Neues Thema: affine Geometrie

Definition 11 *Affiner Raum über einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist die Menge $\mathcal{A} \neq \varnothing$ mit einer Abbildung $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$, für die gilt*

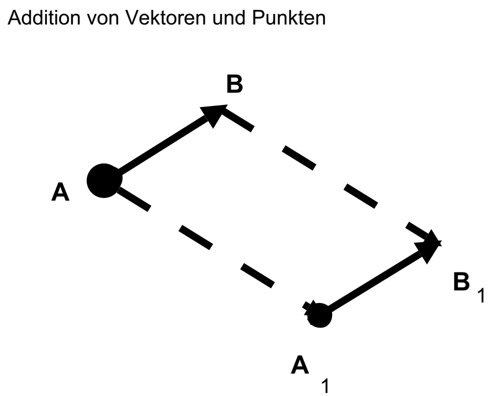
(A_1) *für alle $a \in \mathcal{A}$, $v, w \in V$ gilt*
$$(a+v)+w = a + \underbrace{(v+w)}_{\text{Übliche Addition von Vektoren}}$$

(A_2) *für alle $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ existiert genau ein $v \in \mathcal{A}$ s.d. $a_2 = a_1 + v$ (Der Vektor v wird $\overrightarrow{a_1 a_2}$) bezeichnet.*

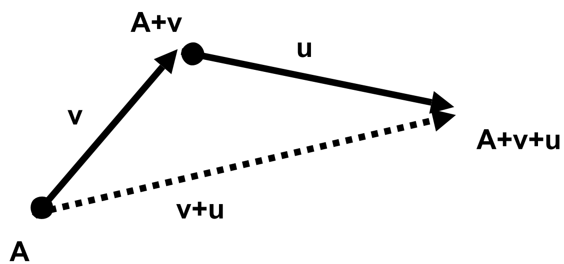
Die Dimension des affinen Raums ist die Dimension des V. Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen Punkten.

StandardBsp. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir setzen $\mathcal{A} = V$. "$+$" sei die übliche Addition in V. Das ist ein affiner Raum:
(A_1): $(a+v)+w = a+(v+w)$ entspricht Assoziativität der Addition,
(A_2) entspricht der Existenz der eindeutigen Inversen
(weil $a_2 = a_1 + v \iff v \overset{\text{eindeutig}}{=} a_2 - a_1$.)

MotivationsBsp: ˇ¡1-¿ $\mathcal{E} =$ Übliche („Schulgeometrische“) Ebene, V – die Menge von geometrischen Vektoren (geordneten Strecken) mit Anfang in A_1, "+" sei die Addition von Vektoren und Punkten auf der Ebene Sei $A \in \mathcal{E}$, $\vec{v} = \overrightarrow{A_1 B_1}$ sei ein Vektor auf $\mathcal{E}$,. Die Summe $A + \vec{v}$ ist ein Punkt $B \in \mathcal{E}$ so dass die geordnete Strecke $\overrightarrow{A, B}$ gleich (= parallel und hat die gleiche Länge und die gleiche Richtung) zu $\vec{v}$ ist.



Eigenschaft (A_1): A sei ein Punkt, $\vec{v}, \vec{u}$ seien Vektoren. Es gilt: $(A + \vec{v}) + \vec{u} = A + (\vec{u} + \vec{v})$.



Eigenschaft (A_2): Für A, $B \in \mathcal{E}$ gibt es genau einen Vektor (mit Anfang in A_1), der zur geordneten Strecke $\overrightarrow{AB}$ gleich ist.

Lass uns noch einmal Eigenschaften (A1), (A2) ansehen.

(A_1) für alle $a \in \mathcal{A}$, $v, w \in V$ gilt $(a + v) + w = a + (v + w)$

(A_2) für alle $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ existiert genau ein $v \in \mathcal{A}$ s.d. $a_2 = a_1 + v$ (Der Vektor v wird $\overrightarrow{a_1 a_2}$) bezeichnet.

Falls wir einen festen Punkt $a \in \mathcal{A}$ gewählt haben, ist A “fast” ein Vektorraum: jedem a_1 ist eindeutiges $\overrightarrow{aa_1}$ zugeordnet.

Plan für Heute

Theorie von affinen Räumen

- Affiner Raum
- Affiner Unterraum
- Affine Abbildungen
- Affine Koordinaten
- Hauptsatz der affiner Geometrie

Theorie von Vektorräumen (LAAG I)

- Vektorraum (Vorl.9)
- Untervektorraum (Vorl. 9)
- Koordinaten (Vorl 11-12)
- Lineare Abbildungen (Vorl. 12-13)
- Hauptsatz der linearen Algebra (Vorl. 12)

Lemma 5 *Für alle $a, a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$ gilt: $a + \vec{0} = a$, $\overrightarrow{aa} = \vec{0}$, $\overrightarrow{a_1a_2} = -\overrightarrow{a_2a_1}$, $\overrightarrow{a_1a_2} + \overrightarrow{a_2a_3} = \overrightarrow{a_1a_3}$.*

Beweis: Hausaufgabe.

Def. 12 *Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über $\mathbb{K}$- Vektorraum V. Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ heißt ein affiner Unterraum, falls ein Untervektorraum $V_{\mathcal{U}}$ und ein $a_0 \in \mathcal{A}$ existieren so dass*

$$\mathcal{U} = \{a_0 + v, \quad \textit{wobei } v \in V_{\mathcal{U}} \ \}.$$

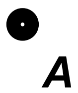
$dim(\mathcal{U}) := dim(V_{\mathcal{U}})$. Die affine Unterräume der Dimension 1 heißen Gerade, die affine Unterräume der Dimension 2 heißen Ebenen.Falls V n-dimensional ist, die affine Unterräume der Dimension $n-1$ heißen Hyperebenen.

Triviales Bsp. Jede 1-Punkt-Menge $\{a\} \subseteq \mathcal{A}$ ist ein affiner Unterraum (Weil $\{\vec{0}\}$ ein Vektoraum ist, und $a + \vec{0} \stackrel{\text{Lem. 5}}{=} a$) der Dimension 0 .
$\mathcal{A}$ selbst ist auch ein affiner Unterraum, da nach (A_2)
$\{a_0 + v, \quad \text{wobei } v \in V \ \} = \mathcal{A}$. $\quad dim(\mathcal{A}) = dim(V)$

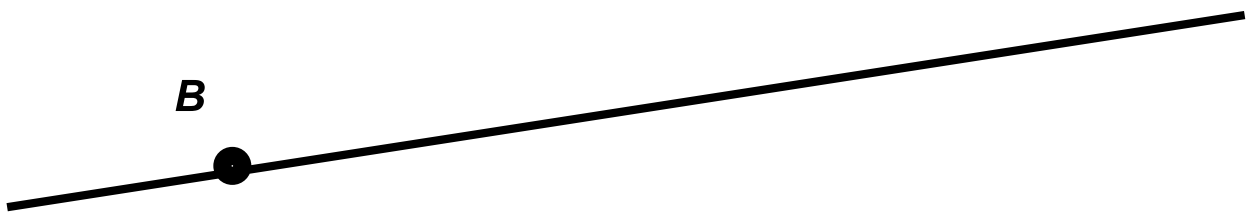
Bemerkung *Affiner Unterraum $\mathcal{U}$ ist ein affiner Raum über $V_{\mathcal{U}}$*

Bsp. Unterräume von E_2

Unteräume von Ebene



Punkt ist ein 0-dim. aff. Unterraum



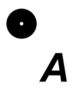
Gerade={ B+ t v, wobei t aus R ist} ist ein 1-dim. aff. Unterraum

=Hyperebene

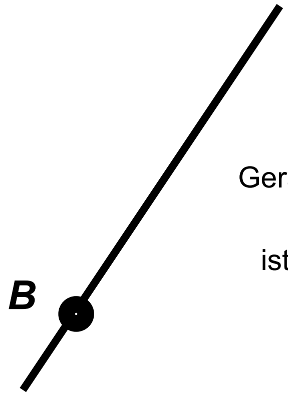
Die ganze Ebene ist ein 2-dim. aff. Unterraum

Bsp. Unterräume von E_3

Unteräume vom Raum

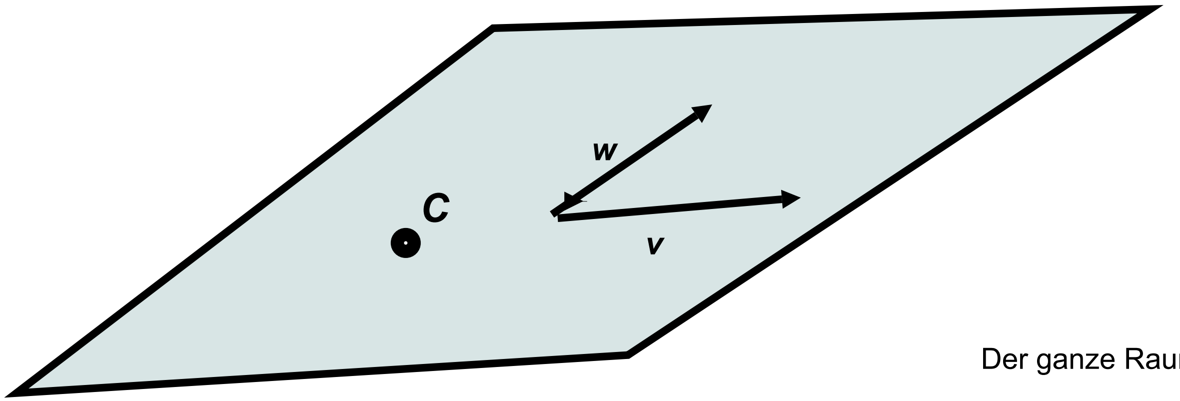


Punkt ist ein 0-dim. aff. Unterraum



Gerade={ B+ t v, wobei t aus R ist}

ist ein 1-dim. aff. Unterraum



Der ganze Raum

ist ein 3-dim. aff. Unterraum

Die Ebene {C+t v + r w, wobei t,r aus R sind}

und v, w linear unabhängig sind

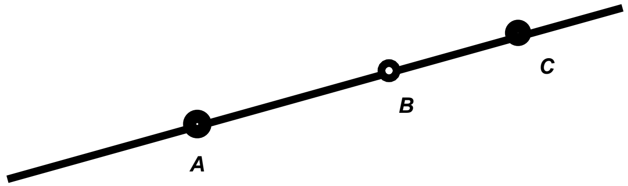
ist ein 2-dim. aff. Unterraum

ist ein Hyperebene

Lemma 6 Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$ affiner Unterraum (d.h. $\mathcal{U} = \{a_0 + v, \ \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}} \ \}$). Nehme $a_1 \in \mathcal{A}$. Dann gilt: $\mathcal{U} = \{a_1 + v, \ \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}} \ \}$.

In Worten: als Fusspunkt können wir einen beliebigen Punkt des Unterraums wählen.

Geraden {A+ tv},
{B+t v}, {C+t v}
sind gleich



Beweis. Wir zeigen: jeder Punkt a aus $\{a_0 + v, \ \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}} \ \}$ liegt auch in $\{a_1 + v, \ \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}} \ \}$. Tatsächlich, $a = a_0 + v$, wobei $v \in V_{\mathcal{U}}$. Dann ist

$$a_0 + v \overset{Lem.5}{=} a_0 + v + \vec{0} \overset{Lem.5}{=} a_0 + v + \overrightarrow{a_0 a_1} + \overrightarrow{a_1 a_0} \overset{(A1)}{=} \underbrace{\left(a_0 + \overrightarrow{a_0 a_1}\right)}_{a_1} + \underbrace{\left(v + \overrightarrow{a_1 a_0}\right)}_{\in V_{\mathcal{U}}} \in \{a_1 + u, \ \text{ wobei } u \in V_{\mathcal{U}} \ \}.$$

Ähnlich, jedes a aus $\{a_1 + v, \ \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}} \ \}$ liegt auch in $\{a_0 + v, \ \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}} \ \}$. Also, die Mengen sind gleich. $\square$

Lemma 7 *Sind* $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ *affine Unterräume s.d.* $\mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2 \neq \varnothing$, *so ist* $\mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2$ *auch ein Unterraum und* $V_{\mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2} = V_{\mathcal{U}_1} \bigcap V_{\mathcal{U}_2}$.

Beweis: Wähle $a_0 \in \mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2$. Nach Lemma 5 gilt

$\mathcal{U}_1 = \{a_0 + v, \ \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}_1}\}$,

$\mathcal{U}_2 = \{a_0 + v, \ \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}_2} \ \}$.

Dann $\mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2 = \{a_0 + v \ \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}_1} \bigcap V_{\mathcal{U}_2}\}$. $\square$

Bsp. Betrachte den affine Raum aus StandardBsp, wobei $V = \mathbb{K}^n$. D.h., $\mathcal{A} = V = \mathbb{K}^n$ und die Addition ist die übliche Addition in $\mathbb{K}^n$. Sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. Betrachte das lineare Gleichungssystem $Ax = b$. Angenommen, das System is lösbar.
Dann ist die Lösungsmenge $\mathcal{U}$ ein Unterraum und $V_{\mathcal{U}} = Kern_{f_A}$.
Tatsächlich, nach Satz 47(b) LAAG I ist die Lösungsmenge $\{\tilde{x} + v \text{ wobei } v \in Kern_{f_A}\}$.

Affine Abbildungen

Definition 13 *Seien $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ affine Räume über V_1, V_2. Eine Abbildung $F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ heißt affin, wenn es eine lineare Abbildung $f : V_1 \to V_2$ existiert, so dass für jede $a, b \in \mathcal{A}_1$ gilt*

$$f(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{F(a)\,F(b)}. \qquad (*)$$

Eine bijektive affine Abbildung heißt Affinität oder ein affiner Isomorphismis

Bedienung $(*)$ umformulieren: für alle $a_1 \in \mathcal{A}_1$, $v \in V_1$ gilt

$$F(a_1 + v) = F(a_1) + f(v). \qquad (**)$$

Lemma 8

Affine Abbildung F ist Affinität $\iff$ f ist ein Isomorphismus.

Beweis $\Longleftarrow$. Bijektiv = surjektiv und injektiv

f sei injektiv. Betrachte $a \neq b \in \mathcal{A}_1$. Nach Lemma 5 $\overrightarrow{ab} \neq \vec{0}$. Dann ist $\overrightarrow{F(a)\,F(b)} = f(\overrightarrow{ab}) \neq \vec{0}$. Dann ist $F(a) \neq F(b)$, also F ist injektiv.

f sei surjektiv. Betrachte $a_1 \in \mathcal{A}_1$, $a_2 := F(a_1) \in \mathcal{A}_2$. Nach (A_2) gilt:

$\mathcal{A}_1 := \{a_1 + v_1 \ \text{ wobei } v_1 \in V_1\}$ *und* $\mathcal{A}_2 := \{a_2 + v_2 \ \text{ wobei } v_2 \in V_2\}$.

Da alle $v_2 \in V_2$ Bilder von Elementen von V_1 sind, und wegen $(**)$ ist $Bild_F = \mathcal{A}_2$. Also, ist f bijektiv, so ist F auch bijektiv.

Definition 13 – noch einmal *Seien* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ *affine Räume über* V_1, V_2. *Eine Abbildung* $F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ *heißt* *affin*, *wenn es eine lineare Abbildung* $f : V_1 \to V_2$ *existiert, so dass für jede* $a, b \in \mathcal{A}_1$ *gilt*

$$f(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{F(a)\,F(b)}. \qquad (*)$$

Eine bijektive affine Abbildung heißt *Affinität* *oder ein* *affiner Isomorphismis*

Bedienung $(*)$ ist äquivalent zu:

$$F(a_1 + v) = F(a_1) + f(v). \qquad (**)$$

Beweis $\Longrightarrow$. Sei F injektiv. Betrachte $u \neq v \in V_1$ und $a_1 \in \mathcal{A}_1$. Nach (A_2) gilt $a_1 + v \neq a_1 + u$. Dann ist $F(a_1 + v) \neq F(a_1 + u)$; also $F(a_1) + f(v) \neq F(a_1) + f(u)$, also $f(v) \neq f(u)$, also f ist injektiv.

Sei F surjektiv. Betrachte ein beliebiges $v_2 = \overrightarrow{a_2 b_2} \in V_2$. Da F surjektiv, ist $a_2 = F(a_1)$, $b_2 = F(b_1)$ für irgendwelche $a_1, b_1 \in \mathcal{A}_1$. Dann ist $f(\overrightarrow{a_1 b_1}) \overset{(*)}{=} \overrightarrow{F(a_1)\,F(b_1)}$, also $v_2 \in Bild_f$, also f ist surjektiv. $\square$

Bsp. (Paralellverschiebung) Sei $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$ und $V_1 = V_2 = V$. Sei $v_0 \in V$ ein fester Vektor. Dann ist die Abbildung $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $F(v) := v + v_0$ affin. In dem Fall ist $f = Id$. Tatsächlich, $\overrightarrow{F(a)\,F(b)}$ ist der Vektor $w \in V$ s.d. $F(a) + w = F(b)$. Da $F(a) = a + v_0$, $F(b) = b + v_0$ ist $F(a) + w = a + v_0 + w = a + w + v_0 = F(a + w)$. Also, $f(w) = w$. Eine solche Abbildung heißt Translation (oder Parallelverschiebung) . Sie ist ein Affinität nach Lemma 8.

HauptBsp. Seien $a_1 \in \mathcal{A}_1$, $a_2 \in \mathcal{A}_2$, $f : V_1 \to V_2$ sei eine lineare Abbildung. Dann ist

$$F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2 \quad , \quad F(a) := a_2 + f(\overrightarrow{a_1 a})$$

eine affine Abbildung.

Tatsächlich, $F(a_1 + v) = F(a_1) + f(v)$.

Also, alle affine Abbildungen sind wie in HauptBsp.
In Worten: Jede affine Abbildung ist eine Verkettung von einer Translation und einer linearen Abbildung

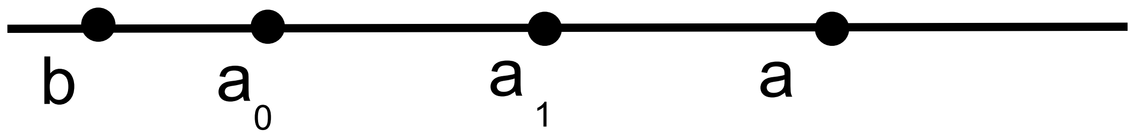
Def. 14 *Sei $\mathcal{A}$ affiner Raum über $\mathbb{K}$- Vektorraum V, $\dim(V) = n \geq 1$. Ein $(n+1)$-Tupel $(a_0, ..., a_n)$ von Punkten $a_0, ..., a_n$ aus $\mathcal{A}$ heißt Koordinatensystem für $\mathcal{A}$, falls die Vektoren $\overrightarrow{a_0 a_1}, \overrightarrow{a_0 a_2}, \overrightarrow{a_0 a_3}, ..., \overrightarrow{a_0 a_n}$ linearunabhängig sind (und damit eine Basis von V bilden). Ist $x \in \mathcal{A}$ ein beliebiger Punkt, so gilt*

$$\overrightarrow{a_0 x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \overrightarrow{a_0 a_i}$$

mit durch x eindeutig bestimmten $x_i \in \mathbb{K}$. Diese x_i heißen die Koordinaten von x bzg. Koordinatensystem $(a_0, ..., a_n)$, und $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ heißt der Koordinatenvektor von x.

Koordinaten auf einer Gerade

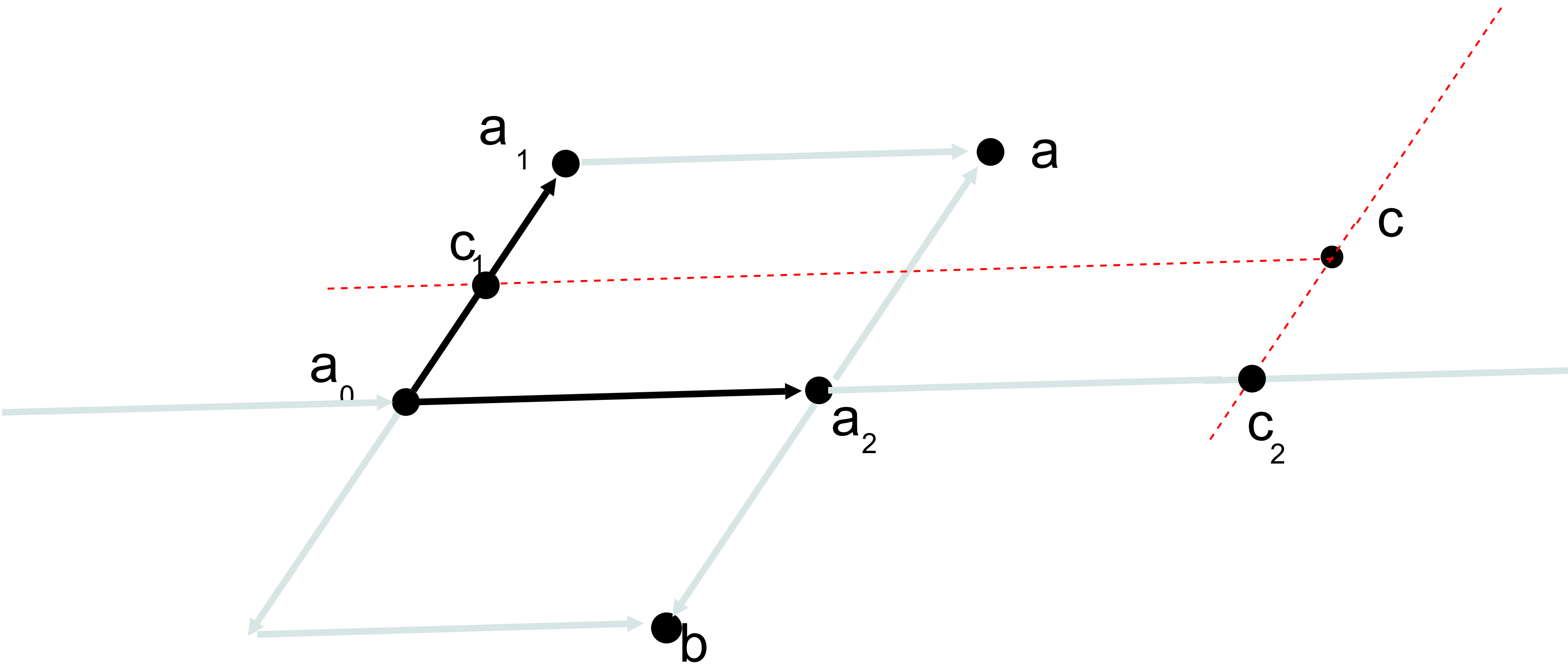
Gerade = 1-dimensionaler affiner Raum
Koordinatensystem besteht aus $n+1=2$ Punkten (a_0, a_1) s.d. $a_0 \neq a_1$.
Koordinatenvektor eines Punkts a besteht aus einem Zahl x s.d. $a_0 + x\overrightarrow{a_0 a_1} = a$



Punkt	Koordinate
a_1	1
a_0	0
a	2
b	-1/2

Koordinaten auf einer Ebene

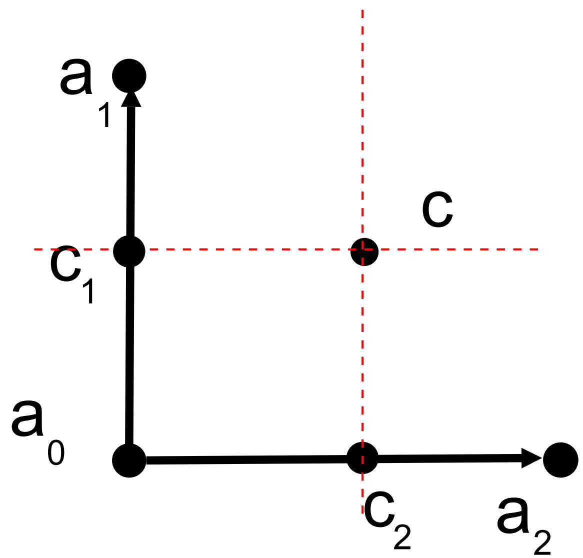
Ebene = 2-dimensionaler affiner Raum
Koordinatensystem besteht aus $n+1=3$ Punkten (a_0, a_1, a_2) s.d. $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \ \overrightarrow{a_0a_1}\}$ linear unabhängig sind. Nach Hausaufgabe 2a, Blatt 7 LAAG I bedeutet dies das $\overrightarrow{a_0a_1}$ $\overrightarrow{a_0a_2}$ nichtproportional sind.
Koordinatenvektor eines Punkts a ist $\binom{x_1}{x_2}$ s.d. $a_0 + x_1\overrightarrow{a_0a_1} + x_2\overrightarrow{a_0a_2} = a$
Für a auf dem Bild: $\binom{1}{1}$ Für b: $\binom{-1}{1}$ Für c: $\binom{1/2}{2}$



Frage *Wann sind affine Koordinaten auf der (üblichen) Ebene cartesisch?*

Antwort Wenn die Strecken (a_0, a_1) Länge 1 haben und paarweise orthogonal sind.

Weil in dem Fall das Parallelogramm $a_0c_1cc_2$ ein Rechteck ist, und deswegen die Punkte c_1, c_2 sind Proektionen des c auf die Geraden a_0a_1, a_0a_2. Da die Länge von $\lambda\vec{v}$ gleich $|\lambda||\vec{v}|$ ist, sind die Koordinaten von c die Längen von (a_0, c_1), (a_0, c_2) (mit vorzeichen)



Satz 17(Haupsatz der affinen Geometrie) *Sei $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ zwei affine Räume der gleichen Dimension n (über V_1 bzw. V_2). Seien $(a_0, ...a_n)$ und $(b_0, ..., b_n)$ die Koordinatensysteme in $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$. Dann existiert genau eine affine Abbildung $F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ s.d. $F(a_i) = b_i$. Diese Abbildung ist Affinität.*

Beweis. Nach Definition sind $(\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, \overrightarrow{a_0a_3}, ..., \overrightarrow{a_0a_n})$ und $(\overrightarrow{b_0b_1}, \overrightarrow{b_0b_2}, \overrightarrow{b_0b_3}, ..., \overrightarrow{b_0b_n})$ Basen von V_1 bzw. V_2. Nach Satz 30 LAAG I (Vorl. 12) gibt es genau eine lineare Abbildung f, so dass $f(\overrightarrow{a_0a_i}) = \overrightarrow{b_0b_i}$. Da die Tupel Basen sind, ist f ein Isomorphismus. Betrachte die Abbildung

$$F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2, \quad F(a) := b_0 + f(\overrightarrow{a_0a}) \quad \text{(aus dem HauptBsp.)}$$

Die Abbildung ist eine Affinität nach Lemma 8. Z.z.: $F(a_i) = b_i$.
$F(a_0) = b_0$, da $\overrightarrow{a_0a_0} \overset{Lem.5}{=} \vec{0}$ und $b_0 + f(\vec{0}) \overset{Lem.5}{=} b_0$

$$F(a_i) = F(a_0 + \overrightarrow{a_0a_i}) = F(a_0) + f(\overrightarrow{a_0a_i}) = b_0 + \overrightarrow{b_0b_i} = b_i.$$

Folgerung *Alle affine Räume der gleichem endlichen Dimension sind affin isomorph.*

Diese Aussage erlaubt, alle Probleme der (endlichdimensionalen) affinen Geometrie in einem $\mathbb{K}^n$ zu betrachten.

Lass uns alle affine Abbildungen von $\mathcal{A}_1$ nach $\mathcal{A}_2$ beschreiben.

Satz 18 *Seien $\mathcal{A}_1 = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{A}_2 = \mathbb{K}^m$ Standard-Räume (sie sind affine Räume jeweils über $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$). Dann jede affine Abbildung $F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ kann man als $F(x) = a + Ax$, wobei $a \in \mathbb{K}^m$ und $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$ sind.*

Beweis. Setze $a = F(\vec{0})$. Da $\vec{0} + x = x$, ist

$F(x) = F(\vec{0} + \vec{x}) \overset{(**)}{=} F(\vec{0}) + f(x) = a_1 + Ax$ für eine Matrix $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$. $\square$

Wiederholung: Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ein affiner Unterraum ist.

Satz 19 *Sei $\mathcal{U}$ ein affiner Unterraum von Standard-Raum $\mathbb{K}^n$. Dann existiert ein $m \leq n$, $m \in \mathbb{N}$, eine Matrix $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$ und ein $b \in \mathbb{K}^m$ s.d. die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist $\mathcal{U}$.*

Beweis. Sei $k := dim(\mathcal{U})$. Betrachte eine Basis $(v_1, ..., v_k)$ von $V_{\mathcal{U}}$. Nach Basisergänzungssatz (Folgerung (c) Vorl. 11 LAAG I) gibt es eine Basis $(v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_m)$ von V, wobei $m = n - k$. Betrachte die lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, die die Vektoren $v_1, ..., v_k$ auf $\vec{0}$, und die Vektoren $w_1, ..., w_m$ jeweils auf Standard-Basisvektoren $e_1, ..., e_m \in \mathbb{K}^m$ abbildet (Existiert nach Satz 30 Vorl 12. LAAG I). Sei $A \in Mat(m, n, \mathbb{K})$ deren Matrix. Nehme ein $a \in \mathcal{U}$ und setze $b = Aa$.

Wir zeigen: $\mathcal{U}$ ist die Lösungsmenge von $Ax = b$. Wir zeigen zuerst: $Kern_f = V_{\mathcal{U}}$. Tatsächlch, jedes $v \in V_{\mathcal{U}}$ ist eine Linearkombination $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ und deswegen $f(v) = f(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{0} = \vec{0}$. Also jedes $v \in V_{\mathcal{U}}$ liegt in $Kern_f$.

Jeder Vektor $w \in Kern_f$ liegt in $V_{\mathcal{U}}$. Da $\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_m\}$ eine Basis in V ist, $w = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^m \mu_j w_j$. Dann ist $f(w) = f(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i) + f(\sum_{j=1}^m \mu_j w_j) = \vec{0} + \sum_{j=1}^m \mu_i f(w_j) = \sum_{j=1}^m \mu_j e_j$. Also, aus $f(w) = \vec{0}$ folgt $\sum_{j=1}^m \mu_j e_j = 0$; dann alle $\mu_j = 0$; dann $w \in V_{\mathcal{U}}$. Also, $Kern_f = V_{\mathcal{U}}$.

Wir haben b so kostruiert, dass $Aa = b$ ist, also a ist die Lösung von $Ax = b$. Nach Satz 47(b) LAAG I ist die Lösungsmenge $\{a + v \text{ wobei } v \in Kern_f\} = \{a + v \text{ wobei } v \in V_{\mathcal{U}}\} = \mathcal{U}$. $\square$