $\mathcal{A}$ (man kann es über einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V definieren). Sie heißen parallel zu einem anderen, falls $V_{\mathcal{U}_1} \subseteq V_{\mathcal{U}_2}$ oder $V_{\mathcal{U}_2} \subseteq V_{\mathcal{U}_1}$.*



Bsp. Jeder Unterraum ist zu sich selbst, zum ganzen Raum und zu einem Punkt Parallel.

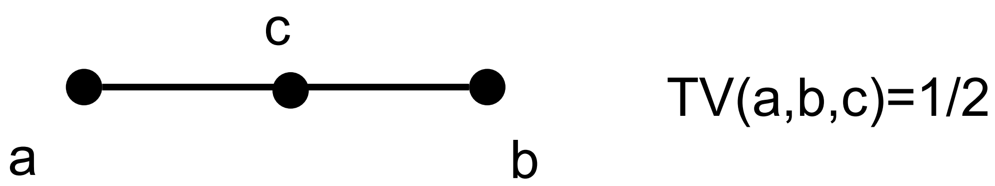
Einfach zu sehen: Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ parallele affine Unterräume. Dan gilt: entweder enthält ein Unterraum den anderen, oder sie haben keine Schnittpunkte.

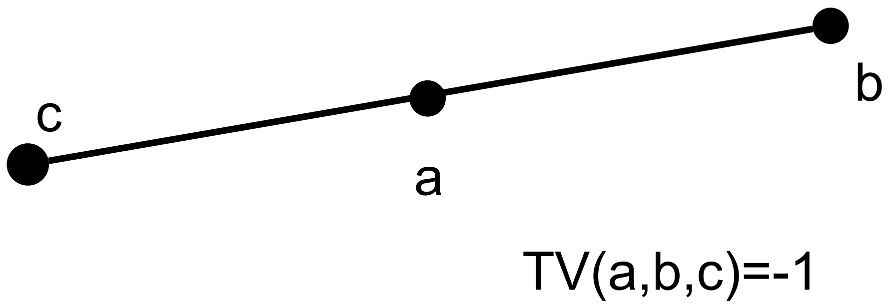
Bsp. Eigenschaft aus zwei Unterräume zu bestehen, die keine Schnittpunkten haben ist eine affine Eigenschaft.

Definition 18 *Sei (a, b, c) ein Tripel von Punkten in $\mathcal{A}$.*

1. *Die Punkte a, b, c heißen kollinear, falls sie auf einer Geraden liegen.*
2. *Ist (a, b, c) ein kollineares Punktetripel und $a \neq b$, so heißt der durch die Gleichung $\overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{ab}$ eindeutig bestimmte Skalar λ das Teilverhältnis des kollinearen Punktetripels (a, b, c), bezeichnet durch $TV(a, b, c)$.*

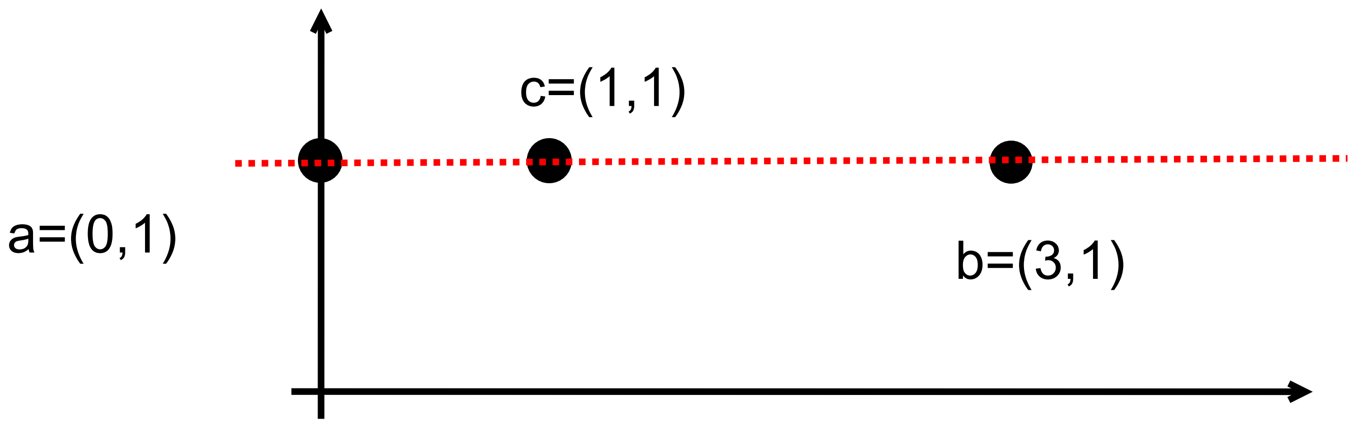
Bsp. c heißt der Mittelpunkt der Strecke (a, b), wenn $TV(a, b, c) = \frac{1}{2}$ gilt (hat sinn falls $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ wohldefiniert ist, also falls $1 + 1 \neq 0$ ist. Das ist äquivalent zu $c = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}$.





Bsp. In $\mathbb{R}^2$ sind $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ kollinear.

Wegen $\overrightarrow{ac} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ab} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $TV(a, b, c) = \frac{1}{3}$.



Geometr. Bedeutung: Sei $\mathcal{A} = \mathcal{E}$. Dann gilt:

$$|TV(a, b, c)| = \frac{\text{Länge}(a, c)}{\text{Länge}(a, b)}.$$

Ferner gilt: liegt c auf der Strecke a, b, so ist $0 \leq TV(a, b, c) \leq 1$. liegt a auf der Strecke b, c, so ist $TV(a, b, c) \leq 0$. liegt b auf der Strecke a, c, so ist $TV(a, b, c) \geq 1$.

Lemma 9 *Sind (a, b, c) kollinear und F ein affiner Isomorphismus, so sind $(F(a), F(b), F(c))$ auch kollinear; ferner gilt:* $TV(a, b, c) = TV(F(a), F(b), F(c))$.

In Worten: Affinitäten erhalten Kollinearität und das Teilverhältnis.

Beweis. Liegen a, b, c auf einer Geraden $\mathcal{G}$, so liegen $F(a), F(b), F(c)$ auf der Bildmenge $Bild_F(\mathcal{G})$. Da $Bild_F(\mathcal{G})$ wieder eine Gerade ist, sind $F(a), F(b), F(c)$ kollinear.

Nach Definition 18 ist

$$\overrightarrow{ac} = TV(a, b, c)\overrightarrow{ab}.$$

Nach Definition 29 ist $\overrightarrow{F(a)F(c)} = f(\overrightarrow{ac})$ und $\overrightarrow{F(a)F(b)} = f(\overrightarrow{ab})$. Also,

$$\overrightarrow{F(a)F(c)} = TV(a, b, c)\overrightarrow{F(a)F(b)},$$

also $TV(F(a), F(b), F(c)) = TV(a, b, c)$

Folgerung:

Punkt c ist der Mittelpunkt der Stecke (a, b)	affine Eigenschaft
Punkt c teilt die Stecke (a, b) in Verhältnis $2:1$	affine Eigenschaft

$\frac{\text{Flächeninhalt einer Menge}}{\text{Flächeninhalt der zweiten Menge}}$ ist eine affine Eigenschaft

In der Vorl. 16 LAAG I haben wir verstanden, dass eine lineare Abbildung $f_A : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ (wobei $\mathcal{E}$ die übliche „Schulgeometrische" Ebene ist) Flächeninhalt jeder Figure mit Faktor $det(A)$ multipliziert.
Wir wissen dass jede Affinität von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}$ die Form $F(x) = F(a) + f_A(\overrightarrow{ax})$ hat. Da die Translation (Parallelverschiebung) offensichtlich den Flächeninhalt erhält, multipliziert die affine Abbildung Flächeninhalt jeder Figure mit Faktor $det(A)$.

Deswegen erhalten die Affinitäten von $\mathcal{E}$ $\frac{\text{Flächeninhalt einer Menge}}{\text{Flächeninhalt der zweiten Menge}}$

Selbstverständlich ist das Phänomen mehrdimensional : in $Dim(3)$ und in $Dim(n)$ (und in Lorenz-Geometrie) ist $Volum(Bild_F(Menge)) = det(f)(Volum(Menge))$ und deswegen

$$\frac{Volum(Bild_F(Menge_1))}{Volum(Bild_F(Menge_2))} = \frac{det(f) \cdot Volum(Menge_1)}{det(f) \cdot Volum(Menge_2)} = \frac{det(f)Volum(Menge_1)}{det(f)Volum(Menge_2)}$$

Wiederholung Eine Eigenschaft einer Teilmenge $M \subseteq \mathcal{A}$ heißt affin, wenn für jede Affinität $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_1$ die Bildmenge $\{F(a) \text{ wobei } a \in M\}$ auch diese Eigenschaft hat.

Punkt zu sein	affin
Gerade (zu sein)	affin
Strecke	affin
Dreieck	affin
parallele Gerade	affin
Winkel (in $\mathcal{E}_2$ oder $\mathcal{E}_3$) zwichen zwei Geraden ist gerade	nicht affin
Länge einer Strecke (in $\mathcal{E}_2$ oder $\mathcal{E}_3$) ist gleich 5	nicht affin
Punkt c ist die Mittelpunkt der Stecke (a, b)	affin
Punkt c teilt die Stecke (a, b) in Verhältnis $2 : 1$	affin
Flächeninhalt (in $\mathcal{E}_2$ oder $\mathcal{E}_3$)	nicht affin
$\frac{\text{Flächeninhalt einer Menge}}{\text{Flächeninhalt der zweiten Menge}} = 5$	affin

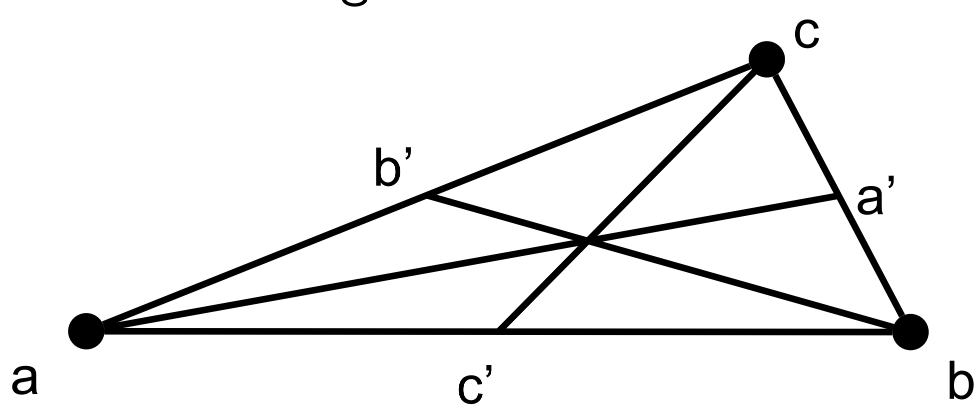
Anwendung in der (Schul)geometrie

Wir sagen, dass eine geometrische Aufgabe affin ist, falls nur affine Eigenschafen gegeben sind.
Um eine affine Aufgabe zu lösen, können Sie zuerst eine passende Affinität anwenden. Wenn Sie dies klug genug tun, vereinfacht dies die Aufgabe.

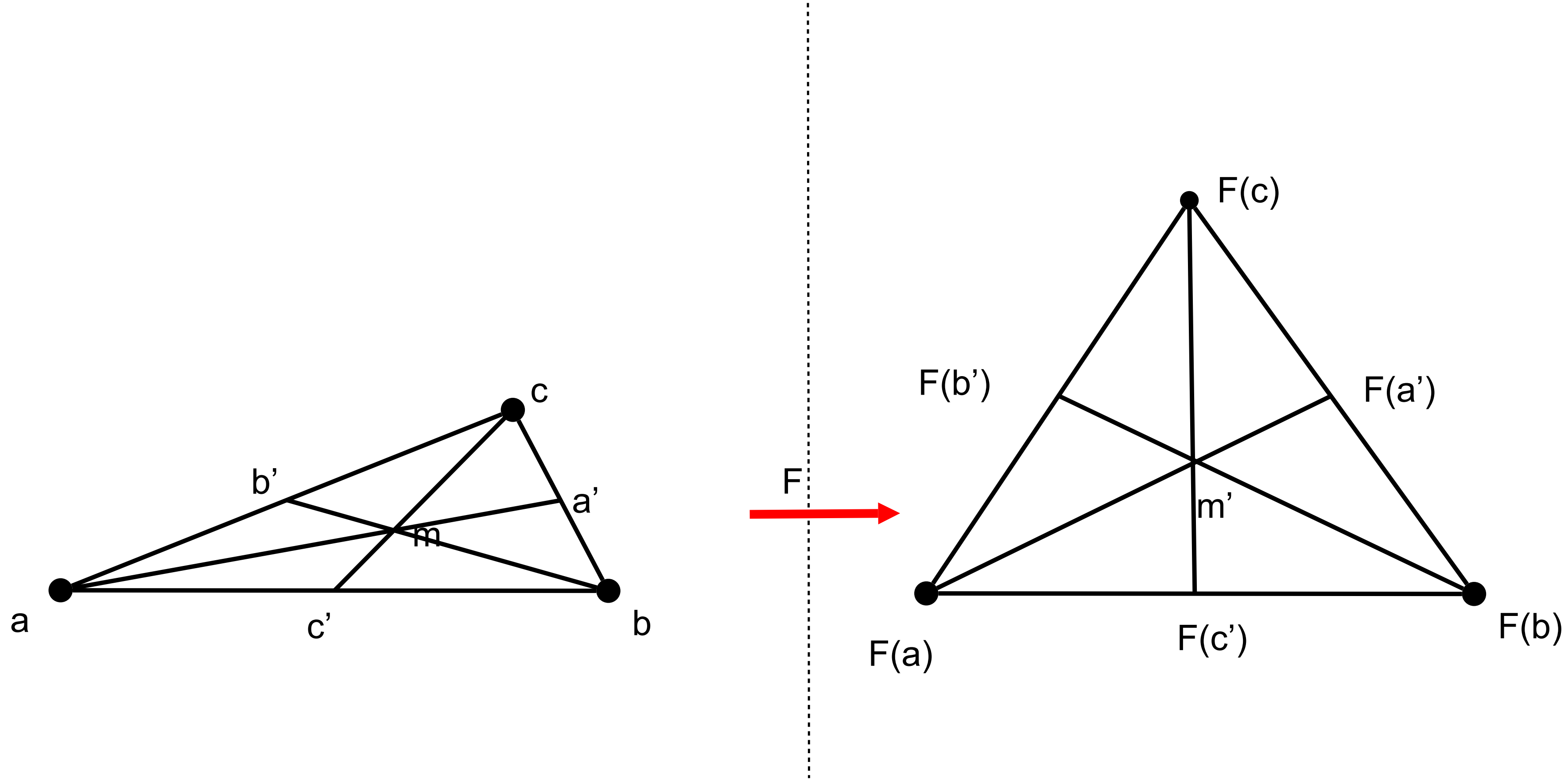
BspAufgabe. Beweisen Sie, dass die Seitenhalbierenden eines Dreiecks
(a) in einem Punkt schneiden
(b) dass der Schnittpunkt sie in Verhältnis 2 : 1 teilt,
(c) dass die 6 Dreiecke, in denen die Seitenhalbierend das Dreieck teilen gleichen Flächeninhalt haben.

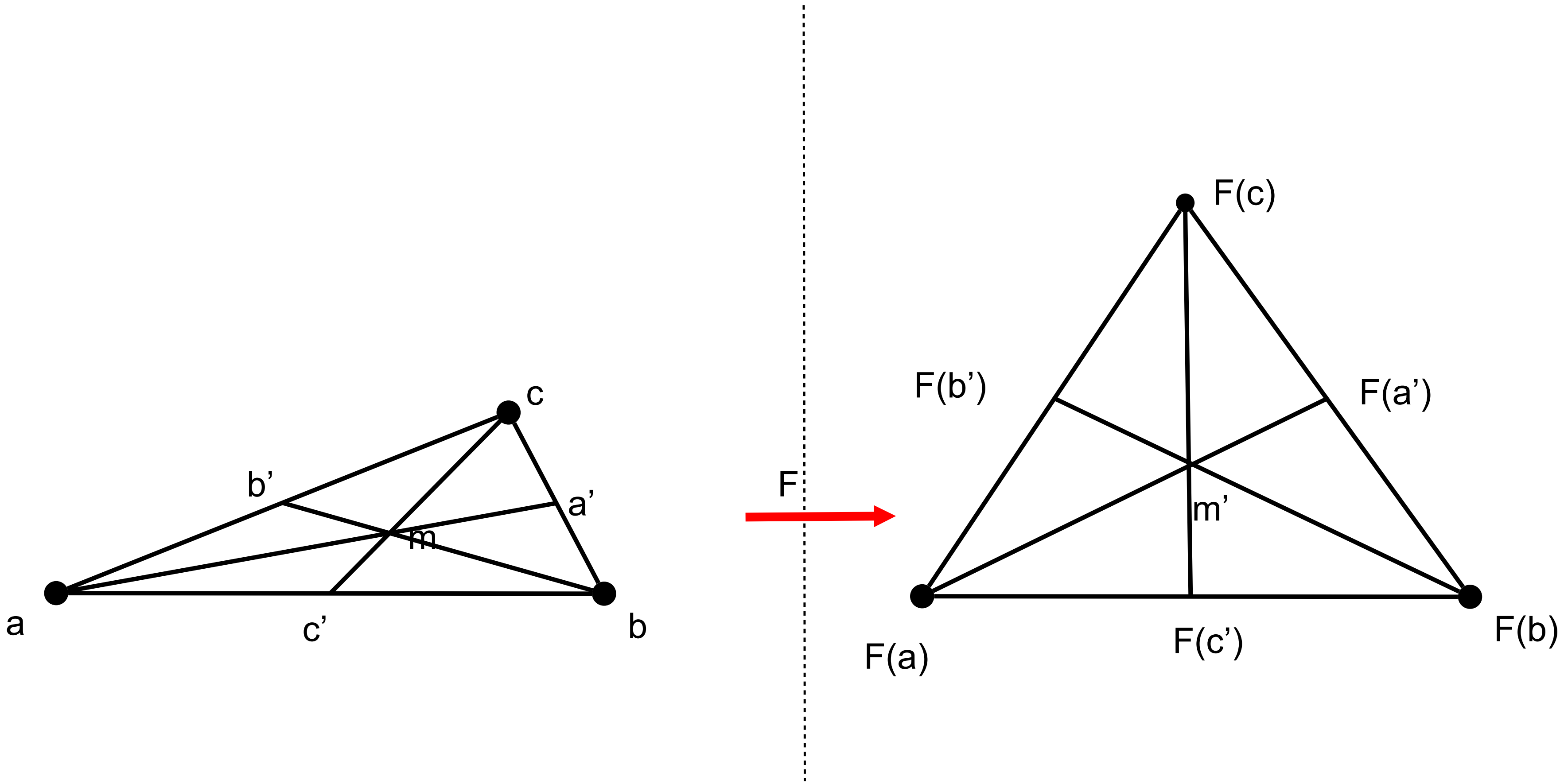
Bemerkung *Hausaufgabe 4 ist die Verallgemeinerung von (a) und (c) für 3-dim Fall.*

Bemerkung Eine solche Aufgabe kann in der Klausur auftretet



Man betrachte eine Affinität, die die Ecke des Dreiecks ABC in Ecken eines regelmäßigen Dreiecks überführt (existiert nach Satz 17). Die Abbildung führt die Seiten in Seiten über. Die Abbildung führt die Mittelpunkte der Seiten in die Mittelpunkte der Seiten über. Die Abbildung führt die Seitenhalbierenden in die Seitenhalbierenden über. Da in dem regelmäßigen Dreieck die Seitenhalbierende in einem Punkt schneiden, schneiden die Seitenhalbierende des ursprünglichen Dreiecks auch in einem Punkt. (a) ist bewiesen.



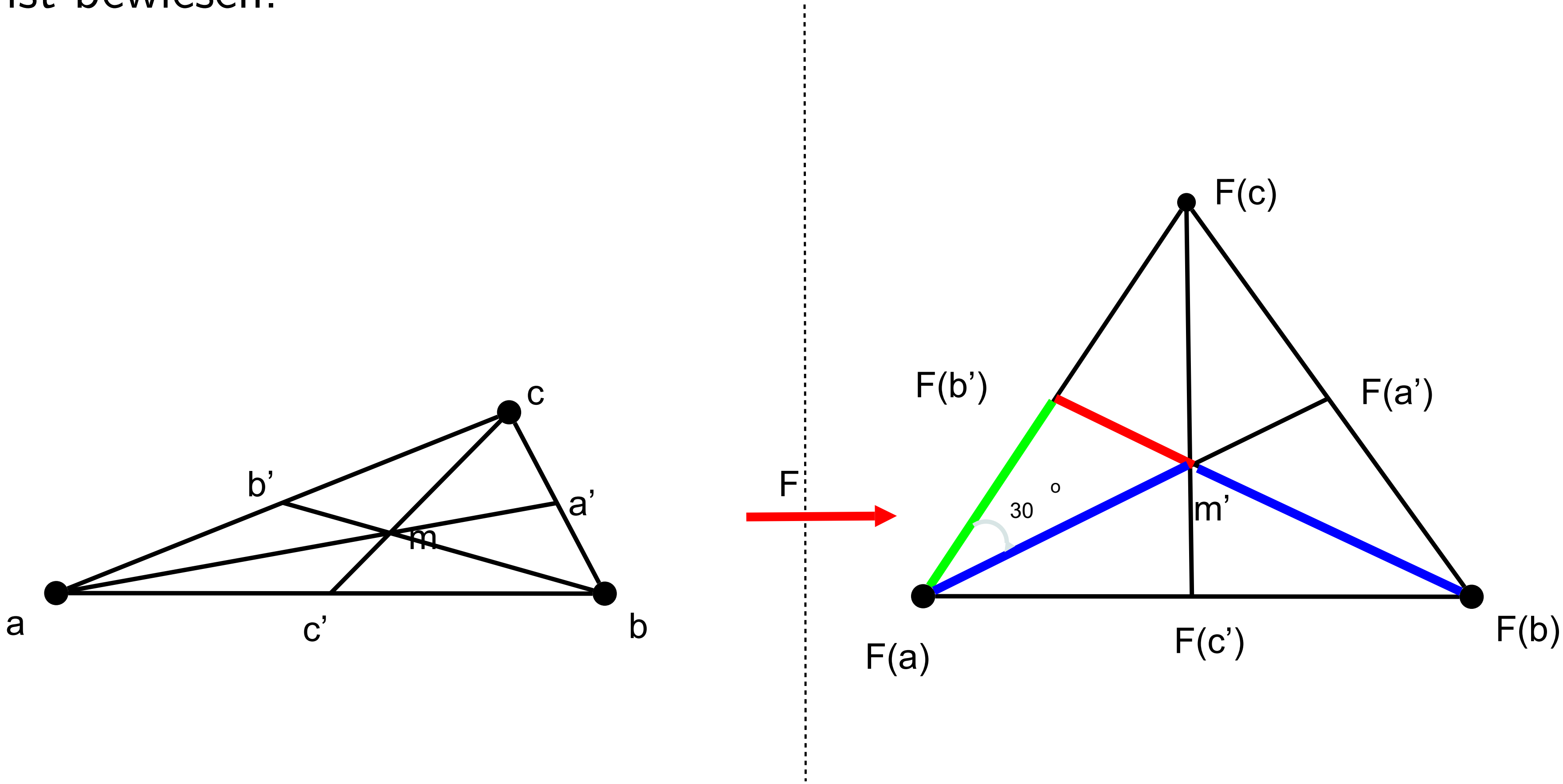


Da in einem regelmässigen Dreieck alle 6 Dreiecke in denen die Seitenhlabierende das Dreieck teilen gleich sind, sind ihre Flacheninhalte auch gleich, also

$$\frac{\text{Flächeninhalt eines kleinen Dreieck}}{\text{Flächeninhalt eines anderen kleinen Dreiecks}} = 1. \quad (*)$$

Da dies eine affine Eigenschaft ist, gilt $(*)$ auch für das ursprunglichen Dreieck. (c) ist Bewiesen.

Man betrachte ein "kleines" Dreieck.
Da der Winkel $F(c)F(a)F(a')$ gleich 30^o ist, ist $|(m', F(b'))| = \sin(30^o)\,|(m', F(a))| = \frac{1}{2}|(m', F(a))|$. Da $|(F(b'), m')| = |(m', F(a))|$, teilt der Punkt m' die Seitenhalbierende $(F(b), F(b'))$ im Verhältnis $2:1$. Da Affinitäten die Teilverhältnis erhalten, teilt m die Seitenhalbierende (b, b') im Verhältnis $2:1$. (b) ist bewiesen.

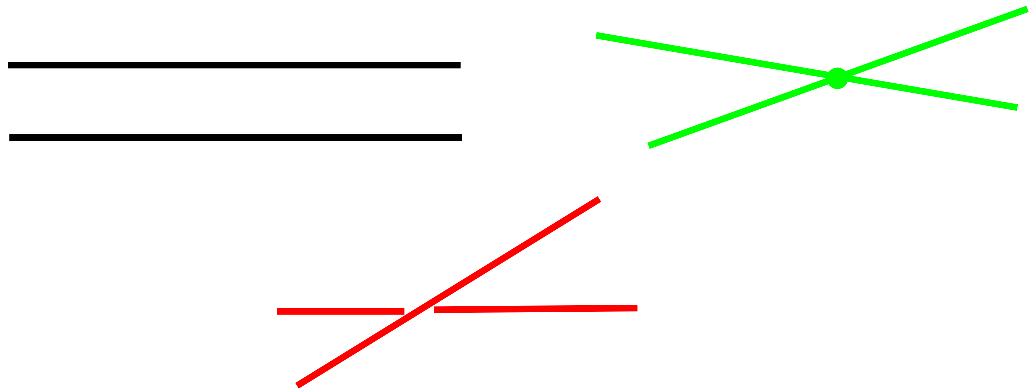


Lemma 10 *Sei $\mathcal{A}$ ein $n-$dimensionaler affiner Raum, $\mathcal{U}$ affiner Unterraum und $\mathcal{H}$ affine Hyperebene. Gilt $\mathcal{U} \bigcap \mathcal{H} = \emptyset$, so sind $\mathcal{U}$ und $\mathcal{H}$ parallel.(Körper ist $\mathbb{K}$)*

Bemerkung. Die Bedienung, dass $\mathcal{H}$ Hyperebene ist, also dass $dim(V_{\mathcal{H}}) = dim(V) - 1$, ist wichtig:

Zwei veschiedene Gerade in $\mathcal{E}_3$ können

- parallel sein,
- windschief sein
- einander schneiden



Lemma 10 *Sei $\mathcal{A}$ ein $n-$dimensionaler affiner Raum, $\mathcal{U}$ affiner Unterraum und $\mathcal{H}$ affine Hyperebene. Gilt $\mathcal{U} \bigcap \mathcal{H} = \emptyset$, so sind $\mathcal{U}$ und $\mathcal{H}$ parallel.(Körper ist $\mathbb{K}$)*

Widerspruchsbeweis. Angenommen sie sind nicht parallel. Man nehme ein $v \in V_{\mathcal{U}}$, $v \notin V_{\mathcal{H}}$. Man nehme eine Basis $(h_1, ..., h_{n-1})$ in $V_{\mathcal{H}}$, und betrachte $\{h_1, ..., h_{n-1}, v\}$. Die Menge ist linear unabhängig. Tatsächlich, sei

$$\lambda_1 h_1 + ... + \lambda_{n-1} h_{n-1} + \lambda v = \vec{0} \qquad (*).$$

Dann ist $\lambda = 0$, sonst kann man v als Linearkombination von $h_1, ..., h_{n-1}$ darstellen, was die Voraussetzungen widerspricht. Dann ist $(*)$ eine Linearkombination der Elemente aus $\{h_1, ..., h_{n-1}\}$ und ist trivial, weil $\{h_1, ..., h_{n-1}\}$ linear unabhängig ist. Dann ist $\{h_1, ..., h_{n-1}, v\}$ linear unabhängig, und deswegen eine Basis.

Nehmen wir ein $a \in \mathcal{U}$ und ein $b \in \mathcal{H}$. Da $(h_1, ..., f_{n-1}, v)$ eine Basis ist, gilt $\overrightarrow{ab} = \lambda_1 h_1 + ... + \lambda_{n-1} h_{n-1} + \lambda v$. Dann $b = a + \lambda_1 h_1 + ... + \lambda_{n-1} h_{n-1} + \lambda v$, und deswegen

$$b - (\lambda_1 h_1 + ... + \lambda_{n-1} h_{n-1}) = a + \lambda v. \quad (**)$$

Da $b \in \mathcal{H}$ und $(\lambda_1 h_1 + ... + \lambda_{n-1} h_{n-1}) \in V_{\mathcal{H}}$, liegt die linke Seite von $(**)$ in $\mathcal{H}$. Da $b \in \mathcal{H}$ und $\lambda v \in V_{\mathcal{U}}$, liegt die rechte Seite von $(**)$ in $\mathcal{U}$. Also $\mathcal{U} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Widerspruch beweist das Lemma. $\square$

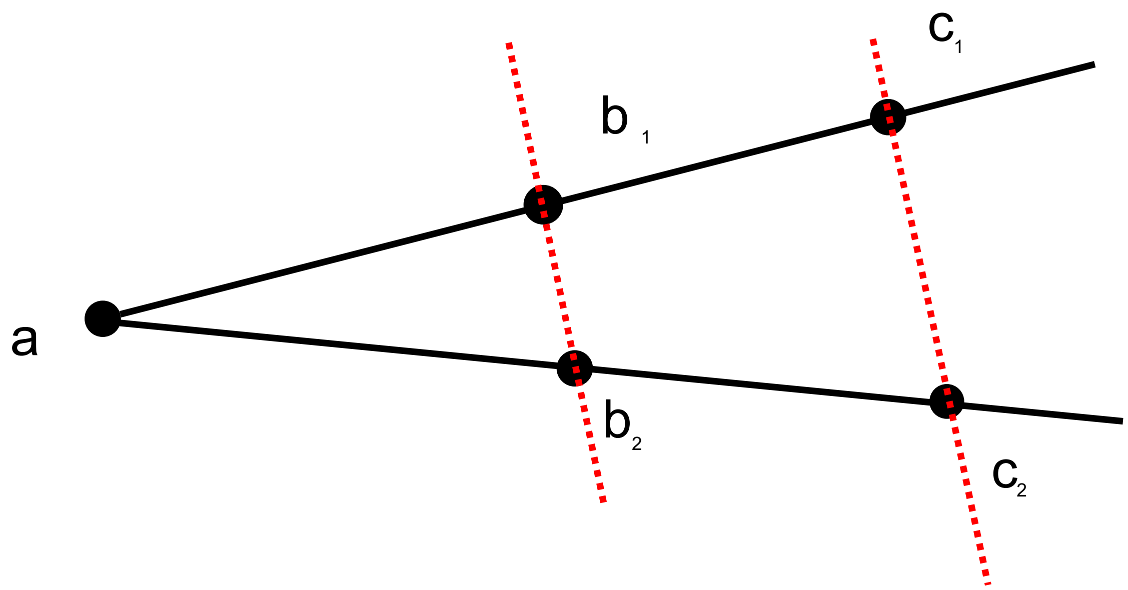
Ziel: Möglich viele Begriffe mit Hilfe von Begriff „Gerade“ zu definieren

Plan

- Affine Unterräumen
- Affinität

Strahlensatz

Satz 20 (Strahlensatz) *Seien* (a, b_1, c_1) *und* (a, b_2, c_2) *kollineare Punktetripel auf verschiedenen Geraden durch* $a \notin \{b_1, b_2, c_1, c_2\}$. *Dann sind die Geraden* $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ *und* $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ *genau dann parallel, wenn* $TV(a, b_1, c_1) = TV(a, b_2, c_2)$, *wobei* $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ *und* $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ *sind Gerade, die Punkte* b_1, b_2 *bzw.* c_1, c_2 *enthalten.*



Beweis. Nach Def. 18 gilt $\begin{array}{lcl} TV(a, b_1, c_1) = \lambda & \iff & \overrightarrow{ac_1} = \lambda\overrightarrow{ab_1} \\ TV(a, b_2, c_2) = \mu & \iff & \overrightarrow{ac_2} = \mu\overrightarrow{ab_2} \end{array}$

Nach Def. 17 die Gerade $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ sind parallel g.d.w. $\overrightarrow{c_1c_2}$ und $\overrightarrow{b_1b_2}$ linear abhängig sind. Aus $\overrightarrow{ac_1} + \overrightarrow{c_1c_2} = \overrightarrow{ac_2}$ folgt $\overrightarrow{c_1c_2} = \overrightarrow{ac_2} - \overrightarrow{ac_1} = \mu\overrightarrow{ab_2} - \lambda\overrightarrow{ab_1}$ und ebenso $\overrightarrow{b_1b_2} = \overrightarrow{ab_2} - \overrightarrow{ab_1}$. Dann $\alpha\overrightarrow{c_1c_2} + \beta\overrightarrow{b_1b_2} = 0 \iff$ $\alpha(\mu\overrightarrow{ab_2} - \lambda\overrightarrow{ab_1}) + \beta(\overrightarrow{ab_2} - \overrightarrow{ab_1}) = (\alpha\mu + \beta)\overrightarrow{ab_2} - (\alpha\lambda + \beta)\overrightarrow{ab_1} = 0$. Da die Vektoren $\overrightarrow{ab_2}$ und $\overrightarrow{ab_1} = 0$ linear unabhängig sind, ist dies äquivalent zu dem linearen Gleichungsystem $\left\{ \begin{array}{l} \alpha\mu + \beta = 0 \\ \alpha\lambda + \beta = 0 \end{array} \right.$ auf Unbekannten α, β.

Das System in Matrix Form:

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Falls $\lambda \neq \mu$, ist die Matrix nichtausgeartet, weil

$det \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = (\mu - \lambda) \neq 0.$

Also, falls $\lambda \neq \mu$ ist, gibt es nur triviale Lösung, was bedeutet dass $\overrightarrow{c_1c_2}$ und $\overrightarrow{b_1b_2}$ linear unabhängig sind und deswegen die Geraden $\mathcal{G}_{b_1,b_2}$ und $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ nicht parallel sind. Falls $\lambda = \mu$ ist, dann gibt es auch nichttriviale Lösungen (nach Satz 47(a) LAAG I) z.B. $\alpha = 1, \ \beta = \mu$, und deswegen sind die Gerade parallel.

Def. 19 *Sei $M \neq \varnothing$ eine Teilmenge des affinen Raums $\mathcal{A}$. Sie heißt affin abgeschlossen, falls M mit je zwei Punkte $a \neq b$ auch die Gerade $G_{a,b} := \{a + \lambda\overrightarrow{ab} \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{R}\}$ durch a und b enthält.*

Bsp. Ein Unterraum ist eine affin abgeschlossene Teilmenge.

Satz 21 *Eine affin abgeschlossene Teilmenge M des affinen Raums $\mathcal{A}$ ist ein Unterraum*

Beweis. Angenommen M ist affin abgeschlossen und $a_0 \in M$.
Z.z.: $U := \{\overrightarrow{a_0a} \text{ wobei } a \in M\}$ ein Unterraum ist. (Weil $M := \{a_0 + u \text{ wobei } u \in U\}$).

Z.z:. (i) Ist $v \in U$, so ist $\lambda v \in U$. (ii) Sind $v, w \in U$, so ist $\lambda v + \mu w \in U$.
Wir zeigen (i). Es gilt: $\vec{0} = \overrightarrow{a_0a_0} \in U$. Sei $v \in U$, $v \neq \vec{0}$, d.h. $v = \overrightarrow{a_0a}$ für $a \in M$, $a \neq a_0$. Dann liegen alle Punkte der Geraden $G_{a_0,a} := \{a_0 + \lambda\overrightarrow{a_0a} \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{R}\}$ in U, also $\lambda\overrightarrow{a_0a} \in U$.
Wir zeigen (ii). Seien $v = \overrightarrow{a_0a} \in U$, $w = \overrightarrow{a_0b} \in U$ mit $a, b \in M$. Gilt $v = w$, so folgt nach (i) $v + w = 2v \in U$. Wir können also annehmen, dass $v \neq w$ und damit $a \neq b$. Nach Voraussetzungen gilt dann $\mathcal{G}_{a,b} \subseteq M$.
Wegen $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{aa_0} + \overrightarrow{a_0b} = -\overrightarrow{a_0a} + \overrightarrow{a_0b} = w - v$ gilt dann
$\mathcal{G}_{a,b} = \{a + \lambda(w - v) \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{R}\} = \{a_0 + (1-\lambda)v + \lambda w \text{ wobei } \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Für $\lambda = \frac{1}{2}$ erhalten wir $a_0 + (1 - \frac{1}{2})v + \frac{1}{2}w = a_0 + \frac{1}{2}w$
$= a_0 + \frac{1}{2}(v + w) \in M$, also $\frac{1}{2}(v + w) \in U$. Nach (i) folgt
$2 \cdot \frac{1}{2}(v + w) \in U$. $\square$