Wiederholung

Satz 13 (Jordansche Normalform) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus, dessen Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann existiert eine Basis von V, so dass die Matrix von ϕ Jordan-Matrix sind. Diese Jordansche Normalform ist bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig.

Wiederholung: *Jordan-Matrizen* sind die Matrices der Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}^{k_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{\lambda_m}^{k_m}} \end{pmatrix}$$

, wobei J_λ^k die folgende $k \times k$-Matrix ist

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Wiederholung

- **Beobachtung 2 aus der Vorlesung 6** Sei $P \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom, $A \in Mat(n, n, \mathbb{K})$, $B \in GL(n, \mathbb{K})$. Dann gilt: $P(B^{-1}AB) = B^{-1}P(A)B$.
- **Beobachtung 3 aus der Vorlesung 6** Für eine Block-diagonale Matrix $M = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$, wobei A_i eine $k_i \times k_i$-Matrix ist, ist $P(M) = \begin{pmatrix} \boxed{P(A_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P(A_m)} \end{pmatrix}$.

- Sei J ein $k \times k$ Jordan Block über $\mathbb{C}$ mit Eigenwert λ, d.h., $J = J_\lambda^k$. Dann gilt:

$$P(J) = \begin{pmatrix} P(\lambda) & \frac{1}{1!}P'(\lambda) & \frac{1}{2!}P^{(2)}(\lambda) & \cdots & \frac{1}{n!}P^{(n)}(\lambda) \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \frac{1}{2!}P^{(2)}(\lambda) \\ & & & P(\lambda) & \frac{1}{1!}P'(\lambda) \\ & & & & P(\lambda) \end{pmatrix}, \text{ wobei } P^{(j)} \text{ die}$$

$j-$te Ableitung des Polynoms P ist.

(Z.B., für Polynom $P = z^3$ ist $P' = 3z^2$, $P^{(2)} = 6z$, $P^{(3)} = 6$, $P^{(4)} = P^{(5)} = ... = 0$;
allgemein: für Polynom $P = \sum_{k=0}^m a_k x^k \in \mathbb{C}[x]$ ist
$P' = \sum_{k=1}^m k \cdot a_k x^{k-1} \in \mathbb{C}[x] \qquad (*)$.

Das ist in wesentlichem Hausaufgabe 3a: in der Tat, da die Ableitung die lineare Abbildung von $\mathbb{C}[x]$ auf $\mathbb{C}[x]$ ist, genügt es, die Formel für Monomen (d.h., für Polynomen der Form x^n) zu prüfen, und Sie haben sie zu Hause ausgerechnet.

Bemerkung. Man kann die Ableitung über beliebige Körper definieren, nicht nur über $\mathbb{C}$, mit Hilfe der Formel $(*)$. Wir machen es später. In dem Fall die Eigenschaften, die für $\mathbb{C}$ „umsonst“ aus Ana I kommen, separat bewiesen werden müssen.

Analytische Funktionen von Matrizen

Sei $a_0, a_1, ..., a_k, ... \in \mathbb{C}$ eine Folge,
$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_k z^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ die entsprechende analytische Funktion und A eine Matrix. Wir betrachten die Folge von Matrizen(partielle Summen): $a_0 \cdot Id$, $a_0 \cdot Id + a_1 A$, ...,
$a_0 \cdot Id + a_1 \cdot A + a_2 \cdot A^2 + ... + a_m A^m = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot A^k := P_m(A)$,...
Wir sagen, dass die Folge konvergiert, falls sie komponentenweise konvergiert, d.h., für jede $i, j \in n$ konvergieren die $(i, j)-$ Einträge von Matrizen $a_0 \cdot Id$, $a_0 \cdot Id + a_1 A$, ..., $P_m(A)$.

Def. 10 Falls die Folge konvergiert, setzen wir

$$f(A) = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot A^k.$$

(Falls für irgendwelche i, j die Folge divergiert, ist $f(A)$ nicht definiert.)
Bemerkung: Für Polynomen $\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot A^k$ gilt:
$\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot (B^{-1}AB)^k = B^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot A^k\right) B$. Wir werden bald sehen:
$f(B^{-1}AB) = B^{-1} f(A) B$.
Dies bedeutet, dass Definition nicht von Wahl von Basis abhängt (d.h., wir in Wirklichkeit analytische Funktionen von Endomorphismen definiert haben).

Natürliche Fragen

Unten $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist stets eine analytische Funktion, A eine $n \times n$-Matrix.

1. Für welche A existiert $f(A)$? (d.h., für welche A konvergiert die Reihe $a_0 \cdot Id$, $a_0 \cdot Id + a_1 A$, ..., komponentenweise)
2. Wie kann man $f(A)$ ausrechnen?
   Bemerkung. Es ist hoffnungslos, bereits für 3×3-Matrizen einfache analytische Funktionen von Matirzen, z.B. e^A, nach Definition auszurechnen.
3. Wozu braucht man analytische Funktionen von Matrizen auszurechnen?
   Bemerkung. In dem Kurs gew. Differentialgleichungen werden analytische Funktionen von linearen Abbildungen auch gemacht, (sogar für Banach-Räumen) teilweise parallel zu linearen Algebra. Das bedeutet, dass sie für Differentialgleichungen, und deswegen auch alle Naturwissenschaften wichtig sind.

Satz 14 Angenommen, alle Eigenwerte von $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ liegen in Konvergenzkreise von f. Dann gilt: $f(A)$ ist definiert.

Satz 14 Antwortet auf die erste Frage: wann ist $f(A)$ definiert.

Satz 15 (Spektralsatz) Seien $\lambda_1, ..., \lambda_m$ verschiedene Eigenwerte von $A \in\in Mat(n, n, \mathbb{C})$, $k_1, ..., k_m$ ihre algebraische Vielfachheiten $(k_1 + ... + k_m = n)$. Angenommen, der Konvergenzradius von f ist größer als $max|\lambda_i|$.
Dann gilt: Es gibt n Matrizen $Z_{\lambda_1,1}, ..., Z_{\lambda_1,k_1}, Z_{\lambda_2,1}, ..., Z_{\lambda_2,k_2}, ..., Z_{\lambda_m,1}, ..., Z_{\lambda_m,k_m} \in Mat(n, n, \mathbb{C})$, die <u>nur von A abhängen</u>, so dass für jede analytische Funktion f gilt: ist $f(A)$ definiert, so ist
$f(A) = \sum_{i=1}^{m} \left(f(\lambda_i) Z_{\lambda_i,1} + ... + f^{(k_i-1)}(\lambda_i) Z_{\lambda_i,k_i} \right) \qquad (*)$
In Worten. Für jede Matrix A gibt es n Matrizen $Z_{\lambda_i,j}$ sodass jede analytische Funktion $f(A)$ mit genügend großem Konvergenzradius die Linearkombination $(*)$ ist.

Bemerkung. Die Matrizen $Z_{\lambda_i,j}$ hängen nicht von f ab, nur von A. Satz 15 antworten auf die zweite Frage und gibt uns eine effektive Methode, die Matrix $f(A)$ auszurechnen.

Beweis von Sätze 14/15.

Beweisstrategie: wir zeigen zuerst, dass es genügend, die Sätze nur für Jordan-Blöcke zu beweisen, und dann prüfen die Formeln für die Blöcke.

Wir benutzen die folgende Aussage aus Ana I:
Konvergieren die Folgen $\alpha_0, ..., \alpha_k, ...; \beta_0, ..., \beta_k, ...$ gegen α bzw. β, so konvergiert die Folge $C_1 \cdot \alpha_i + C_2 \cdot \beta_i$ gegen $C_1 \cdot \alpha + C_2 \cdot \beta$.

Ist $f(B^{-1}AB)$ definiert, dann ist $f(A)$ auch definiert. In der Tat, für jedes Polynom $P_k = a_0 + ... + a_k z^k$ ist $P_k(A) = BP_k(B^{-1}AB)B^{-1}$. Also, die Einträge von $P_k(A)$ sind lineare Ausdrücke von Einträge von $P_k(B^{-1}AB)$ mit konstanten Koeffizienten, die von B kommen.
Falls alle Einträge von $P_k(B^{-1}AB)$ für $k \to \infty$ konvergieren, konvergieren auch deswegen die Einträge von
$P_k(A) = BP_k(B^{-1}AB)B^{-1}$, und zwar gegen $Bf(B^{-1}AB)B^{-1}$.
Deswegen genügend es, die Sätze 14, 15 für die Jordan-Matrizen zu beweisen.

Da für eine Block-diagonale Matrix $M = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$, wobei A_i eine $k_i \times k_i$-Matrix ist, ist $P_n(M) = \begin{pmatrix} \boxed{P_n(A_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P_n(A_m)} \end{pmatrix}$, genügend es, die Sätze 14, 15 für die einzelne Jordan-Blöcke zu beweisen.

Beweis für Jordan-Blöcke: ausrechen

Nach Hausaufgabe 3, ist

$$P_n(J_\lambda^k) = \begin{pmatrix} P_n(\lambda) & \frac{1}{1!}P_n'(\lambda) & \frac{1}{2!}P_n^{(2)}(\lambda) & \cdots & \frac{1}{k!}P_n^{(k)}(\lambda) \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \frac{1}{2!}P_n^{(2)}(\lambda) \\ & & & P_n(\lambda) & \frac{1}{1!}P_n'(\lambda) \\ & & & & P_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

Falls λ in der Konvergenzkreise von f liegt, konvergiert $P_n(\lambda)$ gegen $f(\lambda)$, folglich konvergieren die Diagonalelemente gegen $f(\lambda)$. Falls λ in der Konvergenzkreise von f liegt, konvergiert $P_n'(\lambda)$gegen $f'(\lambda)$, folglich konvergieren die $(i, i+1)$ Einträge gegen $\frac{1}{1!}f'(\lambda)$, u.s.w. Satz 14 ist bewiesen.

Wir sehen, dass $f(J)$ Linearkombination von Matrizen

$$D_i := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$ (die nicht von f abhängen), mit Koeffizienten $\frac{1}{i!}f^{(i)}(\lambda)$ ist. Satz 15 ist bewiesen.

Folgerung (Rechnenregeln für analytische Funktionen von Matrizen) Es gilt:

1. $Af(A) = f(A)A$ (falls $f(A)$ definiert ist).
2. Sei $h = f + g$. Dann gilt $h(A) = f(A) + g(A)$ (falls $h(A), f(A)$ definiert sind.)
3. Sei $h = fg$. Dann gilt $h(A) = f(A)g(A)$ (falls definiert)
4. Sei $h(z) = f(g(z))$. Dann gilt $h(A) = f(g(A))$ (falls definiert)
5. Sei $f(\lambda) \neq 0$ für jeden Eigenwert λ von A, $h = 1/f$. Dann $h(A) = (f(A))^{-1}$.

Beweis. Benutzen Sie Satz 15 oder die Definition. Z.B. in (1) sei $g(z) = zf(z) = f(z)z$. Dann ist $g(A) = Af(A) = f(A)A$.

e^J, wobei $J = J_\lambda^k$ ein Jordan-Block ist

Im Beweis von Sätze 14, 15 haben wir gezeigt, dass

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda) & \cdots & \frac{1}{n!}f^{(n)}(\lambda) \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda) \\ & & & f(\lambda) & \frac{1}{1!}f'(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Da für $f(z) = e^z$ gilt $f^{(j)}(z) = e^z$, ist $f^{(j)}(\lambda) = e^\lambda$, und deswegen

$$e^J = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ & \ddots & \ddots \quad \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \frac{1}{1!} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Für eine Jordan-Matrix $M = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_m} \end{pmatrix}$, wobei $J_i := J_{\lambda_i}^{k_i}$

ein $k_i \times k_i$-Jordanblock ist, ist $e^M = \begin{pmatrix} \boxed{e^{J_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{e^{J_m}} \end{pmatrix}$.

Insbesondere gilt: $det(e^M) = e^{trace(M)}$ (die beide Seiten sind $e^{\sum_i k_i \lambda_i}$).

Satz 16 Die Exponentialabbildung hat die folgenden Eigenschaften:
(unten sind A, B stets $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$.)
(1) e^A konvergiert für jede Matrix A.
(2) Die Zuordnung $A \mapsto e^A$ ist eine C^∞ – Abbildung (sogar reell analytisch) (als Abbildung von $\underbrace{\mathbb{C}^{n^2}}_{=Mat(n,n,\mathbb{C})}$ auf sich selbst.)
(3) Es gilt $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, falls $AB = BA$ (dies ist das Exponentialgesetz)
(4) e^A ist stets invertierbar, und es gilt $e^A = e^{-A}$ sowie $det(e^A) = e^{trace(A)}$
(5) Die Abbildung $t \mapsto e^{tA}$ ist bzgl. t differenzierbar mit $e^{0\cdot A} = Id$ und $\frac{d}{dt} e^{t\cdot A} = Ae^{tA}$.

Beweis (1): Da Konvergenzradius von e^z-Funktion unendlich ist, ist e^A für alle $A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ nach Satz 14 definiert.

Beweis (2): Weil die Einträge von e^A konvergente Reihen von Einträgen von A sind.

Beweis (3): Die Gleichung $AB = BA$ impliziert die binomische Formel $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$, allgemein $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$, wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Es folgt

$$
\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!}(A+B)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \tfrac{1}{k!l!} A^k B^l \overset{\text{symmetrisch bzgl. } A,\, B}{=} e^{B+A}.
\end{aligned}
$$

Beweis (4): Setze $A := -B$. Offensichtich, $AB = BA(= -B^2)$. Dann folgt nach Teil (3): $Id = e^{\mathbf{0}} = e^{A-A} = e^A \cdot e^{-A}$, also $e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}$.
Die Gleichung $det(e^A) = e^{trace(A)}$ bekommt man sofort, wenn A eine Jordan-Matrix steht, wie wir vor dem Satz ausgerechet haben. In dem Fall, auf der Diagonale von e^A stehen e^{λ_i}, wobei λ_i Eigenwerte sind. $e^{trace(A)}$ ist ebenfalls Produkt von Exponentialfunktionen von Eigenwerten (mit Vielfachheiten). Da *det* und *trace* nicht von Wahl der Basis abhängen, gilt die Gleichung $det(e^A) = e^{trace(A)}$ für alle A.
Beweis (5): Hier rechnet man mit gliedweiser Differentiation folgendes aus:

$$\frac{d}{dt}(e^{t\cdot A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \cdot A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{1}{k!} t^k \cdot A^k$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{1}{k!} \cdot k \cdot t^{k-1} \cdot A^k$$
$$\overset{k-1=m}{=} A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{1}{m!} \cdot t^m \cdot A^m.$$

Anwendung: lösen von linearen Gleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Für eine gegebene $n \times n$-Matrix A gesucht wird ein Vektor $u = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}$,

dessen Einträge u_i Funktionen von x sind, s.d.

$(*) \quad u'(x) = Au$

d.h., $\begin{pmatrix} u_1'(x) \\ \vdots \\ u_n'(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}$

Bsp. Für $n = 1$ ist $(*)$ die bekannte Gleichung $u'(x) = au(x)$, und deren Lösung ist $u(x) = e^{ax}$

wobei C eine Konstante ist.

$(*)$ ist eine äußerst wichtige Gleichung in Physik, und kommt selbstverständilch im Kurs gewöhnliche Differentialgleichungen vor.

Nach Satz 16 löst

$u(x) := e^{Ax} C \qquad\qquad (**)$

diese Gleichung , wobei C ein (konstanter) Vektor ist. Nach Satz von Satz von Picard-Lindelöf (kommt noch im Kurs gewöhnliche Differentialgleichungen) haben alle Lösungen von $(*)$ die Form $(**)$.