Organisatorisches:

Die Vorbereitungsruppe für Nachnachklausur findet am Mi 10–12 statt, falls es genügen viel Studenten gibt. Bitte in CAJ sich eintragen (wird Heute freigeschaltet) . Die Nachklausur findet in 2. Prüfungsperiode (etwa Oktober) statt. Die Physiker kännen zwar teilnehmen, durfen aber die Nachnachklausur nicht mitschreiben.

Jordan'sche Normalform

Ziel: Finde auch für nicht diagonalisierbare Endomorphimen eine möglichst einfache Matrixdarstellung.

Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Tatsächlich,

$\aleph_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2.$

Wir haben nur eine Nullstelle $\lambda = 0$. Kann man eine Basis aus Eigenvektoren finden? Nein, weil $Kern_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ hat nach Dimensionsformel die Dimension $\underbrace{2}_{dim(V)} - \underbrace{1}_{rk(A)} = 1$. Also, es gibt keine 2 linear unabhängige Eigenvektoren, und die Matrix ist nach Satz 54 LAAG I nicht diagonalisierbar.

Wiederholung: Seien $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden, $k \in \mathbb{N}$, sei $f = (x-\lambda_1)^{\gamma_1} ... (x-\lambda_k)^{\gamma_k} \in \mathbb{K}[x]$. Dann gilt:

(i) Falls ein Polynom $g \in \mathbb{K}[x]$ das Polynom f teilt, so ist es von der Form $g = \alpha(x-\lambda_1)^{\mu_1} ... (x-\lambda_k)^{\mu_k}$ mit $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und $\mu_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mu_j \leq \gamma_j$.

(ii) Es gibt Polynome h_1, $h_2 \in \mathbb{K}[x]$, sodass
$$1 = h_1 \cdot \underbrace{(x-\lambda_1)^{\gamma_1}}_{f_1} + h_2 \underbrace{(x-\lambda_2)^{\gamma_2} ... (x-\lambda_k)^{\gamma_k}}_{f_2}.$$

(i) $\Longleftrightarrow$ Lemma 33 Vorl. 20 LAAG I
(ii) $\Longleftrightarrow$ Satz 14 /Beweis von Satz 14 Vorl. Fricke LAAG I

Satz 11 Sei $f = (x - \lambda_1)^{\gamma_1} ... (x - \lambda_k)^{\gamma_k} \in \mathbb{K}[x]$, wobei λ_i paarweise verschieden sind. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum. Sei $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus . Dann ist
$Kern_{f(\phi)} = Kern_{(\phi - \lambda_1 \cdot Id)^{\gamma_1}} \oplus \cdots \oplus Kern_{(\phi - \lambda_k \cdot Id)^{\gamma_k}}.$

Wiederholung: $(\phi - \lambda \cdot Id)(v) := \phi(v) - \lambda v$.

$(\phi - \lambda \cdot Id)^2(v) = (\phi(v) - \lambda \cdot Id) \circ (\phi(v) - \lambda \cdot Id)(v) =$
$\phi^2(v) - 2\lambda\phi(v) + \lambda^2 v$ u.s.w.

Falls $A \in Mat(dim(V), dim(V), \mathbb{K})$ die Matrix von ϕ ist, so ist

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1\ \mathrm{dim}(V)} \\ \cdots & \ddots & \\ a_{\mathrm{dim}(V)\ 1} & \cdots & a_{dim(V)\ dim(V)} - \lambda \end{pmatrix}$$ die Matrix von $\phi - \lambda \cdot Id$.

Für $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ ist

$$P(\phi) = a_n \cdot \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n \text{ Stück}} + \cdots + a_0 \cdot Id$$ ein Endomorphismus von V.

Falls $A \in Mat(dim(V), dim(V), \mathbb{K})$ die Matrix von ϕ ist, so ist die Matrix von $P(\phi)$die Matrix $a_n A^n + ... + a_0 \cdot Id$.

Bemerkung $P(\phi) \circ Q(\phi) = (P \cdot Q)(\phi) = (Q \cdot P)(\phi)$. (Obwohl

$P(\phi) \cdot Q(\psi) \overset{\text{in der Regel}}{\neq} Q(\psi) \cdot P(\phi)$.)

Wiederholung – Def. 49 Vorl. 19 LAAG I *Seien $V_1, ..., V_k$ Unterverktorräume von V. Die Menge $W := \{v_1 + ... + v_k : wobei \ v_i \in V_i \}$ heißt die Summe von V_i und wird $V_1 + ... + V_k$ bezeichnet. Das ist ein Untervektorraum (Hausaufgabe 1 Blatt 11 LAAG I)* Wir sagen, dass die Summe direkt ist (Bezeichung: $W = V_1 \oplus ... \oplus V_k$), falls jedes $w \in W$ schreibt sich **eindeutig** in der Form $w = v_1 + ... + v_k$ mit $v_i \in V_i$

Satz 11 Sei $f = (x-\lambda_1)^{\gamma_1} ... (x-\lambda_k)^{\gamma_k} \in \mathbb{K}[x]$, wobei λ_i paarweise verschieden sind . Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum. Sei $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann ist
$Kern_{f(\phi)} = Kern((\phi - \lambda_1 \cdot Id)^{\gamma_1}) \oplus \cdots \oplus Kern((\phi - \lambda_k \cdot Id)^{\gamma_k})$.

Beweis. Induktion nach k. IA: Für $k = 1$ ist die Aussage offensichtlich: links und rechts stehen gleiche Ausdrücke.
IV: die Aussage gelte für alle $k-1$.
IS: $k-1 \to k$: Setze wieder $f_1 := (x-\lambda_1)^{\gamma_1}$,
$f_2 := (x-\lambda_2)^{\gamma_2} \cdots (x-\lambda_k)^{\gamma_k}$.
Wie oben wiederholt $\Longrightarrow \exists h_1, h_2 \in \mathbb{K}[x]$ sodass $h_1 \cdot f_1 + h_2 \cdot f_2 = 1$.
Wir zeigen: $Kern_{f(\phi)} = Kern_{f_1(\phi)} \oplus Kern_{f_2(\phi)}$. Dann folgt die Aussage nach InduktionsVoraussetzung für $Kern_{f_2(\phi)}$.

Schema.

Wir zeigen $Kern_{f_i(\phi)} \overset{(a)}{\subseteq} Kern_{f(\phi)}$, $Kern_{f_1(\phi)} + Kern_{f_2(\phi)} \overset{(b)}{\supseteq} Kern_{f(\phi)}$.
Daraus folgt, dass $Kern_{f_1(\phi)} + Kern_{f_2(\phi)} = Kern_{f(\phi)}$.

Dann ((c)) zeigen wir , dass $Kern_{f_1(\phi)} \cap Kern_{f_2(\phi)} = \{\vec{0}\}$.

Daraus wird folgen, dass die Summe direkt ist.

(a) Behauptung: $Kern_{f_1(\phi))} \subseteq Kern_{f(\phi))}$.

Beweis von (a): ist $v \in Kern_{f_1(\phi))}$, so ist

$f(\phi)(v) = (f_1(\phi) \circ f_2(\phi))(v) \overset{\text{Bemerkung oben}}{=}$
$(f_2(\phi) \circ f_1(\phi))(v) \overset{\text{Weil } Kern_{f_1(\phi)} \subseteq Kern_{f(\phi)}.}{=} f_2(\phi)(\vec{0}) = \vec{0}. \Longrightarrow$
$Kern_{f_1(\phi))} \subseteq Kern_{f(\phi))}$.

Analog: $Kern_{f_2(\phi))} \subseteq Kern_{f(\phi))}$.
Es folgt: $Kern_{f_1(\phi))} + Kern_{f_2(\phi))} \subseteq Kern_{f(\phi))}$.

(b) Behauptung: $Kern_{f_1(\phi))} + Kern_{f_2(\phi)} \supseteq Kern_{f(\phi)}$.

Beweis von (b): Sei $v \in Kern_{f(\phi)}$.

Wie wir oben wiederholt haben, gibt es $h_1, h_2 \in \mathbb{K}[x]$, sodass $1 = h_1 \cdot f_1 + h_2 \cdot f_2$. Da $1(\phi) \overset{Def.}{=} Id$, folgt

$$v = Id(v) = \underbrace{h_1(\phi) \circ f_1(v)}_{:=v_2} + \underbrace{h_2(\phi) \circ f_2(v)}_{:=v_1}.$$

Wir haben:

$$f_2(\phi)(v_2) = f_2(\phi) \circ h_1(\phi) \circ f_1(v) = h_1(\phi) \circ f(\phi)(v) = h_1(\phi)(\vec{0}) = \vec{0},$$

also $v_2 \in Kern_{f_2(\phi)}$.

Analog: $v_1 \in Kern_{f_1(\phi)}$.

Dann ist jedes v eine Summe von $v_1 \in Kern_{f_1(\phi)}$ und $v_2 \in Kern_{f_2(\phi)}$, folglich ist $Kern_{f_1(\phi))} + Kern_{f_2(\phi)} \supseteq Kern_{f(\phi)}$.

(c) Behauptung: $Kern_{f_1(\phi)} \cap Kern_{f_2(\phi)} = \{\vec{0}\}$.

Beweis von (c). Sei $v \in Kern_{f_1(\phi)} \cap Kern_{f_2(\phi)}$. Dann ist

$$v = Id(v) \overset{\text{wie in (b)}}{=} h_1(\phi) \circ \underbrace{f_1(v)}_{:=\vec{0}} + h_2(\phi) \circ \underbrace{f_2(v)}_{:=\vec{0}} = \vec{0}.$$

As (c) folgt, dass die Summe $Kern_{f_1(\phi)} + Kern_{f_2(\phi)}$ direkt ist. Nach Definition müssen wir zeigen, dass jedes v eindeuting als Summe $\underbrace{v_1}_{\in Kern_{f_1(\phi)}} + \underbrace{v_2}_{\in Kern_{f_2(\phi)}}$ darstelbar ist. Sei

$$v = \underbrace{v_1}_{\in Kern_{f_1(\phi)}} + \underbrace{v_2}_{\in Kern_{f_2(\phi)}} = \underbrace{v_1'}_{\in Kern_{f_1(\phi)}} + \underbrace{v_2'}_{\in Kern_{f_2(\phi)}}.$$

Dann ist $\underbrace{v_1 - v_1'}_{\in Kern_{f_1(\phi)}} = \underbrace{v_2' - v_2}_{\in Kern_{f_2(\phi)}} \in Kern_{f_1(\phi)} \cap Kern_{f_2(\phi)}$.

Wegen $Kern_{f_1(\phi)} \cap Kern_{f_2(\phi)} = \{\vec{0}\}$ ist dann $v_1 - v_1' = \vec{0}$ und $v_2 - v_2' = \vec{0}$, $\square$

Gleichzeitig haben wir Induktionsschritt gemacht und deswegen Satz 11 bewiesen.

Folgerung = Satz 58 Vorl. 21 LAAG I:
$Min_A = (\lambda_1 - x)...(\lambda_k - x)$, wobei λ_i paarweise verschieden sind $\Longleftrightarrow$ A ist diagonalisierbar.

Die Richtung „$\Longleftarrow$" ist einfach: man muss zeigen, dass Minimalpolynom einer Diagonalmatrix die Form $(\lambda_1 - x)...(\lambda_k - x)$ mit paarweise verschieden λ_i hat, siehe Vorl. 21 LAAG I, falls es nicht offensichtlich ist.

Beweis „$\Longrightarrow$“: Sei ϕ der Endomorphismus mit der Matrix A. Da $Min_A(A) = \mathbf{0}$, ist $Kern_{Min_A(f)} = V$. Nach Satz 11 ist
$V = \underbrace{Kern_{f-\lambda_1 \cdot Id}}_{=Eig_{\lambda_1}} \oplus \cdots \oplus \underbrace{Kern_{f-\lambda_k \cdot Id}}_{=Eig_{\lambda_k}}$.
Seien $(b_1, ..., b_{Geo_{\lambda_1}})$, $(b_{Geo_{\lambda_1}+1}, ..., b_{Geo_{\lambda_1}+Geo_{\lambda_2}})$, ..., $(b_{Geo_{\lambda_1}+...+Geo_{\lambda_{k-1}}+1}, ..., b_{Geo_{\lambda_1}+...+Geo_{\lambda_k}})$ Basen jeweils in Eig_{λ_1},Eig_{λ_2},...,Eig_{λ_k}. Dann ist die Menge $\{b_1, ..., b_{Geo_{\lambda_1}+...+Geo_{\lambda_k}}\}$
(i) erzeugend, weil man nach Satz 11 jedes v als Summe
$\underbrace{v_1}_{\in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_k}_{\in Eig_{\lambda_k}}$ darstellen kann, und jedes v_i eine Linearkombination von Elementen der $i-$ten Basis sind.
(ii) EINDEUTIG erzeugend ist, weil man jedes v eindeutig als Summe
$\underbrace{v_1}_{\in Eig_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{v_k}_{\in Eig_{\lambda_k}}$ schreiben kann, und jedes v_i kann man eindeutig als Summe von Elementen von Basis von Eig_{λ_i} schreiben.
Dann ist das Tupel $(b_1, ..., b_{Geo_{\lambda_1}+...+Geo_{\lambda_k}})$ eine Basis. Da alle Elemente Eigenvektoren sind, ist die Matrix von ϕ in der Basis nach Satz 54 LAAG 1 (Vorl. 19) diagonal, $\square$

Verallgemeintere Eigenräume

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus. Das Minimalpolynom $Min_\phi = (x - \lambda_1)^{\gamma_1} \cdots (x - \lambda_k)^{\gamma_k}$ zerfalle in Linearfaktoren mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Dann gilt nach Satz 11:

$$V = \underbrace{Kern((\phi - \lambda_1 \cdot Id)^{\gamma_1})}_{:=W_{\lambda_1}} \oplus \cdots \oplus \underbrace{Kern((\phi - \lambda_k \cdot Id)^{\gamma_k})}_{:=W_{\lambda_k}}.$$

Def. 7 Die Räume $W_{\lambda_1}, \ldots, W_{\lambda_k}$ heißen verallgemeintere Eigenräume.

Satz 11 in Worten: Das Minimalpolynom von $\phi : V \to V$ zerfalle in Linearfaktoren. Dann ist V direkte Summe von verallgemeinteren Eigenräumen.

Def. 8 Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ heißt $\phi-$ invariant, falls $Bild_\phi(W) \subseteq W$.

Triv. Bsp. $\{\vec{0}\}$ ist ein $\phi-$ invarianter Untervektorraum; V selbst ist ein $\phi-$ invarianter Untervektorraum.

Interes. Bsp. Verallgemeintere Eigenräume W_i (von ϕ) sind $\phi-$ invariante Untervektorräume.

Beweis. Für jedes $v \in W_\lambda$ ist

$(\phi - \lambda \cdot Id)^\gamma \circ \phi(v) = \phi \circ (\phi - \lambda \cdot Id)(v) = \phi(\vec{0}) = \vec{0},$ $\square$

Allgemeine Uberlegung

Das Minimalpolynom $Min_\phi = (x-\lambda_1)^{\gamma_1}\cdots(x-\lambda_k)^{\gamma_k}$ zerfalle in Linearfaktoren. Für jedes $i = 1, ..., k$ sei B_i die Basis in W_{λ_i}. Wir setzen die Basen B_i zu einer Basis $\mathrm{B} = (B_1, ..., B_k)$ von V zusammen (Beweis, dass es eine Basis ist haben wir in Beweis von Folgerung aus Satz 11 gemacht).

Da W_{λ_i} $\phi-$invariant ist, für jedes $b \in B_i$ ist das Vektor $\phi(b)$ eine Linearkommbination des Vektoren aus der Basis B_i, ist die Matrix A von ϕ bzgl. der Basis blockdiagonal:

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix},$$

wobei A_i ist die Matrix von $\phi_{|W_{\lambda_i}}$ in der Basis B_i.

Wir haben also eine Basis konstruiert, so dass die Matrix von ϕ blockdiagonal ist. Wir werden die Basis noch verbessern.

Dazu werden wir $\phi_{|W_i} - \lambda_i \cdot Id$ untersuchen.

Nilpotente Endomorphismen

Def. 9 Ein Endomorphismus $\phi : W \to W$ heißt nilpotent, falls es ein $\gamma \in \mathbb{N}$ gibt mit $\phi^\gamma \equiv \mathbf{0}$.

Für $w \in W$ heißt $k \in \mathbb{N}$ die $\phi-$Periode von w, falls $\phi^{k-1}(w) \neq \vec{0}$, aber $\phi^k(w) = \vec{0}$.

Bemerkung. Es ist stets $\gamma \geq k$ (falls ϕ wie in Def. 9 ist).

Lemma 3. Sei : $\phi : W \to W$ nilpotent, sei $w \in W$ mit $\phi-$Periode k. Dann sind w,$\phi(w)$,$\phi^2(w)$, ..., $\phi^{k-1}(w)$ linear unabhängig.

Beweis: Sei $a_0 w + a_1\phi(w) + \ldots + a_{k-1}\phi^{k-1}(w) = \vec{0}$. $\quad (*)$ Wir wenden ϕ^{k-1} an und bekommen

$a_0\phi^{k-1}(w) + \underbrace{a_1\phi^k(w)}_{\vec{0}} + \ldots + \underbrace{a_{k-1}\phi^{2k-2}(w)}_{\vec{0}} = \vec{0}$. Da $\phi^{k-1}(w) \neq \vec{0}$, folgt daraus dass $a_0 = 0$.

Dann $(*)$ ist $a_1\phi(w) + \ldots + a_{k-1}\phi^{k-1}(w) = \vec{0}$.

Anwendung von ϕ^{k-2} liefert uns $a_1 = 0$ u.s.w., $\square$