Organisatorisches

Die Donnerstag-Ubung (Dr. Schöbel) wird am Montag 8–10 in HS 1 Abb stattfinden. Die Vorlesung fällt deswegen aus. Die erste Ubungsgruppe (Dr. Freiberg) darf (muss aber nicht) auch teilnehmen. Die Hausaufgaben durfen am Montag bis 12:00 direkt an Herr Schöbel (Z. 3511) abgegeben werden.

Zusammenfassung der Montag-Vorlesung:

Ziel: Eine Basis finden sodass die Matrix von gegebenen Endomorphismus $\phi : V \to V$ möglich einfach ist.
Annahme: Das Minimalpolynom Min_ϕ zerfällt in Linearfaktoren: $Min_\phi = (x - \lambda_1)^{\gamma_1} \cdots (x - \lambda_k)^{\gamma_k}$.
Bemerkung. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ist diese Annahme immer erfüllt (Folgerung A aus dem Hauptsatz der Algebra).

Wir haben gezeigt: Es gibt eine Basis

$$(\underbrace{B_1}_{\text{Basis in } W_{\lambda_1}}, \ldots, \underbrace{B_k}_{\text{Basis in } W_{\lambda_k}})$$

sodass die Matrix von ϕ blockdiagonal ist:

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}.$$

Die Dimension des $i-$ten Blocks ist die Dimension von W_{λ_i}, d.h., Anzahl von Elementen in B_i.
Die Beschränkung $\phi_{|W_{\lambda_i}}$ von ϕ auf W_{λ_i} ist eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$(\phi - \lambda_i Id)^{\gamma_i} = \mathbf{0}. \qquad (*)$$

Wir werden jetzt eine Basis in W_{λ_i} suchen/finden, sodass die Matrix von $\phi_{|W_{\lambda_i}}$ (mit der Eigenschaft $(*)$) möglich einfach ist.

Also, für uns sind die Endomorphismen der Form $\phi + \lambda \cdot Id$ interessant, sodass $\phi^{\gamma} = \mathbf{0}$. (Statt ϕ aus der letzten Folie betrachte ich jetzt $\phi := \phi_{alt} - \lambda \cdot Id$). Solche ϕ nennt man nilpotent(Def. 9). Für $w \in W$ heißt $k \in \mathbb{N}$ die $\phi-$Periode von w, falls $\phi^{k-1}(w) \neq \vec{0}$, aber $\phi^k(w) = \vec{0}$.

Wiederholung – Lemma 3. Sei : $\phi : W \to W$ nilpotent, sei $w \in W$ mit $\phi-$Periode k. Dann sind w,$\phi(w)$,$\phi^2(w), ..., \phi^{k-1}(w)$ linear unabhängig.

Bezeichung. $Z_w := span(w, \phi(w), \phi^2(w), ..., \phi^{k-1}(w))$ ist ein invarianter Untervektorraum: in der Tat,
$\phi(a_0 w + a_1\phi(w) + ... + a_{k-1}\phi^{k-1}(w)) = a_0\phi(w) + ... + a_{k-2}\phi^{k-1}(w)$ ist wieder ein Element von $span(w, \phi(w), \phi^2(w), ..., \phi^{k-1}(w))$. Da die erzeugende Elemente
$b_1 := \phi^{k-1}(w), b_2 := \phi^{k-2}(w), ..., b_k := w$
nach Lemma 3 linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis. Da $\phi(b_i) = b_{i-1}$ ist (für $i \neq 1$) und $\phi(b_1) = \vec{0}$, ist die Matrix von ϕ in der Basis $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

Lemma 4 (Zerlegungslemma für nilpotente Endomorphismen) Sei W ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum und $\phi : W \to W$ ein nilpotenter Endomorphismus. Sei $w \in W$ ein Element mit maximaler $\phi-$Periode k. Dann existiert ein $\phi-$invarianter Untervektorraum $U \subseteq W$, so dass $W = Z_w \oplus U$.

Beweis. Wähle einen $\phi-$invarianten Untervektorraum $U \subseteq W$ mit maximaler Dimension, so dass $Z_w \cap U = \{\vec{0}\}$. Dann ist die Summe $Z_w + U \subseteq W$ eine direkte Summe: ist $z + u = z' + u'$, so ist $z - z' = u' - u \in Z_w \cap U$, d.h., $z = z', u = u'$.

Z.z.: $Z_w \oplus U = W$. Angenommen das wäre nicht der Fall: Dann gäbe es ein $v \in W$ mit $v \notin Z(w) \oplus U$. Wähle j so, dass $\phi^{j-1}(v) \notin Z_w \oplus U$, aber $\phi^j(v) \in Z(w) \oplus U$: Ein solches j existiert, da ϕ nilpotent ist, und deswegen für genügen grosse j gilt $\phi^j(v) = \vec{0}$. Setze $x := \phi^{j-1}(v)$. Dann gilt $x \notin Z_w \oplus U$, aber $\phi(x) \in Z_w \oplus U$.
Schreibe $\phi(x) = \underbrace{a_0 w + ... + a_{k-1}\phi^{k-1}(w)}_{\in Z_w} + \underbrace{u}_{\in U}$.

$$\vec{0} = \phi^k(x) = \phi^{k-1} \circ \phi(x) \Longrightarrow$$

$$= \phi^{k-1}(a_0 w + ... + a_{k-1}\phi^{k-1}(w) + u) \quad \text{nur } \phi^{k-1}(w), \phi^{k-1}(u) \overset{\text{durfen}}{\neq} 0$$

$$= \underbrace{a_0\phi^{k-1}(w)}_{\in Z_w} + \underbrace{\phi^{k-1}(u)}_{\in U} \overset{\text{Weil die Summe direkt ist}}{\Longrightarrow} a_0 = 0, \phi^{k-1}(u) = 0$$

Setze $y := x - (a_1 w + ... + a_{k-1}\phi^{k-2}(w))$.
Nach Konstruktion gilt:
$\phi(y) = \phi(x) - (a_1\phi(w) + ... + a_{k-1}\phi^{k-1}(w)) = u \in U$,
Wir zeigen: $y \notin Z_w \oplus U$. Sonsts wäre auch
$x = y + a_1 w + ... + a_{k-1}\phi^{k-2}(w) \in \mathbb{Z}_w \oplus U$.
Setze $U' := U \oplus span(y)$. (Die Summe ist direkt, weil $y \notin U$).
$dim(U') = dim(U) + 1$; U' ist $\phi-$invariant. Wir bekommen Widerspruch mit der Annahme, dass U maximale Dimension hat. $\square$

Lemma 4 auf der Sprache von Matrizen. Sei A eine $(n \times n)$- Matrix über $\mathbb{K}$ mit $A^\gamma = 0$. Dann existiert eine Matrix $B \in GL(n, \mathbb{K})$ sodass

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{D} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Da $A^\gamma = \mathbf{0}$, ist auch $D^\gamma = \mathbf{0}$. Dann kann man D auch (mit einem geeigneten Basiswechsel) in zwei Blöcke zersplittern u.s.w.

Satz 12 (Zerlegungssatz für nilpotente Endomorphismen) Sei W ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}-$ Vektorraum, sei $\phi : W \to W$ ein nilpotenter Endomorphismus. Dann existieren $w_1, ...w_l \in W$, so dass $W = Z_{w_1} \oplus \cdots \oplus Z_{w_l}$ und die Dimensionen der Z_{w_j} sind bis auf die Reihenfolge eindeutig durch ϕ festgelegt.

Beweis: Die Existenz (der Zerlegung) folgt induktiv aus dem Zerlegungslemma.
Also, es gibt eine Basis, sodass die Matrix von ϕ gleich

$$\begin{pmatrix} \boxed{C_1} & & & \\ & \boxed{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{C_l} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } C_i = \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{matrix}}.$$

Verschiedene C_i können selbstverständlich verschiedene Dimensionen haben.

Wir müssen jetzt zeigen, dass der Endomorphismus die Anzahl und Dimensionen von Blöcke beschtimmt.

Sie werden es zu Hause ausrechnen (Hausaufgabe 3):Für

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ gilt: $rk(C) = n - 1$ (in unserem Fall $5 - 1$).

Für $C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ gilt: $rk(C^2) = n - 2$ (in unserem fall 3).

Für $C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ gilt: $rk(C^3) = n - 3$ (in unserem Fall 2).

$$\vdots$$

$C^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ gilt: $rk(C^5) = 0$. $\quad C^6 = \mathbf{0}$;
$rk(C^6) = rk(C^5) = 0$.

Das ist immer der Fall:
$dim(Kern_{\phi|Z_{w_j}}) = 1$. (Weil
$\phi(a_0 w_j + ... + a_{k-1}\phi^{k-1}(w_j)) = a_0\phi(w_j) + ... + a_{k-2}\phi^{k-1}(w)$ ist
genau dann $\vec{0}$,wenn alle $a_0, ..., a_{k-2} = 0$.)

Bezeichnet n_j die ϕ-Periode von w_j, dann gilt für $m \in N$:

$$Kern_{(\phi|Z_{w_j})^m} = \begin{cases} span\left(\phi^{n_j-m}(w_j), ..., \phi^{n_j-1}(w_j)\right), & \text{falls } n_j > m \\ Z_{w_j}, & \text{falls } m \geq n_j \end{cases}$$

Wir werden diese Beobachtung nutzen um Anzahl und Dimensionen aller Blöcke zu bestimmen; nach dem Beispiel wird es hoffentlich offensichtlich.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wir sehen: $rk(A) = \underbrace{dim(Bild_\phi)}_{\text{von } \phi \text{ bestimmt}} = n - \{\text{Anzahl von Kästchen}\}$. Dann ist Anzahl von Kästchen ist durch ϕ eindeutig bestimmt.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wir sehen: $rk(A^2) = \underbrace{dim(Bild_{\phi^2})}_{\text{von } \phi \text{ bestimmt}} = n - \{\text{Anzahl von Kästchen}\} - \{\text{ Anzahl von Kästchen von Dimension} \geq 2 \}$. Dann ist Anzahl von Kästchen von Dimension ≥ 2 durch ϕ eindeutig bestimmt.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wir sehen: $rk(A^3) = \underbrace{dim(Bild_{\phi^3})}_{\text{von } \phi \text{ bestimmt}} = n -$ {Anzahl von Kästchen}$-${ Anzahl von Kästchen von Dimension ≥ 2 } $-${ Anzahl von Kästchen von Dimension ≥ 3 } .

Dann ist Anzahl von Kästchen von Dimension ≥ 3 durch ϕ eindeutig bestimmt.

Analog gilt für eine beliebige nilpotente Matrix.

Satz 12 auf der Matrizen-Sprache: Sei A eine $(n \times n)$- Matrix über $\mathbb{K}$ mit $A^\gamma = \mathbf{0}$. Dann gibt es eine $B \in GL(n, \mathbb{K})$, sodass die Matrix $B^{-1}AB$ gleich $\begin{pmatrix} \boxed{C_1} & & & \\ & \boxed{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{C_l} \end{pmatrix}$, wobei $C_i = \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{matrix}}$.

Bemerkung.

$B^{-1}(A - \lambda \cdot Id)B \overset{\text{Linearität}}{=} B^{-1}AB - \lambda B^{-1} Id B = B^{-1}AB - \lambda \cdot Id$.

Deswegen ist (falls $(A - \lambda \cdot Id)^\gamma = \mathbf{0}$ wie in Satz 11) $B^{-1}AB =$

$$\begin{pmatrix} \boxed{C_1} & & & \\ & \boxed{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{C_l} \end{pmatrix} + \lambda \cdot Id.$$

Jordansche Normalform

Def. 10 *Die $k \times k$ Matrix* $J_\lambda^k := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$ *heißt* *Jordan-Block.*

Bsp. $J_2^1 = (2)$, $J_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J_{1+i}^3 = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & \\ & 1+i & 1 \\ & & 1+i \end{pmatrix}$

Bemerkung $alg_{J_\lambda^k}(\lambda) = k$ (da $\aleph_{J_\lambda^k} = (\lambda - t)^k$), $geo_{J_\lambda^k} = 1$ (da $J_\lambda^k - \lambda \cdot Id_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ ist; deren Rang ist $k-1$ und deswegen $dim(Kern_{J_\lambda^k - \lambda \cdot Id_k}) = k - (k-1) = 1$. Also, Jordan-Block J_λ^k ist für $k \geq 2$ nicht diagonalisierbar.)

Die Matrix der Form $\begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}^{k_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{\lambda_m}^{k_m}} \end{pmatrix}$*, wobei* $J_{\lambda_j}^{k_j}$ *Jordan-Blöcke sind, heißt* *Jordan-Matrix.*

Bsp. Die Matrizen
$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$ sind Jordan-Matrizen.

Satz 13 (Jordansche Normalform) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus, dessen Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann existiert eine Basis von V , so dass die Matrix von ϕ Jordan-Matrix sind. Diese Jordansche Normalform ist bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig.

Satz 13 ist eine einfache Folgerung von Sätze 11, 12

Satz 11 – Wiederholung Es gibt eine Basis, so dass in der Basis die Matrix von ϕ die Form $\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$ hat, wobei $(A_i - \lambda_i \cdot Id)^{\gamma_i} = \mathbf{0}$.

Aus Satz 12, siehe auch Bemerkung oben: Für jedes A_i (der Dimension n_i) mit der Eigenschaft $(A_i - \lambda_i \cdot Id)^{\gamma_i} = 0$ gibt es eine

$$B_i \in GL(n_i, \mathbb{K}) \text{ mit } B_i^{-1} A_i B_i = \begin{pmatrix} \boxed{C_1^i} & & & \\ & \boxed{C_2^i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{C_{l_i}^i} \end{pmatrix} + \lambda_i Id \ .$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_k} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_k} \end{pmatrix}$$

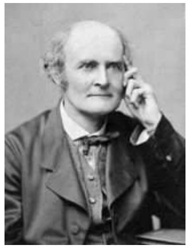
$$= \begin{pmatrix} \boxed{B_1^{-1} A_1 B_1} & & & \\ & \boxed{B_2^{-1} A_2 B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_k^{-1} A_k B_k} \end{pmatrix} = \text{Wie wir wollen.}$$

Eideutigkeit der Jordan-Normalform folgt aus der Beobachtung, dass ϕ die Untervektorräume W_{λ_i} eindeutig bestimmt, und aus der Eindeutigkeitsaussage im Satz 12. $\square$

Anwendung: Beweis von Hamilton-Cayley für Matrizen über $\mathbb{C}$.

Satz 56 LAAG I Vorl. 20 (Hamilton-Cayley)

1805 --1856



1821 --1895

$$\aleph_A(A) = \mathbf{0}$$

In Worten: Charakteristisches Polynom einer Matrix annihiliert die Matrix.

Beobachtung 1 Für $J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}^{k_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{\lambda_m}^{k_m}} \end{pmatrix}$, ist

$\aleph_J = (\lambda_1 - t)^{k_1} \ldots (\lambda_m - t)^{k_m}$.
Tatsächlich, da J eine obere Dreiecksmatrix ist (=alle Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen 0 sind) ist, ist $J - t \cdot Id$ auch eine obere Dreiecksmatrix, und deswegen $det(J - t \cdot Id)$ ist Produkt von Diagonalementen, die $(\lambda_i - t)$ sind.

Beobachtung 2 Die Matrizen A, A' seien ähnlich: $A = B^{-1}A'B$. Dann gilt: Für jedes $P \in \mathbb{C}[t]$ ist $P(A) = B^{-1}P(A')B$.
Tatsächlich, wir haben dies im wesentlichen in Vorl. 20 LAAG I bewiesen:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{mal}} = B^{-1}A'\underbrace{BB^{-1}}_{Id}A'B \ldots B^{-1}A'B = B^{-1}{A'}^kB.$$

Also, $P(A) = P(B^{-1}A'B) =$

$$a_kB^{-1}{A'}^kB + a_{k-1}B^{-1}{A'}^{k-1}B + \ldots + a_0B^{-1}B$$

$$\stackrel{\text{Linearität}}{=} B^{-1}(a_k{A'}^k + \ldots + a_0Id)B = B^{-1}P(A')B.$$

Beobachtung 3 Für eine Block-diagonale Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{B_m} \end{pmatrix},$$ wobei B_i eine $k_i \times k_i$-Matrix ist, ist

$$P(M) = \begin{pmatrix} \boxed{P(B_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P(B_m)} \end{pmatrix}.$$

Beobachtung 4 $\aleph_{J_\lambda^k}(J_\lambda^k) = \mathbf{0}$.

Tatsächlich,

$$\aleph_{J_\lambda^k}(J_\lambda^k) = (\lambda \cdot Id - J_\lambda^k)^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}^k \overset{\text{wie in Bsp. vorcher}}{=} \mathbf{0}$$

Alle vier Beobachtungen zusammen:

Für A, die ähnlich zu $J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}^{k_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{\lambda_m}^{k_m}} \end{pmatrix}$, gilt

1. $\aleph_J = (\lambda_1 - t)^{k_1} \dots (\lambda_m - t)^{k_m} = \aleph_{J_{\lambda_1}^{k_1}} \dots \aleph_{J_{\lambda_m}^{k_m}}$.
2. $P(A) \overset{\text{für geignetes } B}{=} B^{-1} P(J) B$, wobei J die Jordan'che Normalform von A
3. $P(J) = \begin{pmatrix} \boxed{P(J_{\lambda_1}^{k_1})} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{P(J_{\lambda_m}^{k_m})} \end{pmatrix}$,
4. $\aleph_J(J_{\lambda_i}^{k^i}) = P_i(J_{\lambda_i}^{k^i}) \cdot \underbrace{\aleph_{J_{\lambda_i}^{k_i}}(J_{\lambda_i}^{k^i})}_{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$

Dann ist $\aleph_A(A) \overset{\text{Satz 18 LAAG I}}{=} \aleph_J(A) = B^{-1} \aleph_J(J) B =$

$$B^{-1} \begin{pmatrix} \boxed{\aleph_J(J_{\lambda_1}^{k_1})} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\aleph_j(J_{\lambda_m}^{k_m})} \end{pmatrix} B = B^{-1} \mathbf{0} B = \mathbf{0}, \qquad \square$$