Elementare WMS
Prof. Dr. Werner Linde
WS 2008/09
12. Übungsserie

Name: Manuel Maier
Übungsgruppe: 1 (Do 8-10 Uhr)
Studiengang: Mathematik Diplom

22. Januar 2009

1. Für eine zufällige Größe X gelte $P(X \leq t) = 0$ für $t \leq 0$ und $P(X \leq t) = 1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$ für $t > 0$. *(3 P)*

   a) Bestimmen Sie die Verteilungsdichte von X.

$$P(X \leq t) = F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow p(t) = F'(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \lambda^2 t e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

   b) Berechnen Sie $P(-1 \leq X \leq 1)$.

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = 1 - (1 + \lambda)e^{-\lambda}$$

2. Für eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte zufällige Größe U berechne man die Verteilungsdichte von U^2 sowie den Erwartungswert EU^2. *(3 P)*

$$P(U \le t) = \begin{cases} t & t \in [0,1] \\ 0 & t < 0 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

$$F(t) = P(U^2 \le t) = P(U \le \sqrt{t}) = \begin{cases} \sqrt{t} & t \in (0,1] \\ 0 & t \le 0 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

$$p(t) = F'(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}} & t \in (0,1] \\ 0 & t \notin (0,1] \end{cases}$$

$$EU^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{2} \mathrm{d}x = \left[\frac{x\sqrt{x}}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

3. Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der zufälligen Größe 1_A. Dabei bezeichnet 1_A die auf Ω definierte Indikatorfunktion der Menge A, d.h. $1_A(\omega) = 1$, falls $\omega \in A$, und $1_A(\omega) = 0$ für $\omega \notin A$. Für eine zweite Menge $B \in \mathcal{A}$ bestimme man $\operatorname{cov}(1_A, 1_B)$. *(3 P)*

$$\begin{aligned}
a &= E1_A = 0 \cdot P(1_A = 0) + 1 \cdot P(1_A = 1) = P(\{\omega \ : \ 1_A(\omega) = 1\}) = P(A) \\
b &= E1_B = P(B) \\
V1_A &= E(1_A - E1_A)^2 = E1_A^2 - (E1_A)^2 = E1_A - a^2 = a - a^2 = a(1-a) \\
&= P(A)(1 - P(A) \\
V1_B &= P(B)(1 - P(B) \\
\operatorname{cov}(1_A, 1_B) &= E(1_A - a)(1_B - b) = E(1_A 1_B) - aE1_B - bE1_A + E(ab) \\
&= E1_{A \cap B} - 2ab + ab = P(A \cap B) - P(A)P(B) \\
&\Rightarrow 1_A, 1_B \text{ unkorreliert} \Leftrightarrow A, B \text{ unabhängig}
\end{aligned}$$

4. Die Zufallsgrößen X und Y seien unabhängig und Poisson–verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie für $k,\ l \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$ die Wahrscheinlichkeit $P(X = k \mid X + Y = l)$. *(3 P)*

$X, Y \sim P_\lambda, X+Y \sim P_{2\lambda}$

$$P(X=k) = P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
$$P(X+Y=k) = P_{2\lambda}(k) = \frac{(2\lambda)^k}{k!}e^{-2\lambda}$$
$$P(X=k \mid X+Y=l) = \frac{P(X=k, X+Y=l)}{P(X+Y=l)} = \frac{P(X=k)P(Y=l-k)}{P(X+Y=l)}$$
$$= \frac{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{l-k}}{(l-k)!}e^{-\lambda}}{\frac{(2\lambda)^l}{l!}e^{-2\lambda}} = \frac{l!}{2^l k!(l-k)!} = \frac{1}{2^l}\binom{l}{k}$$

5. Die Lebensdauer eines Bauteils sei exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Man nehme $n \geq 1$ dieser Bauteile gleichzeitig in Betrieb und setze voraus, dass die Bauteile unabhängig voneinander ausfallen. *(3 P)*

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zeitintervall $[0, T]$ genau $k \leq n$ der Bauteile ausfallen.
   Sei $X_1, \ldots, X_n$ die ZG der Lebensdauer der Bauteile, die unabhängig und $E_\lambda = \Gamma_{\lambda^{-1},1}$ verteilt sind.
   $E_\lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$
   $B_{n,p}(\{k\}) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

   $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), P(\{k\}) = B_{n,P(X_1 \leq T)}(\{k\})$
   dabei gibt k die Anzahl der Bauteile an, die ausfallen
   $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist ein W-Raum.

   b) Wie groß ist die durchschnittliche Zahl der Ausfälle im Zeitintervall $[0, T]$? Begründen Sie Ihre Antwort.
   Die Durchschnittliche Anzahl der Ausfälle ist der Erwartungswert von Y:

$$EY = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(Y=k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot B_{n,E_\lambda(T)}(\{k\}) = nE_\lambda(T) = n(1 - e^{-\lambda T})$$

6. Von 4 gegebenen Münzen seien drei unverfälscht und eine verfälscht, und zwar so, dass Kopf mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ und Zahl mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ erscheinen. Die Münzen sind äußerlich nicht unterscheidbar. Man nehme nun zufällig (gemäß der Gleichverteilung) eine der 4 Münzen und werfe diese. *(4 P)*

a) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum an, der diesen Versuch beschreibt.

$$\Omega = \{K, Z\} \times \{u, v\}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), P \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$$
$$P((K, u)) = P((Z, u)) = \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$
$$P((K, v)) = \frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{12}, P((Z, v)) = \frac{2}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

Damit ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Versuch „Kopf“ zu beobachten?

$$P(\{(K, u), (K, v)\}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}$$

c) Angenommen, beim Wurf ist „Kopf“ ist erschienen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die geworfene Münze die verfälschte war?

$$P(\{(K, v)\} \mid \{(K, u), (K, v)\}) = \frac{P(\{(K, v)\})}{P(\{(K, u), (K, v)\})} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{11}{24}} = \frac{2}{11}$$