Satz 7. *Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann konstruierbar, wenn a in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ enthalten ist.*

Bemerkung *Ist die Zahl a konstruierbar, so ist bei gegebener Strecke AB eine Strecke der Länge $|a| \cdot |AB|$ auch konstruierbar, und umgekehrt.*

Beweis: „$\Longleftarrow$" ist Folgerung aus Satz 6 und Ihre Hausaufgabe. Wir beweisen in „$\Longrightarrow$". Wir werden die Konstruktionsschritte (a)–(e) in Standard-Koordinaten $\binom{x}{y}$ auf $(\mathbb{R}^2, +, \bullet, \langle\ ,\ \rangle)$ nachvollziehen.

Es genügt zu zeigen: Sind $p_1, \ldots, p_n$ Punkte, deren Koordinaten in einem Körper $K \subseteq \mathbb{R}$ liegen, und ist der Punkt p konstruierbar aus $p_1, \ldots, p_n$, so liegen die Koordinaten von p in einer iterierten quadratischen Erweiterung von K.

Tatsächlich, oBdA sind $\binom{0}{0}$ und $\binom{1}{0}$ die Eckpunkte der gegebenen Strecke der Länge 1. Deren Koordinaten liegen also in $\mathbb{Q}$. Falls die Aussage oben richtig ist, liegen die Koordianten jedes konstruierbaren Punkts in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Dann ist die Länge jeder konstruierbaren Strecke gleich

$$\sqrt{\underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\substack{\text{in einer iter.} \\ \text{quadr. Erweiterung von } \mathbb{Q}}} + \underbrace{(y_1 - y_2)^2}_{\substack{\text{in einer iter.} \\ \text{quadr. Erweiterung von } \mathbb{Q}}}} \in \begin{matrix}\text{iter. quadr.} \\ \text{Erweiterung} \\ \text{von } \mathbb{Q}\end{matrix}.$$

Es genügt nachzuprüfen, dass:

(i) Schnittpunkt der Geraden $\mathcal{G}_1 := \left\{ \binom{x_1}{y_1} + t\binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R} \right\}$ und $\mathcal{G}_2 := \left\{ \binom{x_3}{y_3} + s\binom{x_4 - x_3}{y_4 - y_3}, \text{ wobei } s \in \mathbb{R} \right\}$, wobei $x_i, y_i \in \mathbb{K}$, in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$ liegen.

(ii) Schnittpunkte der Geraden $\mathcal{G}_1 := \left\{ \binom{x_1}{y_1} + t\binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R} \right\}$ und des Kreises um $\binom{x_0}{y_0}$, dessen Radius gleich Abstand zwischen $\binom{x_3}{y_3}$ und $\binom{x_4}{y_4}$, wobei $x_i, y_i \in \mathbb{K}$, in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$ liegen.

(iii) Schnittpunkte des Kreises um x_0, dessen Radius gleich Abstand zwischen $\binom{x_1}{y_1}$ und $\binom{x_2}{y_2}$ ist, mit der Kreis um x_0', dessen Radius gleich Abstand zwischen $\binom{x_1'}{y_1'}$ und $\binom{x_2'}{y_2'}$ ist,in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$ liegen.

(i): Gerade $\cap$ Gerade

Falls die Gerade $\mathcal{G}_1 := \left\{ \binom{x_1}{y_1} + t\binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \text{ wobei } t \in \mathbb{R} \right\}$ und $\mathcal{G}_2 := \left\{ \binom{x_3}{y_3} + s\binom{x_4 - x_3}{y_4 - y_3}, \text{ wobei } s \in \mathbb{R} \right\}$, nicht parallel sind, ist der Schnittpunkt die Lösungsmenge des Systems (auf s, t)

$$\begin{cases} x_1 + t(x_2 - x_1) = x_3 + s(x_4 - x_3) \\ y_1 + t(y_2 - y_1) = y_3 + s(y_4 - y_3) \end{cases},$$

dessen Matrixform

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & -(x_4 - x_3) \\ y_2 - y_1 & -(y_4 - y_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \qquad ist$$

Da die Gerade nichtparallel sind, ist die Koeffizientenmatrix des Systems nichtausgeartet, also ist die Lösung

$$\binom{t}{s} =$$

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & -(x_4 - x_3) \\ y_2 - y_1 & -(y_4 - y_3) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & -(x_4 - x_3) \\ y_2 - y_1 & -(y_4 - y_3) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -(y_4 - y_3) & x_4 - x_3 \\ -(y_2 - y_1) & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass die Koordinaten des Schnittpunkts in $\mathbb{K}$ liegen.

(ii): Kreis $\cap$ Gerade

Betrachte den Kreis um $\binom{x_0}{y_0}$ mit Radius $r = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$.
Da $(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 \in \mathbb{K}$, liegt r in einer quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$ (in $\mathbb{K}$ oder in $\mathbb{K}(\sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2})$).
Der Schnittpunkt der Geraden $\mathcal{G} := \{\binom{x_1}{y_1} + t\binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \text{wobei } t \in \mathbb{R}\}$ mit dem Kreis ist der Punkt der Form $\binom{x_1}{y_1} + \mathrm{t}\binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$, der auf dem Kreis liegt, i.e.

$$(x_0 - x_1 - t(x_2 - x_1))^2 + (y_0 - y_1 - t(y_2 - y_1))^2 = r^2.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung $at^2 + bt + c = 0$ auf t, deren Koeffizienten a, b, c Elemente von $\mathbb{K}$ oder $\mathbb{K}(r)$ sind.
Deren Lösungen sind $t_\pm = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - c}$. Sie liegen in einem iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$.
Die Schnittpunkte der Geraden $\mathcal{G}_1$ und des Kreises sind die Punkte $\binom{x_1}{y_1} + t_\pm \binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$. Deren Koordinaten liegen in einem iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$.

(iii): Kreis $\cap$ Kreis

Den Kreis um $\binom{x_0}{y_0}$ (bzw. um $\binom{x_0'}{y_0'}$) dessen Radius gleich Abstands $r \in \mathbb{K}$ zwischen $\binom{x_1}{y_1}$ und $\binom{x_2}{y_2}$ (bzw. Abstands $r' \in \mathbb{K}$ zwischen $\binom{x_1'}{y_1'}$ und $\binom{x_2'}{y_2'}$) ist, ist die Lösungsmenge der Systems

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0, \\ (x - x_0')^2 + (y - y_0')^2 - r'^2 = 0. \end{cases}$$

Subtraktion ergibt

$$2x(x_0 - x_0') + 2y(y_0 - y_0') + (r^2 - x_0^2 - y_0^2) - (r'^2 - x_0'^2 - y_0'^2) = 0.$$

Da wir o.B.d.A. $(x_0, y_0) \neq (x_0', y_0')$ annehmen können, können wir y durch x (oder x durch y) ausdrücken, dies in eine der Kreisgleichungen einsetzen und dann die entstehende quadratische Gleichung lösen. In jedem Fall sind, um die Koordinaten der konstruierten Punkte aus den Koordinaten der gegebenen Punkte zu berechnen, nur rationale Operationen und das Ziehen einer Quadratwurzel erforderlich. Daraus liegen Sie in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{K}$. $\square$

Nichtkonstruierbarkeit.

Wir werden

1. Ummoglichkeit von 3 klassischen Konstruktionsproblemen besprechen:
   - die *Dreiteilung des Winkels beweisen*,
   - die *Verdoppelung des Würfels (Delisches Problem) beweisen*
   - und die *Quadratur des Kreises* (nur besprechen),
2. Unmöglichkeit von konstruieren von $7-$Eck und $9-$Eck beweisen.

Vorbereitungsätze

Frage Wie beweist man, dass eine Zahl nicht in einem iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ liegt?

Def. 6 *Eine kubische Gleichung $x^3 + lx^2 + mx + n = 0$ heißt irreduzibel, wenn die Koeffizienten l, m, n rational sind, aber keine Lösung der Gleichung rational ist.*

Satz 8 *Ist die Zahl x Lösung einer irreduziblen kubischen Gleichung*

$$x^3 + lx^2 + mx + n = 0, \tag{1}$$

so liegt x nicht in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

Def. vor dem Beweis *Liegt y in einem Körper, der durch k-malige quadratische Erweiterung aus $\mathbb{Q}$ entsteht, so sagen wir, y sei auf dem Niveau k.*

Bsp. $1/2$ ist auf dem Niveau 0, $1 + \sqrt{3}$ ist auf dem Niveau 1.

Widerspuchsbeweis. Angenommen, eine Lösung der Gleichung (1) läge in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Sei x_1 die Lösung von (1), die auf dem kleinstem Niveau k ist. Da $x_1 \notin \mathbb{Q}$, ist $k \geq 1$.Es gilt also $x_1 = a + b\sqrt{s}$ mit geeigneten Zahlen a, b, s auf dem Niveau $k-1$. Wir setzen dies in (1) ein und erhalten

$$(a+b\sqrt{s})^3 + l(a+b\sqrt{s})^2 + m(a+b\sqrt{s}) + n =$$
$$\underbrace{(a^3+3ab^2s+a^2l+b^2sl+ma+n)}_{A \text{ auf dem Niveau } k-1} + \underbrace{(3a^2b+b^3s+2abl+bm)}_{B \text{ auf dem Niveau } k-1}\sqrt{s} = 0.$$

Ist $A \neq 0 \neq B$, so ist $\sqrt{s}$ auf dem Niveau $k-1$ (weil $\sqrt{s} = -A/B$ ist, und nach deswegen nach Satz 6 auf dem Niveau $k-1$ liegen muss), also ist x_1 nach Satz 6 auf dem Niveau $k-1$, was Voraussetzungen widerspricht. Dann ist $A = B = 0$, und deswegen $x_2 := a - b\sqrt{s}$ auch eine Nullstelle der Gleichung (1), denn es ist

$$\begin{aligned} & x_2^3 + lx_2^2 + mx_2 + n \\ = \; & (a^3+3ab^2s+a^2l+b^2sl+ma+n) - (3a^2b+b^3s+2abl+bm)\sqrt{s} = 0. \end{aligned}$$

Nach Satzgruppe von Viëta ist die Summe der drei Nullstellen von (1) gleich $-l$, also ist $-l-2a$ ebenfalls eine Nullstelle. Sie ist auf dem Niveau $k-1$. Das ist ein Widerspruch. $\square$

Folgerung *Um zu beweisen, dass eine Zahl nichtkonstruirbar ist, können wir zeigen, dass die Zahl eine Nullstelle einer irreduziblen kubischen Gleichung ist.*

Satz 9 *Sei* $x^3 + lx^2 + mx + n = 0$ *eine kubische Gleichung sodass* $l, m, n \in \mathbb{Z}$. *Dann gilt:*
Diese Gleichung ist g.d. irreduzibel,wenn sie keine ganzzahlige Lösung hat.
Beweis. „$\Longrightarrow$“ ist offensichtlich: ist die Gleichung irreduzibel, so sind nach Def. 6 die Lösungen irrational.
Widerspuchbeweis in „$\Longleftarrow$“ Angenommen, die Gleichung ist nicht irreduzibel, obwohl keine Lösungen ganzahlig ist. Dann gibt es eine rationale Lösung $x = r/s$, wobei $r, s \in \mathbb{Z}$. OBdA ist $ggT(r, s) = 1$. Einsetzen in die Gleichung ergibt $r^3 = -s(lr^2 + smr + ns^2)$. Ist $|s| > 1$, so hat s einen Primfaktor p. Dieser muss auch Primfaktor von r^3 sein, und damit von r, ein Widerspruch. Also ist $s = 1$ und daher x ganzzahlige Lösung, im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Dreiteilung des Winkels

Problem: *Kann man einen beliebige gegebene Winkel mit Zirkel und Lineal dreiteilen?*
Antwort: Nein.
Wäre die Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal lösbar,so wäre insbesondere der Winkel $\pi/9$ konstruierbar, damit wäre $\cos(\pi/9)$ konstruierbar. Wegen der Identität
$\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta =$
$(2cos^2\theta - 1)cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
und wegen $\cos\frac{\pi}{3} = 1/2$ genügt die Zahl $c = 2\cos\frac{\pi}{9}$ der Gleichung

$$c^3 - 3c - 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat keine ganzzahligen Lösungen(denn jede Lösung x erfüllt $x(x^2-3) = 1$,aber $x = \pm 1$ ist keine Lösung).Nach Satz 9 ist dann die Gleichung irreduzibel,und deswegen nach Satz 8 ist die Zahl $\cos(\pi/9)$ nicht konstruierbar. Die Unlösbarkeit der Winkeldreiteilung ist damit gezeigt.Zugleich ist mit diesem Beweis gezeigt, daß das reguläre 9-Eck nicht konstruierbar ist.

Verdoppelung des Würfels (Delisches Problem)

(Konstruktion eines Würfels mit dem doppelten Volumen eines vorgegebenen Würfels)
Der Sage nach wurde die Stadt Delos einmal von einer Seuche heimgesucht. Die Bewohner befragten ein Orakel und erhielten den Rat, einen ihrer Altäre zu verdoppeln. Plato interpretierte den Orakelspruch so, dass der würfelförmige Altar durch einen Würfel mit doppeltem Volumen ersetzt werden sollte. Er erklärte, Gott wolle die Griechen beschämen, weil sie das Studium der Mathematik vernachlässigt hätten. Daher ist die Verdopplung des Würfels auch als „Delisches Problem“ bekannt.

Wäre es lösbar, so könnte man aus einer Strecke der Länge 1 eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ konstruieren. Nach Satz 6 liegt dann $\sqrt[3]{2}$ in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Da $\sqrt[3]{2}$ eine Lösung der kubischen Gleichung

$$x^3 - 2 = 0$$

und diese nach Satz 9 irreduzibel ist,ist das ein Widerspruch zu Satz 8.

Quadratur des Kreises (ohne Beweis)

Aufgabe: *Mit Lineal und Zirkel aus einem gegebenen Kreis ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt zu konstruieren.*
Satz (Lindemann 1882) *Das ist unmöglich*
Beweisidee: Wir müssen zeigen,daß die Zahl π in keiner iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ liegt. Dies folgt daraus,

- daß π transzendent ist (=nullstelle von keinem Polynom mit rationellen Koeffizienten),
- jede konstruierbare Zahl algebraisch (=nicht tranzendent) ist.

Mit diesem Nachweis wurde das Problem der Quadratur des Kreises endgültig erledigt. Wir werden diese Aussage nicht beweisen. Sie dürfen sie trotsdem selbstverständlich u.a. in den Hausaufgaben benutzen.

Beweis der Tranzendenz von π/Quadratur des Kreises (von Rudolf Fritsch) http://www.minet.uni-jena.de/ matveev/Lehre/LA07/tranzendens-von-pi.pdf

Konstruierbarkeit von regulären n-Ecken

(Reguläres = alle Seiten und alle Winkel sind gleich)

Frage Welche regulären n-Ecken kann man mit Zirkel und Lineal konstruieren?

(Falls wir ein reguläres n-Eck konstruieren können, dann können wir ein reguläres n-Eck mit einer vorgegebenen Seite konstruieren.)

Bsp. Reguläres Dreieck, reguläres Viereck sind konstruierbar; reguläres 5-Eck ist ebenfalls konstruierbar – Beweis kommt.

Satz 10 *Reguläres n-Eck ist g.d. konstruirbar, wenn die Zahl* $\cos(\frac{2\pi}{n})$ *konstruierbar ist.*

Beweis. „$\Leftarrow$“ Angennomen ist die Zahl $\cos(\frac{2\pi}{n})$ konstruierbar. Dann können wir der Winkel $\frac{2\pi}{n}$ konstruieren. Dann können wir einen Kreis in n gleichen Sektoren teilen, und so die Ecken eines reguläres $n-$Eck konstruieren.

Beweis „$\Rightarrow$“

Angenommen reguläres n-Eck ist kostruierbar. Dann können wir das $n-$Eck in einen Kreis einbeschreiben. (Für je zwei Seiten nehme die Geraden, die die Seiten orthogonal im Mittelpunkt schneiden. Deren Durschnitt ist der Mittelpunkt des Kreises)

Dann können wir den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ konstruieren, und deswegen die Zahl $\cos(\frac{2\pi}{n})$. $\square$

Geometrische Konstruktionen und komplexe Zahlen.

Beobachtung $z := e^{\frac{2\pi}{n}i} \in \mathbb{C}$ *ist eine Nullstelle der Gleichung*
$z^{n-1} + z^{n-2} + ... + 1 = 0.$ $(*)$
Tatsächlich, $1, z, z^2, ..., z^{n-1}$ ist die geometrische Progression, deren
Summe ist $\frac{z^n-1}{z-1} = \frac{\left(e^{\frac{2\pi}{n}i}\right)^n-1}{e^{\frac{2\pi}{n}i}-1} = \frac{\left(e^{2\pi\cdot i}\right)-1}{e^{\frac{2\pi}{n}i}-1} = \frac{1-1}{e^{\frac{2\pi}{n}i}-1} = 0.$
Bsp. Reguläres 5-Eck ist konstruierbar
Tatsächlich, für $n = 5$ ist die Gleichung $(*)$
$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Wir können diese Gleichung lösen.Wir dividieren durch z^2 und bekommen
$z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0$ Da $(z + \frac{1}{z})^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$, ist die Gleichung äquivalent zu
$w^2 + w - 1 = 0$, wobei $w = z + \frac{1}{z}$. Dann ist $w = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.
Dann ist $z + \frac{1}{z} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$. Das sind quadratische Gleichungen, deren Koeffizienten in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ liegen. Dann haben die Nullstellen der Form $z = a + ib$, wobei $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist. Da nach Beobachtung oben $z = e^{\frac{2\pi}{5}i} = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$ eine Nullstelle ist, ist $\cos(\frac{2\pi}{5}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, und deswegen nach Satz 10 ist reguläres $5-$Eck konstruierbar.

Reguläres 7-Eck ist nicht konstruierbar

Nach Satz 10 müssen wir zeigen, dass $\cos(2\pi/7)$ in keinem iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ liegt. Nach Beobachtung , ist $e^{\frac{2\pi}{7}i} = \cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)$ eine Lösung der Gleichung
$z^6 + z^5 + ... + 1 = 0 \qquad (1).$
Für die Zahl $y := z + \frac{1}{z}$ gilt daher

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0, \tag{2}$$

wie sich sofort durch Einsetzen in (1) und Umformung ergibt. Dann ist

$$y_1 := z_1 + \frac{1}{z_1} = e^{i2\pi/7} + e^{-i2\pi/7} = 2\cos\frac{2\pi}{7}$$

eine Lösung von (2). Wäre nun das reguläre 7-Eck konstruierbar, so wäre die Zahl $\cos\frac{2\pi}{7}$ konstruierbar. Nach Satz 6 liegt y_1 dann in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$.Nach Satz 8 folgt daraus, daß die Gleichung (2) nicht irreduzibel ist,sie hat also nach Satz 9 eine ganzzahlige Lösung. Die Lösungen von (2) sind neben $2\cos\frac{2\pi}{7}$ noch die Zahlen $2\cos\frac{4\pi}{7}$ und $2\cos\frac{6\pi}{7}$ (die man genauso findet).Keine davon ist ganzzahlig. Das ist ein Widerspruch.

Literatur zur geometrischen Konstruktionen

- Hadlock, Charles Robert, Field theory and its classical problems. Carus Mathematical Monographs, 19. Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1978.
- F. Klein. Vorträge über den ausgewählten Fragen der Elementargeometrie, http://www.minet.uni-jena.de/ matveev/Lehre/LA07/klein.pdf und http://www.minet.uni-jena.de/ matveev/Lehre/LA07/klein2.pdf
- http://www-m10.mathematik.tu-muenchen.de/pub/Lehre/ThemenListe/Vortrag.pdf
- http://did.mat.uni-bayreuth.de/studium/seminar/antike/suess/unmoeglich.html
- Bieberbach, Ludwig Theorie der geometrischen Konstruktionen. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe, Band 13. Verlag Birkhäuser, Basel, 1952.