# Lineare Optimierung
# Prof. Dr. Ingo Althöfer
# SS 2009
# 2. Übungsserie

Name: Manuel Maier
Martrikelnummer: 94766
Übungsgruppe: 1 (Di 16-18 Uhr)
Studiengang: Mathematik Diplom

28 April 2009

1. Beim Einschmelzen von verschieden Sorten Schrott (Es wird angenommen es gibt $n$ Sorten), soll Flüssigstahl mit einer bestimmten Zusammensetzung entstehen, dabei sollen die Kosten minimiert werden.

   Es sollen 145 Tonnen Flüssigstahl mit folgender Zusammensetzung hergestellt werden:

   - Chrom zwischen 18.0% und 18.2%
   - Nickel zwischen 8.5% und 8.7%
   - Kupfer höchstens 0.15%
   - Keine weiteren Restriktionen

   Sei $x^{(i)}$ die Menge (in Tonnen) an Schrott, der Sorte $i$, von der man auch den genauen Chromanteil $x_C^{(i)}$, den genauen Nickelanteil $x_N^{(i)}$ sowie den Preis $x_P^{(i)}$ pro Tonne kennt. (Hier stellt sich die Frage, ob man weiß wie groß der Kupferanteil dieser Sorten ist? Ich gehe davon aus und bezeichne ihn mit $x_K^{(i)}$)
   Sei $y$ die Menge (in Tonnen) an Stahl, der einen besonderen Sorte mit günstigem Preis $y_P$ pro Tonne, von der man den genauen Kupferanteil nicht kennt. (Hier stellt sich die Frage, ob man den Nickelanteil $y_N$ kennt? Ich gehe davon aus, das dies der Fall ist.) Über den Kupferanteil dieser besonderen Sorte weiß man, dass er im Mittel 0.5% beträgt, wobei Werte zwischen 0.2% und 1.1% auftraten.
   Alle Sorten sind in ausreichend Mengen vorhanden. Wenn der Kupferanteil überschritten wird, so Fallen in Abhängikeit der Höhe, der Überschreitung, Strafkosten an. Man bestimme nun die billigste Kombination von Schrotten.

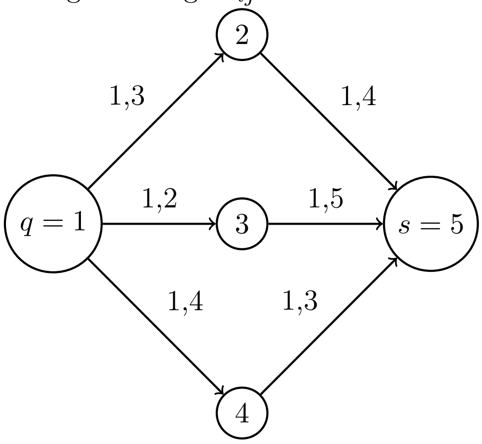
Dafür ist folgendes lineare Programm zu lösen:

min: $y_P y + \sum_{i=1}^{n} x_P^{(i)} x^{(i)}$

NB:

$$\begin{aligned}
y + \sum_{i=1}^{n} x^{(i)} &= 145 && \text{Menge des Flüssigstahls}\\
\frac{y_C}{145} y + \frac{1}{145} \sum_{i=1}^{n} x_C^{(i)} x^{(i)} &\geq 0.180 && \text{(Chrom)}\\
\frac{y_C}{145} y + \frac{1}{145} \sum_{i=1}^{n} x_C^{(i)} x^{(i)} &\leq 0.182 && \\
\frac{y_N}{145} y + \frac{1}{145} \sum_{i=1}^{n} x_N^{(i)} x^{(i)} &\geq 0.085 && \text{(Nickel)}\\
\frac{y_N}{145} y + \frac{1}{145} \sum_{i=1}^{n} x_N^{(i)} x^{(i)} &\leq 0.087 && \\
\frac{0.005}{145} y + \frac{1}{145} \sum_{i=1}^{n} x_K^{(i)} x^{(i)} &\leq 0.0015 && \text{(Kupfer, Mittelwert)}\\
y &\geq 0 && \text{(Nichtnegativitätsbedingung)}\\
x^{(i)} &\geq 0 \quad \forall i &&
\end{aligned}$$

2. Geben Sie ein Beispiel an, wo es mindestens 3 verschiedene kürzeste Wege von $q$ nach $s$ gibt. Geben sie für diese Beispiel eine zulässige Lösung des LP an, in der nichtganzzahlige $x_{ij}$ vorkommen.




Das LP lautet wie folgt:

min: $3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{14} + 4x_{25} + 5x_{35} + 3x_{45}$

NB:

$$\begin{aligned}
x_{12} - x_{25} &= 0 && \text{Kirchhof für Konoten 2}\\
x_{13} - x_{35} &= 0 && \text{Kirchhof für Konoten 3}\\
x_{14} - x_{45} &= 0 && \text{Kirchhof für Konoten 4}\\
x_{12} &\leq 1 && \text{Kapazität für (1, 2)}\\
x_{13} &\leq 1 && \text{Kapazität für (1, 3)}\\
x_{14} &\leq 1 && \text{Kapazität für (1, 4)}\\
x_{25} &\leq 1 && \text{Kapazität für (2, 5)}\\
x_{35} &\leq 1 && \text{Kapazität für (3, 5)}\\
x_{45} &\leq 1 && \text{Kapazität für (4, 5)}\\
x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 && \text{gesamte Transportmenge am Knoten Q}\\
x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 1 && \text{gesamte Transportmenge am Knoten S}\\
x_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, j && \text{Nichtnegativitäts Bedingung}
\end{aligned}$$

Wie man leicht sieht ist gibt es 3 ganzzahlige Lösungen:

a) $x_{12} = 1, x_{25} = 1,$ alle anderen $x_{ij} = 0$, mit Gesamtkosten 7.

b) $x_{13} = 1, x_{35} = 1,$ alle anderen $x_{ij} = 0$, mit Gesamtkosten 7.

c) $x_{14} = 1, x_{45} = 1,$ alle anderen $x_{ij} = 0$, mit Gesamtkosten 7.

Eine nicht ganzzahlige Lösung ist zum Beispiel: $x_{12} = \frac{1}{2}, x_{25} = \frac{1}{2}, x_{13} = \frac{1}{2}, x_{35} = \frac{1}{2},$ alle anderen $x_{ij} = 0$, mit Gesamtkosten 7.

3. a) Approximieren Sie mit der groben Stirling Formel $\binom{n}{\frac{n}{2}}$.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\frac{n}{2}!\frac{n}{2}!} &= \frac{\frac{n^n}{e^n}}{\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{e^{\frac{n}{2}}}\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{e^{\frac{n}{2}}}}\\
&= \frac{\frac{n^n}{e^n}}{\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{e^n}} = \frac{n^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n} = 2^n
\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie exakt $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ für alle geraden $n \leq 30$ und vergleichen Sie die Werte mit den Nährungen.

| n | $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ | $2^n$ | $\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n}$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 0.5 |
| 4 | 6 | 16 | 0.375 |
| 6 | 20 | 64 | 0.3125 |
| 8 | 70 | 256 | 0.2734 |
| 10 | 252 | 1024 | 0.2461 |
| 12 | 924 | 4096 | 0.2256 |
| 14 | 3432 | 16384 | 0.2095 |
| 16 | 12870 | 65536 | 0.1964 |
| 18 | 48620 | 262144 | 0.1855 |
| 20 | 184756 | 1048576 | 0.1762 |
| 22 | 705432 | 4194304 | 0.1682 |
| 24 | 2704156 | 16777216 | 0.1612 |
| 26 | 10400600 | 67108864 | 0.1550 |
| 28 | 40116600 | 268435456 | 0.1494 |
| 30 | 155117520 | 1073741824 | 0.1445 |

c) Beweisen Sie, dass $\binom{n}{\frac{n}{2}} < 2^n$ für alle geraden $n \geq 2$.

Man betracht die Äquivalente Ungleichung $\binom{2k}{k} < 2^{2k} = 4^k$ für $k = 1, 2, \ldots$.

IA: $k = 1 : \binom{2}{1} = 2 \leq 4$

IV: Gelte $\binom{2k}{k} < 4^k$ für ein $k \geq 1$.

IS: Dann gilt es auch für $k+1$, also: $\binom{2k+2}{k+1} < 4^{k+1}$.

IB:

$$\begin{aligned}\binom{2k+2}{k+1} &= \frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+1)} \frac{(2k)!}{k!k!} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+1)} \binom{2k}{k} \\ &\overset{\text{IV}}{<} \frac{2(2k+1)}{k+1} \cdot 4^k \leq \frac{2(2k+2)}{k+1} \cdot 4^k = 4 \cdot 4^k = 4^{k+1}\end{aligned}$$

$\square$